

Wojciech CICHOCKI

UOGÓLNIONY REKURENCYJNY ALGORYTM NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW

Streszczenie. Przedstawiono uogólniony rekurencyjny algorytm najmniejszych kwadratów. Algorytm ten przetwarza zmienny zbiór danych pomiarowych, do którego wprowadzane są nowe grupy danych oraz z którego usuwane są pewne stare grupy danych, przy czym poszczególnym z wymienianym grup danych pomiarowych przyporządkowane są dodatkowo określone macierze współczynników wagowych. Prezentowany algorytm stanowi uogólnienie algorytmu przedstawionego w [2].

1. WSTĘP

Algorytm najmniejszych kwadratów zajmuje w szeroko rozbudowanej teorii estymacji jedną z podstawowych pozycji. Wykorzystywany jest bezpośrednio względnie w postaci zmodyfikowanej w prostych metodach opracowywania obciążonych błędami losowymi wyników pomiarów [6], jak również stanowi bazę bardziej złożonych algorytmów estymacji, takich jak np.: algorytmy identyfikacji parametrów obiektów dynamicznych poddawanych różnego rodzaju zakłóceniom losowym [4], czy też algorytmy estymacji stanu układów dynamicznych w warunkach losowych [5].

W systemach sterowania na bieżąco szczególne znaczenie posiadają wersje rekurencyjne algorytmu, które umożliwiają wyznaczanie bieżących ocen estymowanych parametrów na podstawie ocen wcześniej wyznaczonych odpowiednio skorygowanych w oparciu o bieżące dane pomiarowe. W klasycznej wersji rekurencyjnego algorytmu najmniejszych kwadratów bieżące oceny wyznaczone są w poszczególnych krokach obliczeniowych w oparciu o uaktualniany na bieżąco zbiór danych pomiarowych zawierający wszystkie pomiary począwszy od pomiaru odpowiadającego chwili zainicjowania działania algorytmu aż do pomiaru z chwili bieżącej. Takie działanie algorytmu daje poprawne oceny w sytuacji wykorzystywania modelu dostatecznie dobrze przybliżającego estymowany proces w dowolnej chwili czasu. W rzeczywistych problemach estymacji warunek ten często nie jest spełniony z powodu niestacjonarności zachodzących w estymowanym procesie zjawisk, np.: w problemach identyfikacji obiektów niestacjonarnych o wolnozmiennych parametrach przy wykorzystywaniu modeli obiektów stacjonarnych [1], w problemach estymacji stanu dynamicznych obiektów niestacjonarnych przy wykorzystywaniu modeli stacjonarnych względnie przy wykorzystywaniu modeli niestacjonarnych, w których typ niestacjonarności nie w pełni odpowiada typowi niestacjonarności obiektu [5]. W przypadkach tych zachodzi konieczność zmniejszania wpływu

starych danych pomiarowych na wartości bieżących ocen. Dokonać tego można przez przypisywanie coraz starszym pomiarom coraz mniejszych wag, albo przez ciągle eliminowanie ze zbioru pomiarów pomiarów najstarszych, albo też przez jednoczesne przypisywanie pomiarom coraz starszym coraz to mniejszych wag oraz jednoczesne usuwanie ze zbioru pomiarów pomiarów najstarszych.

Również w przypadku stwierdzenia, że wśród pomiarów, na podstawie których już została wyznaczona bieżąca ocena, znajdują się pomiary obciążone błędami grubymi, zachodzi konieczność usunięcia tych pomiarów w ogólnym przypadku z dowolnej pozycji zbioru i ewentualne wprowadzenie w ich miejsce odpowiednich pomiarów zastępczych oraz ponowne wyznaczenie na podstawie tak uaktualnionego zbioru pomiarów nowej wartości bieżącej oceny. W przypadku skorelowanych błędów pomiarów zachodzi konieczność w rekurencyjnym algorytmie najmniejszych kwadratów wprowadzania i usuwania w jednym kroku obliczeniowym nie pojedynczych pomiarów, lecz grupy skorelowanych pomiarów z przyporządkowanymi macierzami współczynników wagowych równymi odwrotną macierzą kowariancji skorelowanych błędów pomiarów.

Znany uogólniony rekurencyjny algorytm najmniejszych kwadratów [7] umożliwia wyznaczanie optymalnych ocen dla dużej klasy zadań estymacji, w przypadku gdy do uaktualnianego zbioru pomiarów następuje tylko wprowadzanie nowych grup pomiarów, z których każdej jest przyporządkowana dodatnio określona macierz współczynników wagowych. Poniżej w punkcie 2 przedstawiono uogólniony algorytm najmniejszych kwadratów, natomiast w punkcie 3 przedstawiono rekurencyjną wersję tego algorytmu, dla przypadku gdy w poszczególnych krokach obliczeniowych do uaktualnianego zbioru pomiarów są wprowadzane grupy nowych pomiarów oraz jednocześnie są z niego usuwane dowolnie wybierane grupy starych pomiarów, z których każdej jest przyporządkowana dodatnio określona macierz współczynników wagowych. Jedną z charakterystycznych cech przedstawionego rekurencyjnego algorytmu jest jego postać stanowiąca uogólnienie znanej rekurencyjnej postaci algorytmu w wersji klasycznej odznaczająca się częste w porównaniu z wersją nierekurencyjną szeregiem pozytywnych właściwości natury numerycznej. W punkcie 4 omówiono dla przedstawionego w punkcie 3 algorytmu problem doboru warunków początkowych inicjujących jego działania oraz problem eliminacji wpływu tych warunków na wartości wyznaczanych przez ten algorytm ocen.

2. UOGÓLNIONY ALGORYTM NAJMNIJSZYCH KWADRATÓW (UANK)

Rozpatrywane jest zadanie estymacji, dla którego równanie wiążące pomiary można przedstawić w postaci następującego równania pomiarowego ("measurement equations"):

$$y(t) = \underline{u}^T(t)\underline{b} + e(t) \quad (2.1)$$

gdzie: $\underline{b} = [b_0, b_1, \dots, b_1]^T$ - wektor estymowanych wielkości, $\underline{u}^T(t) = [u_0(t), u_1(t), \dots, u_1(t)]$ - wektor wielkości wejściowych równania pomiarowego, $y(t)$ - wielkość wyjściowa równania pomiarowego, $e(t)$ - błąd pomiaru stanowiący różnicę między wartością wyznaczoną na podstawie równania $\underline{u}^T(t)\underline{b}$ a wartością wielkości wyjściowej równania pomiarowego $y(t)$.

Zakłada się, że w dyskretnych chwilach t_1 dostępne są dane pomiarowe w postaci wektorów blokowych \underline{m}_1

$$\underline{m}_1^T = \left[\begin{array}{c|c} \underline{u}_1^T & y_1 \end{array} \right] \quad (2.2)$$

gdzie: $\underline{u}_1^T = [u_{01}, u_{11}, \dots, u_{11}] = [u_0(t_1), u_1(t_1), \dots, u_1(t_1)]$, $y_1 = y(t_1)$. Wektor \underline{m}_1 nazywany będzie dalej i-tym pomiarem, wektor \underline{u}_1 i-tym pomiarem wielkości wejściowych, y_1 i-tym pomiarem wielkości wyjściowej. Równanie pomiarowe (2.1) dla i-tego pomiaru \underline{m}_1 przyjmuje postać:

$$y_1 = \underline{u}_1^T \underline{b} + e_1, \quad (2.3)$$

gdzie: $e_1 = e(t_1)$ nazywane będzie dalej błędem i-tego pomiaru.

Dalej zakłada się, że poszczególne pomiary \underline{m}_1 występują w uporządkowanych grupach reprezentowanych macierzami \underline{M}_j

$$\underline{M}_j = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \underline{m}_{j_1} & \underline{m}_{j_2} & \dots & \underline{m}_{j_{n_j}} \end{array} \right]^T, \quad (2.4)$$

gdzie: n_j jest liczbą pomiarów j-tej grupy, którym zostały jednoznacznie przyporządkowane symetryczne dodatnio określone macierze współczynników wagowych

$$\underline{W}_j = \left[\begin{array}{cc} w_{j_1, j_1} & \dots & w_{j_1, j_{n_j}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{j_{n_j}, j_1} & \dots & w_{j_{n_j}, j_{n_j}} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n_j \\ i = 1, 2, \dots, n_j \end{array} \quad (2.5)$$

Macierze \underline{M}_j ze względu na (2.2) można przedstawić w postaci blokowej

$$\underline{M}_j = \left[\begin{array}{c|c} \underline{U}_j & \underline{Y}_j \end{array} \right], \quad (2.6)$$

gdzie:

$$\underline{U}_j = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \underline{u}_{j_1} & \underline{u}_{j_2} & \dots & \underline{u}_{j_{n_j}} \end{array} \right]^T \quad (2.7)$$

$$\underline{Y}_j = \left[\begin{array}{c} y_{j_1} \\ y_{j_2} \\ \dots \\ y_{j_{n_j}} \end{array} \right]^T$$

Równanie (2.3) dla j -tej grupy pomiarów \underline{M}_j przyjmuje postać:

$$\underline{z}_j = \underline{U}_j \underline{b} + \underline{e}_j \quad (2.8)$$

Równanie to może być traktowane jako ogólne równanie pomiarowe, do postaci którego można sprowadzić zależności wiążące pomiary dla dużej klasy zadań estymacji [7].

Dalej zakłada się, że w kolejnych krokach obliczeniowych $k = 1, 2, \dots$ w celu wyznaczenia oceny wektora \underline{b} tworzone są różnoelementowe podzbiory indeksów grup pomiarów $I(k)$ określające zbiory macierzy

$$\mu_{I(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \underline{M}_j : j \in I(k) \right\} \quad (2.9)$$

oraz przyporządkowane zbiorom $\mu_{I(k)}$ zbiory macierzy współczynników wagowych

$$\omega_{I(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \underline{W}_j : j \in I(k) \right\}. \quad (2.10)$$

Następnie zakłada się, że w poszczególnych krokach obliczeniowych dla ustalonych podzbiorów $I(k)$ wyznaczone są oceny $\hat{\underline{b}}_{I(k)}$ wektora \underline{b} według algorytmu najmniejszych ważonych kwadratów [4] w oparciu o grupy pomiarów i przyporządkowane im macierze współczynników wagowych należące odpowiednio do $\mu_{I(k)}$ oraz $\omega_{I(k)}$. Ocena minimalizująca w k -tym kroku obliczeniowym ważoną sumę kwadratów błędów

$$J_{I(k)}(\underline{b}) = \sum_{j \in I(k)} (\underline{y}_j - \underline{U}_j \underline{b})^T \underline{W}_j (\underline{y}_j - \underline{U}_j \underline{b}) \quad (2.11)$$

przy założeniu, że

$$\det \left(\sum_{j \in I(k)} \underline{U}_j^T \underline{W}_j \underline{U}_j \right) \neq 0 \quad (2.12)$$

dana jest wyrażeniem

$$\hat{\underline{b}}_{I(k)} = \underline{P}_{I(k)} \underline{z}_{I(k)}. \quad (2.13a)$$

gdzie:

$$\underline{P}_{I(k)} = \left(\sum_{j \in I(k)} \underline{U}_j^T \underline{W}_j \underline{U}_j \right)^{-1}, \quad (2.13b)$$

$$\underline{z}_{I(k)} = \sum_{j \in I(k)} \underline{U}_j^T \underline{W}_j \underline{y}_j. \quad (2.13c)$$

3. UOGÓLNIONY REKURENCYJNY ALGORYTM NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW (URANK)

Zakładamy, że w $k+1$ -szym kroku obliczeniowym w celu wyznaczenia oceny wektora \underline{b} utworzono przez usaktualnienie zbioru $I(k)$ zbiór indeksów $I(k+1)$

$$I(k+1) = [I(k) \setminus I_X(k+1)] \cup I_S(k+1), \quad (3.1)$$

gdzie: $I_X(k+1)$, $I_S(k+1)$ są różnoelementowymi zbiorami indeksów, odpowiednio: grup pomiarów usuwanych ze zmiennego zbioru oraz grup pomiarów wprowadzanych do zmiennego zbioru pomiarów w $k+1$ -szym kroku obliczeniowym, spełniającymi warunki:

$$I_X(k+1) \subset I(k), \quad (3.2)$$

$$I_S(k+1) \cap I(k) = \emptyset. \quad (3.3)$$

Warunek (3.2) oznacza, że usuwane ze zbioru grupy pomiarów muszą oczywiście znajdować się w tym zbiorze, natomiast warunek (3.3) oznacza, że grupy pomiarów wprowadzane do zbioru nie mogą posiadać indeksów identycznych z grupami już znajdującymi się w zbiorze. Zbiorowi indeksów $I(k+1)$ zgodnie z (2.9) oraz (2.10) odpowiadają zbiory:

$$\mu_{I(k+1)} = \left\{ \underline{\mu}_j : j \in I(k+1) \right\} \quad (3.4)$$

$$\omega_{I(k+1)} = \left\{ \underline{\omega}_j : j \in I(k+1) \right\} \quad (3.5)$$

Ocena $\hat{\underline{b}}_{I(k+1)}$ wyznaczona na podstawie $\mu_{I(k+1)}$, $\omega_{I(k+1)}$ przy założeniu, że

$$\det \sum_{j \in I(k+1)} \underline{u}_{j-j}^T \underline{u}_j \neq 0 \quad (3.6)$$

przez analogię do (2.13) dana jest wyrażeniem

$$\hat{\underline{b}}_{I(k+1)} = \underline{P}_{I(k+1)} \underline{z}_{I(k+1)}, \quad (3.7a)$$

gdzie:

$$\underline{P}_{I(k+1)} = \left(\sum_{j \in I(k+1)} \underline{u}_{j-j}^T \underline{u}_j \right)^{-1}, \quad (3.7b)$$

$$\underline{z}_{I(k+1)} = \sum_{j \in I(k+1)} \frac{\underline{u}_{j-j}^T \underline{y}_j}{\underline{u}_{j-j}^T \underline{u}_j}. \quad (3.7c)$$

Poniżej zostaną wyprowadzone zależności umożliwiające rekurencyjne wyznaczenie oceny $\underline{b}_{I(k+1)}$ oraz jako wielkości pomocniczej macierzy $\underline{P}_{I(k+1)}$ na podstawie znanych oceny $\underline{b}_{I(k)}$ i macierzy $\underline{P}_{I(k+1)}$ oraz na podstawie danych określających zmianę zbiorów $\underline{\mu}_{I(k+1)}$, $\omega_{I(k+1)}$ w porównaniu ze zbiorami $\underline{\mu}_{I(k)}$ oraz $\omega_{I(k)}$.

Wektor $\underline{z}_{I(k)}$ oraz macierz $\underline{P}_{I(k)}$ występujące w zależnościach (2.13) ze względu na warunek

$$I_X(k+1) \subset I(k)$$

można przedstawić w postaci:

$$\underline{z}_{I(k)} = \underline{z}_{I(k)} \setminus I_X(k+1) + \underline{z}_{I_X(k+1)}, \quad (3.8a)$$

$$\underline{P}_{I(k)}^{-1} = \underline{P}_{I(k)}^{-1} \setminus I_X(k+1) + \underline{P}_{I_X(k+1)}^{-1}. \quad (3.8b)$$

Natomiast wektor $\underline{z}_{I(k+1)}$ oraz macierz $\underline{P}_{I(k+1)}$ występujące w zależnościach (3.7) ze względu na warunek

$$I_S(k+1) \subset I(k+1)$$

można przedstawić w postaci:

$$\underline{z}_{I(k+1)} = \underline{z}_{I(k+1)} \setminus I_S(k+1) + \underline{z}_{I_S(k+1)}, \quad (3.9a)$$

$$\underline{P}_{I(k+1)}^{-1} = \underline{P}_{I(k+1)}^{-1} \setminus I_S(k+1) + \underline{P}_{I_S(k+1)}^{-1}. \quad (3.9b)$$

Z (3.1) oraz z warunków (3.2), (3.3) wynika, że

$$I(k+1) \setminus I_S(k+1) = I(k) \setminus I_X(k+1). \quad (3.10)$$

Przy uwzględnieniu (3.10) z układu równań (3.8a) i (3.9a) oraz z układu równań (3.8b) i (3.9b), otrzymujemy:

$$\underline{z}_{I(k+1)} = \underline{z}_{I(k)} + \underline{z}_{I_S(k+1)} - \underline{z}_{I_X(k+1)}, \quad (3.11a)$$

$$\underline{P}_{I(k+1)}^{-1} = \underline{P}_{I(k)}^{-1} + \underline{P}_{I_S(k+1)}^{-1} - \underline{P}_{I_X(k+1)}^{-1}. \quad (3.11b)$$

Po prawych stronach w zależnościach (3.11aib) oprócz składników zawierających grupy pomiarów należące wyłącznie do zbioru $\underline{\mu}_{I(k)}$ oraz macierze współczynników wagowych należące wyłącznie do zbioru $\omega_{I(k)}$ występują

składniki zawierające wyłącznie grupy pomiarów i macierze współczynników wagowych wymieniane w tych zbiorach w $k+1$ -szym kroku obliczeniowym.

Dalej oznaczamy przez $\tilde{I}(k+1)$ zbiór indeksów grup pomiarów wymienianych w zbiorze pomiarów w $k+1$ -szym kroku obliczeniowym

$$\tilde{I}(k+1) = I_g(k+1) \cup I_r(k+1) \quad (3.12)$$

oraz definiujemy:

- blokową macierz $\underline{M}_{\tilde{I}}(k+1)$ grup pomiarów wymienianych w zbiorze pomiarów w $k+1$ -szym kroku obliczeniowym

$$\underline{M}_{\tilde{I}}(k+1) = \begin{bmatrix} \vdots \\ \underline{M}_j \\ \vdots \end{bmatrix}_{j \in \tilde{I}(k+1)}, \quad (3.13)$$

której ze względu na (2.6) oraz (2.7) odpowiadają: macierz blokowa $\underline{U}_{\tilde{I}}(k+1)$ oraz wektor blokowy $\underline{Y}_{\tilde{I}}(k+1)$ o postaci:

$$\underline{U}_{\tilde{I}}(k+1) = \begin{bmatrix} \vdots \\ \underline{U}_j \\ \vdots \end{bmatrix}_{j \in \tilde{I}(k+1)}, \quad \underline{Y}_{\tilde{I}}(k+1) = \begin{bmatrix} \vdots \\ \underline{Y}_j \\ \vdots \end{bmatrix}_{j \in \tilde{I}(k+1)} \quad (3.14)$$

- ściśle przyporządkowaną macierzy $\underline{M}_{\tilde{I}}(k+1)$ blokowo diagonalną macierz $\underline{W}_{\tilde{I}}(k+1)$ współczynników wagowych pomiarów wymienianych w $k+1$ -szym kroku obliczeniowym

$$\underline{W}_{\tilde{I}}(k+1) = \begin{bmatrix} \ddots & & & \underline{0} \\ & \boxed{\underline{W}_j} & & \\ & & \ddots & \\ \underline{0} & & & \ddots \end{bmatrix}_{j \in \tilde{I}(k+1)}, \quad (3.15)$$

w której jest zachowana istniejąca w macierzy $\underline{M}_{\tilde{I}}(k+1)$ kolejność występowania poszczególnych bloków,

- ściśle przyporządkowaną macierzy $\underline{M}_{\tilde{I}}(k+1)$ blokowo diagonalną macierz $\underline{E}_{\tilde{I}}(k+1)$ kierunków wymiany pomiarów w $k+1$ -szym kroku obliczeniowym:

$$\underline{E}_{\tilde{I}}(k+1) = \begin{bmatrix} \ddots & & & \underline{0} \\ & \boxed{\underline{E}_j} & & \\ & & \ddots & \\ \underline{0} & & & \ddots \end{bmatrix}_{j \in \tilde{I}(k+1)}, \quad \text{gdzie: } \underline{E}_j = \begin{cases} \underline{I}_{n_j}, & \text{dla } j \in I_g(k+1) \\ -\underline{I}_{n_j}, & \text{dla } j \in I_r(k+1) \end{cases} \quad (3.16)$$

w której jest również zachowana istniejąca w macierzy $\underline{M}_I(k+1)$ kolejność występowania poszczególnych bloków.

Zależności (3.11) po uwzględnieniu oznaczeń (3.12 - 3.16) można przedstawić w postaci:

$$\underline{z}_I(k+1) = \underline{z}_I(k) + \underline{U}_I^T(k+1) \underline{F}_I(k+1) \underline{y}_I(k+1), \quad (3.17a)$$

$$\underline{P}_I^{-1}(k+1) = \underline{P}_I^{-1}(k) + \underline{U}_I^T(k+1) \underline{F}_I(k+1) \underline{U}_I(k+1), \quad (3.17b)$$

gdzie macierz

$$\underline{F}_I(k+1) = \underline{W}_I(k+1) \underline{E}_I(k+1) \quad (3.18)$$

jest blokowo diagonalną macierzą względnych współczynników wagowych pomiarów wymienianych w $k+1$ -szym kroku obliczeniowym. Na podstawie (3.17b) po zastosowaniu przekształcenia tożsamościowego [4]

$$(\underline{A}^{-1} + \underline{BC}^{-1}\underline{D})^{-1} = \underline{A} [\underline{I}_A - \underline{B}' \underline{D} \underline{A} \underline{B} + \underline{C}]^{-1} \underline{D} \underline{A},$$

gdzie: $\underline{A}, \underline{C}, (\underline{A}^{-1} + \underline{BC}^{-1}\underline{D})$ są macierzami kwadratowymi nieosobliwymi, otrzymujemy:

$$\underline{P}_I^{-1}(k+1) = \underline{P}_I^{-1}(k) \left[\underline{I}_{1+1} - \underline{U}_I^T(k+1) (\underline{U}_I(k+1) \underline{P}_I^{-1}(k) \underline{U}_I^T(k+1) + \underline{F}_I(k+1))^{-1} \underline{U}_I(k+1) \underline{P}_I^{-1}(k) \right] \quad (3.19)$$

Uwzględniając w (3.7a) zależności (3.17a) i (3.19) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \hat{\underline{b}}_I(k+1) &= \left[\underline{P}_I^{-1}(k) \underline{P}_I^{-1}(k) \underline{U}_I^T(k+1) (\underline{U}_I(k+1) \underline{P}_I^{-1}(k) \underline{U}_I^T(k+1) + \underline{F}_I(k+1))^{-1} \underline{U}_I(k+1) \underline{P}_I^{-1}(k) \right] \cdot \\ &\cdot \left[\underline{z}_I(k) + \underline{U}_I^T(k+1) \underline{F}_I(k+1) \underline{y}_I(k+1) \right]. \end{aligned}$$

Stąd w wyniku kolejnych przekształceń z uwzględnieniem zależności (2.13a) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{b}}_I(k+1) &= \hat{\underline{b}}_I(k) + \underline{P}_I^{-1}(k) \underline{U}_I^T(k+1) (\underline{U}_I(k+1) \underline{P}_I^{-1}(k) \underline{U}_I^T(k+1) + \underline{F}_I(k+1))^{-1} \cdot \\ &\cdot (\underline{y}_I(k+1) - \underline{U}_I(k+1) \hat{\underline{b}}_I(k)) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Otrzymane zależności (3.19), (3.20) umożliwiają rekurencyjne wyznaczenie wartości wektora $\hat{\underline{b}}_I(k+1)$ oraz jako wielkości pomocniczej wartości macierzy $\underline{P}_I(k+1)$ na postawie:

- znanych wartości wektora $\hat{b}_{I(k)}$ oraz macierzy $P_{I(k)}$ wyznaczonych w k -tym kroku obliczeniowym,
- znanych macierzy $M_{\tilde{Y}(k+1)}$, $W_{\tilde{Y}(k+1)}$, $E_{\tilde{Y}(k+1)}$ określających wymianę grup pomiarów łącznie z przyporządkowanymi im macierzami współczynników wagowych w $k+1$ -szym kroku obliczeniowym.

Zależności (3.19) oraz (3.20) można przedstawić w postaci:

$$\hat{b}_{I(k+1)} = \hat{b}_{I(k)} + G_{I(k+1)}' Y_{\tilde{Y}(k+1)} - U_{\tilde{Y}(k+1)} \hat{b}_{I(k)}, \quad (3.21a)$$

$$P_{I(k+1)} = (I_{l+1} - G_{I(k+1)} U_{\tilde{Y}(k+1)}) P_{I(k)}, \quad (3.21b)$$

gdzie:

$$G_{I(k+1)} = P_{I(k)} U_{\tilde{Y}(k+1)}' (U_{\tilde{Y}(k+1)} P_{I(k)} U_{\tilde{Y}(k+1)}' + E_{\tilde{Y}(k+1)}^{-1})^{-1} \quad (3.21c)$$

jest macierzą współczynników korekcyjnych o wymiarach $l \times (\sum_{j \in I(k+1)} n_j)$.

Występującą w (3.21a) macierz $E_{\tilde{Y}(k+1)}^{-1}$ można, korzystając z (3.18), przedstawić w postaci:

$$E_{\tilde{Y}(k+1)}^{-1} = W_{\tilde{Y}(k+1)}^{-1} E_{\tilde{I}(k+1)}, \quad (3.22)$$

gdzie:

$$W_{\tilde{Y}(k+1)}^{-1} = \begin{bmatrix} \cdot & & & \underline{0} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & \boxed{W_{\tilde{I}(k+1)}^{-1}} & \\ \underline{0} & & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{j \in \tilde{I}(k+1)}$$

Warunkiem koniecznym istnienia w $k+1$ -szym kroku obliczeniowym jednoznacznie określonych zależności (3.21) wartości $\hat{b}_{I(k+1)}$ oraz $P_{I(k+1)}$ jest by

$$h(k+1) = h(k) + \text{Tr} E_{\tilde{I}(k+1)}^{-1} \geq 1+1, \quad (3.23)$$

gdzie $h(k)$ jest horyzontem obserwacji zbioru pomiarów $U_{\tilde{I}(k+1)}$ określonym jako ilość pomiarów \underline{m}_1 zawartych w tym zbiorze. Na podstawie (2.4) oraz (2.9)

$$h(k) = \sum_{j \in I(k)} n_j \quad (3.24)$$

Warunek (3.23) oznacza, że w każdym kroku obliczeniowym w zmiennym zbiorze pomiarów nie może być mniej pomiarów od ilości nieznanymi parametrów modelu.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia jednoznacznie określonych zależności (3.21) wartości $\hat{b}_{I(k+1)}$ oraz $P_{I(k+1)}$ jest by

$$\det(\underline{U}_{\tilde{I}(k+1)} P_{I(k+1)} \underline{U}_{\tilde{I}(k+1)}^T + \underline{F}_{\tilde{I}(k+1)}^{-1}) \neq 0. \quad (3.25)$$

Przykłady szczególnych przypadków zależności (3.21)

1) W każdym kroku obliczeniowym do zbioru pomiarów są tylko wprowadzane kolejne grupy pomiarów, którym przyporządkowane są macierze współczynników wagowych.

W przypadku tym wielkości określające zbiór pomiarów oraz jego zmianę są postaci:

$$I_{\tilde{I}}(k+1) = \emptyset, \quad \tilde{I}(k+1) = I_{\tilde{I}}(k+1)$$

$$\underline{U}_{\tilde{I}(k+1)} = \underline{U}_{I_{\tilde{I}}(k+1)}, \quad \underline{Y}_{\tilde{I}(k+1)} = \underline{Y}_{I_{\tilde{I}}(k+1)}$$

$$\underline{E}_{\tilde{I}(k+1)} = \underline{I}, \quad \underline{F}_{\tilde{I}(k+1)} = \underline{W}_{I_{\tilde{I}}(k+1)}$$

Stąd zależności (3.21) przyjmują postać znanej [7] klasycznej wersji uogólnionego algorytmu najmniejszych kwadratów:

$$\hat{b}_{I(k+1)} = \hat{b}_{I(k)} + \underline{G}_{I(k+1)} (\underline{Y}_{I_{\tilde{I}}(k+1)} - \underline{U}_{I_{\tilde{I}}(k+1)} \hat{b}_{I(k)}),$$

$$P_{I(k+1)} = (\underline{I}_{l+1} - \underline{G}_{I(k+1)} \underline{U}_{I_{\tilde{I}}(k+1)}) P_{I(k)},$$

gdzie:

$$\underline{G}_{I(k+1)} = P_{I(k)} \underline{U}_{I_{\tilde{I}}(k+1)}^T (\underline{U}_{I_{\tilde{I}}(k+1)} P_{I(k)} \underline{U}_{I_{\tilde{I}}(k+1)}^T + \underline{W}_{I_{\tilde{I}}(k+1)}^{-1})^{-1}.$$

2) W każdym kroku obliczeniowym do zbioru pomiarów wprowadzany jest tylko jeden pomiar bieżący, któremu przyporządkowany jest współczynnik wagowy. W przypadku tym wielkości określające zbiór pomiarów oraz jego zmiany są postaci:

$$I(k) = \{1, 2, \dots, k\} \triangleq k$$

$$I_{\tilde{I}}(k+1) = \emptyset$$

$$\tilde{I}(k+1) = I_{\tilde{I}}(k+1) = \{k+1\} \triangleq k+1$$

$$\underline{U}_{\tilde{I}(k+1)} = \underline{u}_{k+1}^T, \quad \underline{Y}_{\tilde{I}(k+1)} = y_{k+1}$$

$$\underline{E}_{\tilde{I}(k+1)} = 1, \quad \underline{F}_{\tilde{I}(k+1)} = w_{k+1}^{-1},$$

(3.26)

gdzie: w_{k+1} jest współczynnikiem wagowym przyporządkowanym pomiarowi y_{k+1} wprowadzanemu do zbioru pomiarów w $k+1$ -szym kroku obliczeniowym. Uwzględniając (3.26) w zależnościach (3.21), otrzymujemy:

$$\hat{b}_{k+1} = \hat{b}_k + \varepsilon_{k+1}(y_{k+1} - \underline{u}_{k+1}^T \hat{b}_k),$$

$$\underline{P}_{k+1} = (\underline{I}_{1+1} - \varepsilon_{k+1} \underline{u}_{k+1}^T) \underline{P}_k,$$

gdzie: ε_{k+1} jest wektorem kolumnowym określonym zależnością

$$\varepsilon_{k+1} = \underline{P}_k \underline{u}_{k+1} (\underline{u}_{k+1}^T \underline{P}_k \underline{u}_{k+1} + \frac{1}{w_{k+1}})^{-1}.$$

Otrzymane zależności posiadają postać znanych zależności klasycznej wersji rekurencyjnego algorytmu najmniejszych ważonych kwadratów [4].

Interpretacja statystyczna zależności (3.21):

Zakładamy, że $\{y_j : j \in I(k)\}$ jest zbiorem zmiennych losowych spełniających dla każdego $j \in I(k)$ równanie pomiarowe (2.8)

$$y_j = \underline{U}_j \underline{b} + e_j,$$

gdzie: $\underline{U}_j \underline{b}$ jest wektorowym liniowym równaniem regresji, $\{e_j : j \in I(k)\}$ jest zbiorem niezależnych zmiennych losowych o zerowej wartości średniej

$$E \{e_j\} = 0$$

oraz macierzy kowariancji

$$E \{e_j e_j^T\} = \underline{R}_j,$$

gdzie: \underline{R}_j macierz symetryczna dodatnio określona. W przypadku tym dla $\underline{y}_j = \underline{R}_j^{-1}$ zależności (2.13) określają liniowy efektywny estymator wektora \underline{b} o macierzy kowariancji $\underline{P}_{I(k)}$. W wersji rekurencyjnej algorytmu zależność (3.21a) przedstawia związek estymaty wektora \underline{b} w $k+1$ -szym kroku z estymatą w k -tym kroku oraz zmiennymi losowymi $y_{I(k+1)}$. Zależności (3.21b,c) określają algorytm rekurencyjnego wyznaczania macierzy kowariancji estymaty w $k+1$ -szym kroku na podstawie znanej macierzy kowariancji estymaty w k -tym kroku oraz znanej macierzy $\underline{U}_{I(k+1)}$. Występująca w tych zależnościach macierz $\underline{F}_{I(k+1)}^{-1}$ posiada postać:

$$\underline{F}_{I(k+1)}^{-1} = \underline{R}_{I(k+1)} \underline{P}_{I(k+1)}.$$

gdzie:

$$\underline{R}_{I(k+1)} = \begin{bmatrix} \ddots & & & \underline{0} \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{\underline{R}_j} & \\ \underline{0} & & & \ddots \end{bmatrix} \quad j \in \bar{I}(k+1)$$

4. PROBLEM WARUNKÓW POCZĄTKOWYCH

Przedstawiony algorytm (3.21) wymaga znajomości warunków początkowych $\hat{\underline{b}}_I(0)$, $\underline{P}_I(0)$ umożliwiających inicjację jego działania. Warunki te mogą być:

- (a) wyznaczone w zerowym kroku obliczeniowym za pomocą nierekurencyjnego algorytmu najmniejszych kwadratów w oparciu o grupę pomiarów zawierającą $1+l$ pomiarów o liniowo niezależnych pomiarach wielkości wejściowych oraz stanowiącą część pomiarów znajdujących się w zbiorze pomiarów dla pierwszego kroku obliczeniowego,
- (b) przyjęte na podstawie wstępnych oszacowań, tj.: $\hat{\underline{b}}_I(0) = \underline{b}'$, gdzie \underline{b}' znana a priori ocena wektora \underline{b} , natomiast $\underline{P}_I(0) = \underline{P}'$, gdzie \underline{P}' znana a priori macierz kowariancji oceny \underline{b}' ,
- (c) przyjęte, w przypadku nie posiadania żadnej informacji o rzeczywistej wartości wektora \underline{b} , w postaci: $\hat{\underline{b}}_I(0)$ - wektor o dowolnej wartości, $\underline{P}_I(0)$ - macierz diagonalna o bardzo dużych (teoretycznie nieskończenie wielkich) elementach na przekątnej odzwierciedlających, z powodu braku związku między przyjętym wektorem $\hat{\underline{b}}_I(0)$ a rzeczywistą wartością wektora \underline{b} , nieskończenie wielkie wariancje błędów poszczególnych składowych wektora $\hat{\underline{b}}_I(0)$.

W [3] wykazano, dla deterministycznej interpretacji rekurencyjnego algorytmu najmniejszych kwadratów, że przyjęcie inicjujących działanie algorytmu warunków początkowych $\hat{\underline{b}}_I(0)$, $\underline{P}_I(0)$ ma taki sam wpływ na wyniki dalszej estymacji jak wprowadzenie do zbioru pomiarów dodatkowych $1+l$ pomiarów fikcyjnych. Poniżej twierdzenie to zostanie przedstawione dla statystycznej interpretacji algorytmu (3.21).

TWIERDZENIE: Przyjęcie w URANK (3.21) warunków początkowych $\hat{\underline{b}}_I(0)$ i $\underline{P}_I(0)$, gdzie: $\hat{\underline{b}}_I(0)$ jest oceną a priori wektora \underline{b} a $\underline{P}_I(0)$ jest macierzą kowariancji tej oceny, ma taki sam wpływ na wyniki dalszej estymacji jak wprowadzenie do zbioru pomiarów grupy $1+l$ pomiarów fikcyjnych o postaci:

$$\underline{u}_r = \begin{bmatrix} \underline{u}_r \\ \underline{u}_r \hat{\underline{b}}_I(0) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

spełniającej warunek

$$\det \underline{U}_f \neq 0, \quad (4.2)$$

przy czym warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby wprowadzone pomiary nie były obciążone błędami systematycznymi jest, by ocena $\hat{\underline{b}}_{I(0)}$ była oceną nieobciążoną, t.j. aby

$$E\left\{\hat{\underline{b}}_{I(0)}\right\} = \underline{b}. \quad (4.3)$$

Dowód: W celu wykazania pierwszej części twierdzenia wystarczy wykazać, że ocena $\hat{\underline{b}}_f$ wyznaczona w oparciu o pomiary (4.1) według (2.13) dla $\underline{W}_f = \underline{R}_f^{-1}$, gdzie \underline{R}_f jest macierzą kowariancji pomiarów \underline{Y}_f , równa jest ocenie $\hat{\underline{b}}_{I(0)}$ oraz macierz kowariancji \underline{P}_f równa jest macierzy $\underline{P}_{I(0)}$. Ocena $\hat{\underline{b}}_f$ wyznaczona według (2.13) dana jest zależnością:

$$\hat{\underline{b}}_f = \underline{P}_f \underline{U}_f^T \underline{R}_f^{-1} \underline{Y}_f, \quad (4.4)$$

gdzie:

$$\underline{P}_f = (\underline{U}_f^T \underline{R}_f^{-1} \underline{U}_f)^{-1}. \quad (4.5)$$

Uwzględniając w (4.4), że $\underline{Y}_f = \underline{U}_f \hat{\underline{b}}_{I(0)}$, otrzymujemy $\hat{\underline{b}}_f = \hat{\underline{b}}_{I(0)}$. Uwzględniając w (4.5), że $\underline{R}_f = \underline{U}_f \underline{P}_{I(0)} \underline{U}_f^T$ oraz założenie (4.2), otrzymujemy $\underline{P}_f = \underline{P}_{I(0)}$.

W celu wykazania drugiej części twierdzenia posłużymy się równaniem pomiarowym (2,8). Równanie to dla grupy pomiarów fikcyjnych \underline{U}_f przyjmuje postać

$$\underline{Y}_f = \underline{U}_f \underline{b} + \underline{e}_f.$$

Uwzględniając, że $\underline{Y}_f = \underline{U}_f \hat{\underline{b}}_{I(0)}$, otrzymujemy:

$$E\left\{\underline{e}_f\right\} = \underline{U}_f \left(E\left\{\hat{\underline{b}}_{I(0)}\right\} - \underline{b}\right).$$

Stąd przy założeniu warunku (4.2) mamy

$$E\left\{\underline{e}_f\right\} = \underline{0} \iff E\left\{\hat{\underline{b}}_{I(0)}\right\} = \underline{b}$$

o.n.w.

Z przytoczonego twierdzenia wynika, że w przypadku (c), gdy ze względu na dokładność obliczeń numerycznych przyjmujemy elementy macierzy $\underline{P}_{I(0)}$ o wartościach odpowiednio ograniczonych [8], mamy do czynienia z wprowadzeniem do zbioru pomiarów grupy pomiarów fikcyjnych obciążonych błędami

systematycznymi. Istnienie tych pomiarów w zbiorze pomiarów wpływa na obciążoność ocen wyznaczanych w poszczególnych krokach obliczeniowych, przy czym wpływ ten jest tym większy, im mniejszy jest horyzont obserwacji zbioru pomiarów. Stąd szczególnie przy małych wartościach horyzontu obserwacji należy po zainicjowaniu działania algorytmu dokonać eliminacji odpowiadających przyjętym warunkom początkowym pomiarów fikcyjnych. Eliminacji tej można dokonać przez wprowadzenie do wyznaczonych ocen odpowiednich poprawek [3], związanych z eliminacją ze zbioru pomiarów poszczególnych pomiarów fikcyjnych.

Również przy stosowaniu warunków początkowych jak w punktach (a), (b), gdy występują błędy modelu spowodowane niestacjonarnością zachodzących w procesie zjawisk, musimy łącznie z eliminowaniem wpływu pomiarów najstarszych dokonać eliminacji wpływu warunków początkowych, i tak:

- przy zastosowaniu warunków początkowych $\hat{b}_{I(0)}$ i $P_{I(0)}$ jak w punkcie (a) eliminacji wpływu tych warunków na wyniki dalszej estymacji można dokonać przez włączenie do grupy eliminowanych pomiarów również tych pomiarów, w oparciu o które wymienione warunki początkowe zostały wyznaczone w zerowym kroku obliczeniowym,
- przy zastosowaniu warunków początkowych $\hat{b}_{I(0)}$, $P_{I(0)}$ jak w punkcie (b) eliminacji ich wpływu na wyniki dalszej estymacji można dokonać przez wprowadzenie odpowiednich poprawek [3], analogicznie jak w przypadku (c), związanych z wyeliminowaniem odpowiednich pomiarów fikcyjnych.

5. UWAGI KOŃCOWE

Zależności (3.21) stanowią oryginalny URANK, który umożliwia w $k+1$ -szym kroku obliczeniowym uwzględnienie w ocenie $\hat{b}_{I(k+1)}$ wpływ:

- dla $I_S(k+1) \neq 0$, $I_X(k+1) = 0$ - dołączenia do zbioru pomiarów $\bar{I}_S(k+1)$ ¹⁾ grup nowych pomiarów,
- dla $I_S(k+1) = 0$, $I_X(k+1) \neq 0$ - usunięcia ze zbioru pomiarów $\bar{I}_X(k+1)$ grup starych pomiarów,
- dla $I_S(k+1) \neq 0$, $I_X(k+1) \neq 0$ - wymiany w zbiorze pomiarów $\bar{I}_S(k+1) + \bar{I}_X(k+1)$ grup pomiarów.

Stopień macierzy odwrotnej w zależności (3.21a) jest równy stopniowi macierzy $\hat{E}_{I(k+1)}$, który wynosi $\sum_{j \in \bar{I}(k+1)} n_j$, tzn. jest równy ilości pomiarów n_j w ogólnym przypadku wymienianych w danym kroku obliczeniowym w zbiorze pomiarów. Wartość oceny $\hat{b}_{I(k+1)}$ można również wyznaczyć w oparciu o zależność (3.21), stosując $\bar{I}(k+1)$ pomocniczych kroków obliczenio-

¹⁾ \bar{I} oznacza liczbę elementów zawartych w zbiorze I .

wych w każdym, z których byłaby albo usuwana, albo odłączona do zmiennego zbioru pomiarów tylko jedna grupa pomiarów. W przypadku tym zamiast jednego kroku obliczeniowego, w którym odwracana jest macierz stopnia $\sum_{j \in I(k+1)} n_j$ mamy $\bar{I}(k+1)$ kroków obliczeniowych w każdym, z których odwracana jest macierz stopnia n_j , gdzie $j \in \bar{I}(k+1)$.

Poniżej w tabeli 1 zestawiono ilości podstawowych działań występujących w $k+1$ -szym kroku obliczeniowym w wersji rekurencyjnej (3.21) oraz w wersji nierekurencyjnej (3.7) przykładowo dla przypadku, gdy do zbioru pomiarów dołączany jest jeden pomiar bieżący z przyporządkowanym mu współczynnikiem wagowym oraz jednocześnie usuwany jest z tego zbioru również w przyporządkowanym współczynnikiem wagowym jeden pomiar najstarszy. W wersji nierekurencyjnej zastosowano algorytm rozwiązywania układów równań normalnych według metody Banachiewicza.

1)
Tabela 1

1+1, $\bar{I}(k+1)$	wersja rekurencyjna			wersja nierekurencyjna		
	$n_{+,-}$	$n_{*,/}$	$n_{\sqrt{}}$	$n_{+,-}$	$n_{*,/}$	$n_{\sqrt{}}$
3, 2	51	68	0	28	39	3
4, 2	80	101	0	50	66	4
5, 2	115	140	0	80	102	5
6, 2	156	185	0	119	148	6
7, 2	203	236	0	168	205	7
8, 2	256	293	0	228	274	8
9, 2	315	356	0	300	356	9
10, 2	380	425	0	385	452	10
11, 2	451	500	0	484	563	11
12, 2	528	581	0	598	690	12
13, 2	611	668	0	728	824	13
14, 2	700	761	0	875	996	14
15, 2	795	860	0	1040	1177	15
16, 2	896	965	0	1224	1378	16
17, 2	1003	1076	0	1428	1600	17
18, 2	1116	1193	0	1653	1844	18
19, 2	1235	1316	0	1900	2111	19
20, 2	1360	1445	0	2170	2402	20
21, 2	1491	1580	0	2464	2718	21
22, 2	1628	1721	0	2783	3060	22
23, 2	1771	1868	0	3128	3429	23
24, 2	1920	2021	0	3500	3826	24
25, 2	2075	2180	0	3900	4252	25
26, 2	2236	2345	0	4329	4708	26
27, 2	2403	2516	0	4788	5195	27
28, 2	2576	2693	0	5278	5714	28
29, 2	2755	2876	0	5800	6266	29
30, 2	2940	3065	0	6355	6852	30

1) $n_{+,-}$, $n_{*,/}$, $n_{\sqrt{}}$ - odpowiednio: łączna liczba operacji dodawania i odejmowania, łączna liczba operacji mnożenia i dzielenia, liczba operacji obliczania pierwiastka kwadratowego.

Na podstawie danych przedstawionych w tabl. 1 widać, że dla $l+1 > 8$ liczba podstawowych działań występujących w przedstawionej rekurencyjnej wersji algorytmu jest mniejsza od liczby działań występujących w wersji nierekurencyjnej oraz że różnica między tymi liczbami jest tym większa, im większa jest liczba zidentyfikowanych parametrów modelu, i tak np. dla $l+1 > 26$ liczba działań występujących w wersji rekurencyjnej nie przekracza 50% liczby działań występujących w wersji nierekurencyjnej. Ponadto należy zauważyć, że w rozpatrywanym w tabl. 1 przypadku w wersji rekurencyjnej w każdym kroku obliczeniowym mamy do czynienia z odwracaniem macierzy stopnia drugiego, natomiast w wersji nierekurencyjnej mamy do czynienia w każdym kroku obliczeniowym z odwracaniem macierzy stopnia $l+1$. Stąd w wersji nierekurencyjnej w porównaniu z wersją rekurencyjną przy dużej wartości $l+1$, gdy odwracana macierz jest macierzą słabo uwarunkowaną występuje trudny problem zapewnienia dokładności obliczeń, z którym związane są znaczne ilości dodatkowych operacji numerycznych.

Należy zauważyć, że przytoczana często wyższość algorytmu rekurencyjnego nad algorytmem nierekurencyjnym z powodu konieczności pamiętania w algorytmie nierekurencyjnym w każdym bieżącym kroku obliczeniowym wszystkich przeszłych danych pomiarowych oraz braku konieczności pamiętania tych danych w algorytmie rekurencyjnym jest nieuzasadniona. Wynika to stąd, że przy stosowaniu wersji nierekurencyjnej (3.7) dane pomiarowe mogą być przechowywane w formie skumulowanej w postaci macierzy $P_{-I}^{-1}(k)$ oraz wektora $z_{I'}(k)$, a wymieniane dane pomiarowe mogą być w każdym kroku obliczeniowym uwzględniane przy wykorzystaniu zależności (3.17) z warunkami początkowymi $P_{-I}^{-1}(0) = Q$, $z_{I'}(0) = \underline{0}$, a więc z wykorzystaniem zależności rekurencyjnych na etapie przechowywania danych.

LITERATURA

- [1] Hubnicki Z.: Identyfikacja obiektów sterowania. PWN, Warszawa 1974.
- [2] Cichocki W.: Rekurencyjny algorytm najmniejszych kwadratów identyfikacji niestacjonarnych obiektów statycznych przy dowolnie zmieniającym się zbiorze danych pomiarowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Automatyka nr 61, Gliwice 1982.
- [3] Cichocki W.: Zagadnienie warunków początkowych dla rekurencyjnego algorytmu najmniejszych kwadratów z dowolnie zmienianym zbiorem pomiarów. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Automatyka z. 61, Gliwice, 1982.
- [4] Eykhoff P.: Identyfikacja w układach dynamicznych. PWN, Warszawa 1980.
- [5] Jazwinski A.H.: Stochastic processes and filtering theory. Academic Press, New York and London 1970.
- [6] Linik J.W.: Metoda najmniejszych kwadratów i teoria opracowywania obserwacji. PWN, Warszawa 1962.
- [7] Mendel J.M.: Diskrete techniques of parameter estimation. The equation error formulation. Marcel Dekker, INC, New York 1973.

- [8] Pachelski W.: Teoria równań filtrujących i ich zastosowanie do opracowania obserwacji według metody najmniejszych kwadratów. PWN, Warszawa 1972.
- [9] Kowalczyk B.: Macierze i ich zastosowania. WNT, Warszawa 1976.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jakub Gutenbaum

Wpłynęło do Redakcji 21.05.1982 r.

ОБОБЩЕННЫЙ РЕКУРЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ НАИМЕНШИХ КВАДРАТОВ

Р е з ю м е

Представлено обобщенный рекурентный алгоритм наименших квадратов. Этот алгоритм преобразует переменное множество измерительных данных, в которое вводится новые группы данных и из которого удаляется некоторые старые группы данных. Выше указанным группам измерительных данных приводится в соответствие положительно определенные матрицы весовых коэффициентов. Представленный алгоритм есть обобщение алгоритма представленного в [2].

A GENERALIZED RECURSIVE LEAST-SQUARES ALGORITHM

S u m m a r y

A generalized recursive least-squares algorithm has been presented. This algorithm works on a changing measurements set, from which are deleted some old measurement subsets and to which are added some new measurement subsets. Each exchanged subset may be weighted with a proper positive definite weightingmatrix. The algorithm is a generalized version of the algorithm presented in [2].