ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1977
Seria: GÓRNICTWO z. 83 Nr kol. 551

Bronisław RADZIK

METODA OKREŚLANIA STAŁYCH MATERIAŁOWYCH MATERIAŁÓW TRANSWERSALNIE IZOTROPOWYCH W OPARCIU O TENSOMETRYCZNE BADANIA PRÓBEK PROSTOPADŁOŚCIENNYCH, ŚCISKANYCH JEDNOKIERUNKOWO

Streszczenie. W pracy podano metodę określania stałych materiałowych dla materiałów transwersalnie izotropowych za pomocą dwóch prostopadłościennych próbek. Próbki należy pobrać z calizny materiału według określonej orientacji względem głównej płaszczyzny izotropii (np. dla skał osadowych - względem płaszczyzn uławicenia).

Uzyskane z pomiarów w trakcie jednoosiowego ściskania wartości składowych stanu odkształcenia i naprężenia posłużą do wyznaczania stałych materiałowych według podanych w pracy wzorów.

1. Wstęp

Obecnie panuje pogląd, że wiele gatunków węgla oraz skał osadowych cechuje się transwersalnie izotropowym charakterem własności fizyko-mechanicznych [1]. Przy czym przyjmuje się, że:

1 - materiał posiada anizotropię własności fizykochemicznych typu prostoliniowego,
2 - materiał jest praktycznie jednorodny, tzn. że w każdym punkcie posiada takie same własności,
3 - siły wewnętrzne materiału mają potencjał.

Określenie tego typu materiału podano w punkcie 2 niniejszej pracy.

W obliczeniach wytrzymałościowych górotworu, którego skały posiadają charakter transwersalnie izotropowy, korzystamy z uogólnionego prawa Hooke'a [2].

W skład tych wzorów wchodzi pięć stałych materiałowych a_{ij}.

W pracy podano metodę określania stałych materiałowych. Proponowana metoda cechuje się tym, że umożliwia uzyskanie dużej liczby informacji (w postaci stałych materiałowych) ze stosunkowo małej ilości próbek, których wykonanie bywa zwykle kłopotliwe ze względu na trudności technologiczne. Ponadto proponowany sposób orientacji przestrzennej próbek ułatwia ich wycięcie z calizny.

2. Materiały transwersalnie izotropowe

Materiał nazywamy jednorodny, transwersalnie izotropowy, jeżeli charakteryzuje się tym, że przez punkt należący do przestrzeni ciała przechodzi

płaszczyzna symetrii sprężystej, zwana płaszczyzną izotropii, a wszystkie kierunki należące do tej płaszczyzny charakteryzują się równowartymi własnościami sprężystymi [3]. (płaszczyznę tę będziemy nazywali główną płaszczyzną symetrii sprężystej); czyli w każdym punkcie ciała istnieje jedna główna płaszczyzna symetrii sprężystej i nieskończenie wiele płaszczyzn izotropii prostopadłych do głównej płaszczyzny izotropii. Powyższa definicja już uwzględnia warunek o istnieniu potencjału sił wewnętrznych.

Uogólnione prawo Hooke'a, napisane w ortokartezjańskim układzie współrzędnych O,x,y,z, usytuowanym w ten sposób, że oś z jest normalna do głównej płaszczyzny izotropii, a osie x,y skierowane dowolnie w tej płaszczyźnie, ma następującą postać:

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z \tag{1}$$

$$\varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{11}\sigma_y + a_{13}\sigma_z \tag{2}$$

$$\varepsilon_z = a_{13}(\sigma_x + \sigma_y) + a_{33}\sigma_z \tag{3}$$

$$\gamma_x = a_{44}\tau_x \tag{4}$$

$$\gamma_y = a_{44}\tau_y \tag{5}$$

$$\gamma_z = 2(a_{11} - a_{12})\tau_z. \tag{6}$$

3. Metoda wyznaczania stałych materiałowych, wyniki pomiarów

W celu określenia pięciu stałych materiałowych występujących w równaniach (1) - (6) należy dokonać pomiarów odkształceń (na drodze tensometrycznej) powstałych w wyniku jednokierunkowego ściskania dwóch próbek wyciętych z calizny skalnej według zdeterminowanych orientacji.

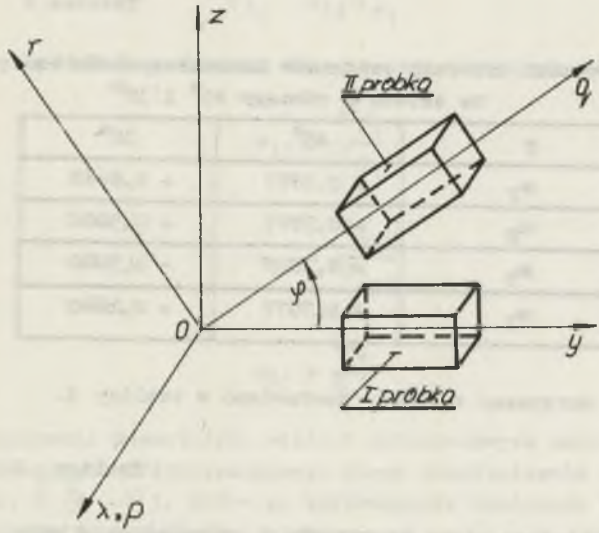
Jak wykazała analiza, badanie jednej próbki prostopadłościennej dowolnie zorientowanej względem układu O,x,y,z (żaden z boków nie jest równoległy do osi układu) nie daje rozwiązania, gdyż w materiale transwersalnie izotropowym kierunki główne stanu naprężenia pokrywają się z kierunkami głównymi stanu odkształcenia; z równań (1), (2) i (6) otrzymujemy zależność (7):

$$a_{11} - a_{12} = \frac{\frac{1}{2}\gamma_z}{\tau_z} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\sigma_x - \sigma_y}, \tag{7}$$

skąd:

$$\frac{\frac{1}{2}\gamma_z}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{\tau_z}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{8}$$

Określenie stałych materiałowych staje się możliwe za pomocą dwóch próbek prostopadłościennych, zorientowanych jak na rys. 1.



Rys. 1. Orientacja próbek

Pierwsza próba na krawędzie pokrywające się z kierunkami osi układu 0, x,y,z, natomiast druga z kierunkami osi układu, 0,p,q,r, powstałego przez obrót układu 0,x,y,z wokół osi x o pewien kąt φ. Wartości kąta φ są zawarte w niedomkniętym przedziale $(0^o, 90^o)$. Ze względów technologicznych i obliczeniowych winny wynosić 45° lub 30°.

Próbki mogą być wycinane z jednej płytki prostopadłej do głównej płaszczyzny izotropii, co ułatwia wycięcie próbek z większą dokładnością.

W tablicy 1 zestawiono cosinusy kierunkowe kątów zawartych między osiami układu 0,x,y,z i układu 0,p,q,r.

Tablica 1

Cosinusy kierunkowe kątów zawartych między osiami układów: 0,x,y,z i 0,p,q,r

	x	y	z
p	1	0	0
q	0	m_2	n_2
r	0	m_3	n_3

Wartości czterech cosinusów kierunkowych m i n dla wspomnianych kątów φ podano w tablicy 2.

Tablica 2

Wartości czterech cosinusów kierunkowych dla kąta obrotu φ równego 45° i 30°

φ	45°	30°
m_2	+ 0,7071	+ 0,8660
n_2	+ 0,7071	+ 0,5000
m_3	+ 0,7071	- 0,5000
n_3	+ 0,7071	+ 0,8660

Dane, które otrzymamy z badań, zestawiono w tablicy 3.

Tablica 3

Składowe stanu naprężenia i odkształcenia uzyskane z pomiarów próbki I i próbki II

Próbka I	σ_{y_1}, ε_{x_1}, ε_{y_1}, ε_{z_1}
Próbka II	σ_{q_2}, ε_{p_2}, ε_{q_2}, ε_{r_2}

Kąty odkształceń postaciowych są równe zeru:

$$\gamma_{x_1} = 0 \qquad \gamma_{p_2} = 0$$

$$\gamma_{y_1} = 0 \qquad \gamma_{q_2} = 0$$

$$\gamma_{z_1} = 0 \qquad \gamma_{r_2} = 0$$

gdzie: cyfrowe indeksy 1,2 - oznaczają próbkę pierwszą lub drugą..

4. Opracowanie wyników

Wartości uzyskane z pomiarów próbki pierwszej (tablica 3) wstawiamy do wzorów (1) - (3) i uzyskujemy układ równań:

$$\varepsilon_{x_1} = a_{12}\sigma_{y_1} \tag{9}$$

$$\varepsilon_{y_1} = a_{11}\sigma_{y_1} \tag{10}$$

$$\varepsilon_{z_1} = a_{13}\sigma_{y_1} \tag{11}$$

Z powyższych równań wyznaczamy trzy stałe materiałowe:

$$a_{11} = \frac{\varepsilon_{y_1}}{\sigma_{y_1}} \tag{12}$$

$$a_{12} = \frac{\varepsilon_{x_1}}{\sigma_{y_1}} \tag{13}$$

$$a_{13} = \frac{\varepsilon_{z_1}}{\sigma_{y_1}} \tag{14}$$

Celem wyznaczenia pozostałych stałych materiałowych skorzystamy ze wzorów transformacyjnych trójkierunkowego stanu odkształcenia i naprężenia (podanych np.: w [4 , 6]), które po wprowadzeniu cosinusów kierunkowych zawartych w tablicy 1, przyjmują postać:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_p \tag{15}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_q m_2^2 + \varepsilon_r n_2^2 + \gamma_p m_2 n_2 \tag{16}$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_q m_3^2 + \varepsilon_r n_3^2 + \gamma_p m_3 n_3 \tag{17}$$

$$\gamma_x = 2(\varepsilon_q m_2 m_3 + \varepsilon_r n_2 n_3) + \gamma_p(m_2 n_3 + m_3 n_2) \tag{18}$$

$$\gamma_y = \gamma_q n_3 + \gamma_r m_3 \tag{19}$$

$$\gamma_z = \gamma_q n_2 + \gamma_r m_2 \tag{20}$$

$$\sigma_x = \sigma_p \tag{21}$$

$$\sigma_y = \sigma_q m_2^2 + \sigma_r n_2^2 + 2\tau_p m_2 n_2 \tag{22}$$

$$\sigma_z = \sigma_q m_3^2 + \sigma_r n_3^2 + 2\tau_p m_3 n_3 \tag{23}$$

$$\tau_x = \sigma_q m_2 m_3 + \sigma_r n_2 n_3 + \tau_p (m_2 n_3 + m_3 n_2) \tag{24}$$

$$\tau_y = \tau_q n_3 + \tau_r m_3 \tag{25}$$

$$\tau_z = \tau_q n_2 + \tau_r m_2 \tag{26}$$

Wstawiając do wzorów (15) - (26) dane z tablicy 3 (uzyskane z pomiarów próbki II) otrzymamy:

$$\varepsilon_{x_2} = \varepsilon_{p_2} \tag{27}$$

$$\varepsilon_{y_2} = \varepsilon_{q_2} m_2^2 + \varepsilon_{r_2} n_2^2 \tag{28}$$

$$\varepsilon_{z_2} + \varepsilon_{q_2} m_3^2 + \varepsilon_{r_2} n_3^2 \tag{29}$$

$$\gamma_{x_2} = 2(\varepsilon_{q_2} m_2 m_3 + \varepsilon_{r_2} n_2 n_3) \tag{30}$$

$$\gamma_{y_2} = 0 \tag{31}$$

$$\gamma_{z_2} = 0 \tag{32}$$

$$\sigma_{x_2} = 0 \tag{33}$$

$$\sigma_{y_2} = \sigma_{q_2} m_2^2 \tag{34}$$

$$\sigma_{z_2} = \sigma_{q_2} m_3^2 \tag{35}$$

$$\tau_{x_2} = \sigma_{q_2} m_2 m_3 \tag{36}$$

$$\tau_{y_2} = 0, \tag{37}$$

$$\tau_{z_2} = 0. \tag{38}$$

Podstawiając do równania (3) wzory (14), (29), (33), (34) oraz (35) otrzymamy:

$$\varepsilon_{q_2} m_3^2 + \varepsilon_{r_2} n_3^2 = \frac{\sigma_{q_2}}{\sigma_{x_1}} \varepsilon_{z_1} m_2^2 + a_{33} \sigma_{q_2} m_3^2, \tag{39}$$

stąd:

$$a_{33} = \frac{\varepsilon_{q_2} m_3^2 + \varepsilon_{r_2} n_3^2 - \frac{\sigma_{q_2}}{\sigma_{x_1}} \varepsilon_{z_1} m_2^2}{\sigma_{q_2} m_3^2} \tag{40}$$

Po podstawieniu do równania (4) wzorów (30) i (36) uzyskamy:

$$2(\varepsilon_{q_2} m_2 m_3 + \varepsilon_{z_2} n_2 n_3) = a_{44} \sigma_{q_2} m_2 m_3, \tag{41}$$

stąd:

$$a_{44} = \frac{2(\varepsilon_{q_2} m_2 m_3 + \varepsilon_{z_2} n_2 n_3)}{\sigma_{q_2} m_2 m_3} \tag{42}$$

Dla podanych w tablicy (2) wartości cosinusów kierunkowych wzory (40) i (42) przyjmują postać:

- dla $\varphi = 45^\circ$

$$a_{33} = \frac{\varepsilon_{q_2} + \varepsilon_{r_2} - \frac{\sigma_{q_2}}{\sigma_{x_1}} \cdot \varepsilon_{z_1}}{\sigma_{q_2}} \tag{43}$$

$$a_{44} = \frac{2(\varepsilon_{q_2} - \varepsilon_{r_2})}{\sigma_{q_2}} \tag{44}$$

- dla $\varphi = 30^\circ$

$$a_{33} = \frac{\varepsilon_{q_2} + 2{,}9998\,(\varepsilon_{r_2} - \frac{\sigma_{q_2}}{\sigma_{x_1}} \cdot \varepsilon_{z_1})}{\sigma_{q_2}} \tag{45}$$

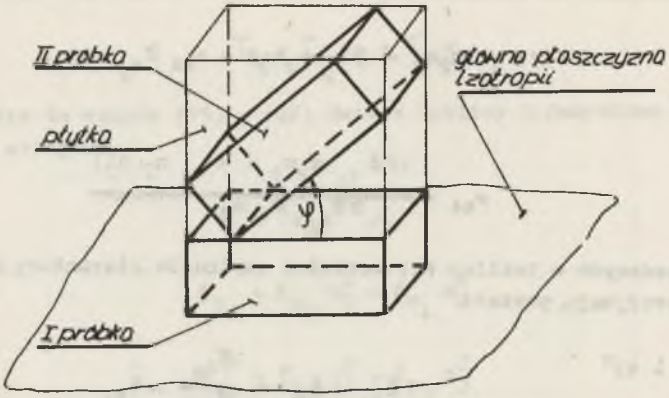
$$a_{44} = \frac{2(\varepsilon_{q_2} - \varepsilon_{r_2})}{\sigma_{q_2}} \tag{46}$$

Równania (1) i (2) po uwzględnieniu na przykład (14) oraz (27),(28), (34), (35) umożliwiają uzyskanie dodatkowych dwóch wzorów mogących posłużyć jako kontrolne (w tym przypadku) dla stałych materiałowych a_{11} i a_{12}.

Ze względów praktycznych stałe materiałowe a_{ij} można zastąpić technicznymi stałymi materiałowymi według związków: (38), (40), (41), (42) i (44) podanych w [7].

5. Zakończenie

1. Z powyższych rozważań wynika, że dla określenia stałych materiałowych materiału transwersalnie izotropowego wystarczy pobrać jedną płytkę prostopadłą większymi powierzchniami do głównej płaszczyzny izotropii i z niej wyciąć dwie odpowiednio zorientowane próbki prostopadłościenne (rys. 2).



Rys. 2. Usytuowanie próbek względem głównej płaszczyzny izotropii (podczas ich wycięcia)

Ze względu na niejednorodność skał, istnienie różnego rodzaju nieciągłości i innych czynników, które powodują znaczne zróżnicowanie wyników, należy wyciąć większą liczbę takich płytek wzajemnie równoległych celem uzyskania bardziej adekwatnych wyników. Ich ilość, w zależności od wielkości rozrzutu wartości mierzonych parametrów, podano w wytycznych I.B.G. [5].

2. Podana metoda ułatwia pobieranie próbek ze względu na dość proste usytuowanie ich względem płaszczyzn izotropii a ponadto wzory określające stałe materiałowe mają stosunkowo prostą i korzystną, ze względu na dokładność wyników, konstrukcję.

3. Zaletą proponowanej metody jest również to, iż bazuje na podstawowej i szeroko rozpowszechnionej próbie jednokierunkowego ściskania, dostarczając jednak większej liczby informacji o własnościach sprężystych materiału niż w klasycznym badaniu próbek okrągłych.

LITERATURA

[1] Gimm W. i inni: Gebirgsmechanik, 1 und 2. Lehrbrief. Bergakademie Freiberg, Fernstudium 1968 und 1970.

[2] Lechnicki S.G.: Anizotropnyje płastinki. Moskwa - Leningrad, 1950.

[3] Ljaw A.: Matematiczeskaja teoria uprugosti anizotropnogo tieła. Gostechnizdat, Moskwa 1950.

[4] Niewiadomski J., Wianecki J.: Teoria sprężystości i plastyczności. Politechnika Śląska, Gliwice, 1958.

[5] Pfor H.: Wytyczne Międzynarodowego Biura Mechaniki Górotworu do określania parametrów geomechanicznych skał i górotworu, Gliwice 1975.

[6] Radzik B., Szuścik W.: Określenie stałych materiałowych materiałów anizotropowych dla obliczania wytężenia węgla i skał otaczających. Referaty. Część I,IV Zimowa Szkoła Mechaniki Górotworu. Wisła - Jawornik, luty 1977.

[7] Szuścik W., Radzik B.: Metoda określania stałych materiałowych materiałów ortotropowych w oparciu o tensometryczne badania próbek prostopadłościennych ściskanych jednokierunkowo. Zeszyty Naukowe, Górnictwo (w tym numerze) Politechnika Śląska, Gliwice 1977.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ МАТЕРИАЛОВ ТРАНЗВЕРСАЛЬНО ИЗОТОПНЫХ, ОПИРАЯСЬ НА ТЕНЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССПЫТАНИЯ ОБРАЗЦОВ ИМЕЮЩИХ ФОРМУ ПАРЕЛЛЕЛНПИПЕДА, СЖИМАЕМЫХ В ОДНОМ НАПРЯЖЕНИИ

Р е з ю м е

В статье приведён метод определения материальных постоянных для материалов транзверсально изотопных при помощи образцов имеющих форму параллелепипеда. Образцы следует взять из целика материала по определённом ориентире относительно главной изотропии нпр. для осадочных пород - относительно поверхности напластвования .

Полученные из измерений во время одноосевого сжимания величины составных состояния деформации и напряжения, пригодятся для определения постоянных материальных по поданных в работе формулам.

A METHOD FOR DETERMINING MATERIALS CONSTANTS FOR TRANSVERSALLY ISOTROPIC MATERIALS DERIVED FROM TESTING OF UNIDIRECTIONALLY COMPRESSED CUBICOIDAL SAMPLES

S u m m a r y

The paper presents a method the determination of materials constants using two cubicoidal samples. The samples are obtained from the coal body according to orientation of main plane of isotropy, e.g. for sedimentary rocks according to the bedding planes. Values of strain components obtained from uniaxial compression will provide material constants according to the formulas presented.