ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: AUTOMATYKA z. 71 Nr kol. 772

Wojciech CICHOCKI

REKURENCYJNY ALGORYTM NAJMNIEJSZYCH WYKŁADNICZO WAŻONYCH KWADRATÓW Z RUCHOMYM ZBIOREM POMIARÓW

Streszczenie. W artykule przedstawiono wersję rekurencyjną dla stosowanego dotychczas w wersji nierekurencyjnej algorytmu najmniejszych wykładniczo ważonych kwadratów z ruchomym zbiorem pomiarów oraz ze stałą dla danego horyzontu obserwacji macierzą współczynników wagowych [1,5,7]. Przedstawiona rekurencyjna wersja algorytmu przy większej liczbie identyfikowanych parametrów modelu daje znaczne korzyści obliczeniowe w porównaniu z wersją nierekurencyjną.

1. WSTĘP

Rozpatrywany jest algorytm najmniejszych wykładniczo ważonych kwadratów z ruchomym zbiorem pomiarów oraz ze stałą dla danego horyzontu obserwacji macierzą współczynników wagowych [1,5,7], który jest modyfikacją klasycznego algorytmu najmniejszych ważonych kwadratów. Modyfikacja ta polega na tym, że w każdym kroku obliczeniowym algorytm wyznacza parametry identyfikowanego obiektu w oparciu o zmienny ("ruchomy") zbiór pomiarów, do którego w każdym kroku obliczeniowym wprowadzane są dane pomiarowe bieżące oraz z którego usuwane są dane pomiarowe najstarsze. Ponadto w modyfikacji tej kolejne pomiary należące do ruchomego zbioru pomiarów uwzględniane są przez algorytm z odpowiednimi współczynnikami wagowymi w_i będącymi elementami postępu geometrycznego $\{w_i\}$ w ten sposób, że współczynnik w_1 (początkowy element postępu) zawsze przyporządkowywany jest pomiarowi najstarszemu znajdującemu się w ruchomym zbiorze, natomiast każdy następny współczynnik przyporządkowywany jest kolejnemu bardziej akutalnemu pomiarowi należącemu do tego zbioru. Tak skonstruowany algorytm, przy odpowiednio (w zależności od charakteru niestacjonarności parametrów identyfikowanego obiektu oraz charakteru zakłóceń oddziałujących na obiekt) dobranych: horyzoncie obserwacji określonym jako liczba pomiarów zawartych w zmiennym zbiorze oraz ciągu współczynników wagowych $\{w_i\}$ [1,5], odznacza się w wielu przypadkach bardzo dobrym śledzeniem zmian parametrów obiektu oraz silnym uśrednianiem zakłóceń oddziałujących na ten obiekt. Śledzenie zmian parametrów identyfikowanego obiektu oraz uśrednianie zakłóceń oddziałujących na obiekt jest w przypadku rozpatrywanego algorytmu z reguły lepsze niż w przypadku algorytmu najmniejszych kwadratów z ruchomym zbiorem pomiarów [1]. Spowodowane jest to tym, że wewnątrz ruchomego okna znajdują się pomiary mniej i bardziej aktualne, którym to pomiarom w pierwszym z wymienionych algorytmów przyporządkowywane są współczynniki wagowe odpowiednie do ich aktualności, natomiast w drugim z algorytmów przyporządkowywane są poszczególnym pomiarom bez względu na ich aktualność jednakowe współczynniki wagowe równe 1.

Poważną wadą rozpatrywanego algorytmu najmniejszych wykładniczo ważonych kwadratów, ograniczającą jego praktyczną przydatność w systemach bieżącej identyfikacji, są znaczne czasy obliczeniowe silnie rosnące z ilością estymowanych parametrów oraz konieczność odwracania w każdym kroku obliczeniowym macierzy o stopniu równym liczbie tych parametrów.

Poniżej w punkcie 2 przytoczono nierekurencyjną wersję [7] rozpatrywanego algorytmu. W punkcie 3 wyprowadzono wersję rekurencyjną algorytmu, która odznacza się w porównaniu z wersją nierekurencyjną znacznie mniejszymi czasami obliczeń już przy liczbie estymowanych parametrów rzędu kilku oraz wymaga w każdym kroku obliczeniowym odwracania macierzy o stopniu równym liczbie pomiarów wymienianych w zmiennym zbiorze w danym kroku obliczeniowym a nie o stopniu równym liczbie estymowanych parametrów. W punkcie 4 omówiono problem doboru warunków początkowych oraz problem eliminacji ich wpływu na wartości oszacowań estymowanych parametrów.

2. NIEREKURENCYJNA WERSJA ALGORYTMU

Rozpatrywane jest zadanie estymacji parametrów obiektu, dla którego równanie wiążące pomiary można przedstawić w postaci następującego "równania pomiarowego" ("measurement equations")

$$y(t) = \underline{u}^T(t)\underline{b} + e(t) \tag{2.1}$$

gdzie: $\underline{b} = \left[b_0, b_1, \ldots, b_l\right]^T$ - wektor nieznanych parametrów, $\underline{u}(t) = \left[u_0(t), u_1(t), \ldots, u_l(t)\right]^T$ - wektor wielkości wejściowych równania pomiarowego, $y(t)$ - wielkość wyjściowa równania pomiarowego, $e(t)$ - błąd stanowiący różnicę między wielkością wyznaczoną na podstawie równania $\underline{u}^T(t)\underline{b}$ a wielkością wyjściową $y(t)$.

Zakłada się, że:

- w dyskretnych chwilach t_i dostępne są dane pomiarowe w postaci wektorów blokowych $\underline{m}_i$

$$\underline{m}_i^T = \left[\underline{u}_i^T \,\vdots\, y_i\right], \tag{2.2}$$

gdzie: $\underline{u}_i = \left[u_{i0}, u_{i1}, \ldots, u_{il}\right]^T = \left[u_0(t_i), u_1(t_i), \ldots, u_l(t_i)\right]^T, \quad y_i = y(t_i).$

Dalej wektor $\underline{m}_i$ nazywany będzie i-tym pomiarem, wektor $\underline{u}_i$ i-tym pomiarem wielkości wejściowych, y_i i-tym pomiarem wielkości wyjściowej. Równanie pomiarowe (2.1) dla pomiaru $\underline{m}_i$ przyjmuje postać

$$y_i = \underline{u}_i^T \underline{b} + e_i. \tag{2.3}$$

gdzie: $e_i = e(t_i)$.

- dany jest ciąg dodatnich współczynników wagowych $\{w_i\}$ stanowiący postęp geometryczny

$$w_{i+1} = \alpha w_i \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\ldots, \tag{2.4}$$

gdzie: α - stosunek kolejnych wyrazów ciągu.

Następnie zakłada się, że w k-tym kroku obliczeniowym, w celu wyznaczenia według algorytmu najmniejszych wykładniczo ważonych kwadratów oceny wektora $\underline{b}$, zostaje:

- utworzony na podstawie $h(k) \geqslant l+1$ kolejnych: $\underline{m}_{p(k)}, \underline{m}_{p(k)+1}, \ldots, \underline{m}_{q(k)}$ pomiarów, gdzie $h(k) = q(k) - p(k) + 1$ jest horyzontem obserwacji, ruchomy zbiór pomiarów opisany macierzą

$$\underline{M}_{p(k),q(k)} = \left[\underline{m}_{p(k)}, \underline{m}_{p(k)+1}, \ldots, \underline{m}_{q(k)}\right]^T \tag{2.5}$$

- utworzona z elementów ciągu $\{w_i\}$ diagonalna macierz współczynników wagowych

$$\underline{W}_{h(k)} = \operatorname{diag}\left\{w_1, w_2, \ldots, w_{h(k)}\right\} \tag{2.6}$$

Macierzy $\underline{M}_{p(k),q(k)}$, ze względu na (2.2), odpowiadają: macierz pomiarów wielkości wejściowych

$$\underline{U}_{p(k),q(k)} = \left[\underline{u}_{p(k)}, \underline{u}_{p(k)+1}, \ldots, \underline{u}_{q(k)}\right]^T \tag{2.7}$$

oraz wektor pomiarów wielkości wyjściowej

$$\underline{y}_{p(k),q(k)} = \left[y_{p(k)}, y_{p(k)+1}, \ldots, y_{q(k)}\right]^T \tag{2.8}$$

Przy założeniu, że

$$\det\left[\underline{U}^T_{p(k),q(k)}\, \underline{W}_{h(k)}\, \underline{U}_{p(k),q(k)}\right] \neq 0 \tag{2.9}$$

ocena $\hat{\underline{b}}_{p(k),q(k)}$ wektora parametrów równania pomiarowego (2.1), minimalizująca zgodnie z algorytmem najmniejszych wykładniczo ważonych kwadratów [1] wskaźnik jakości

$$J_{p(k)q(k)}(\underline{b}) = \left[\underline{y}_{p(k)q(k)} - \underline{U}_{p(k)q(k)}\underline{b}\right]^T \underline{W}_{h(k)} \left[\underline{y}_{p(k)q(k)} - \underline{U}_{p(k)q(k)}\underline{b}\right],$$

dana jest zależnością

$$\hat{\underline{b}}_{p(k),q(k)} = \underline{P}_{p(k),q(k)}\underline{g}_{p(k),q(k)}, \tag{2.10}$$

gdzie:

$$\underline{P}_{p(k),q(k)} = \left[\underline{U}^T_{p(k),q(k)} \underline{W}_{h(k)} \underline{U}_{p(k),q(k)}\right]^{-1} \tag{2.11}$$

$$\underline{g}_{p(k),q(k)} = \underline{U}^T_{p(k),q(k)} \underline{W}_{h(k)} \underline{y}_{p(k),q(k)}. \tag{2.12}$$

3. REKURENCYJNA WERSJA ALGORYTMU

Zakłada się, że w k+1-szym kroku obliczeniowym w celu wyznaczenia oceny wektora b:

- zmieniono (uaktualniono) ruchomy zbiór pomiarów przez usunięcie z niego $r(k+1)$ początkowych, kolejnych: $p(k), p(k)+1, \ldots, p(k)+r(k+1)-1$ pomiarów oraz przez wprowadzenie $s(k+1)$ nowych, kolejnych $q(k)+1, q(k)+2, \ldots, q(k)+s(k+1)$ pomiarów. Przy czym zmiany dokonano z zachowaniem warunku $h(k+1) \geqslant l+1$, gdzie $h(k+1)$ jest wartością nowego horyzontu obserwacji

$$h(k+1) = h(k) + s(k+1) - r(k+1) \tag{3.1}$$

- dostosowano do nowego horyzontu obserwacji macierz współczynników wagowych

$$\underline{W}_{h(k+1)} = \left\{\mathrm{diag}\ w_1, w_2, \ldots, w_{h(k+1)}\right\} \tag{3.2}$$

Zmienionemu zbiorowi pomiarów odpowiada macierz pomiarów

$$\underline{M}_{p(k+1),q(k+1)} = \left[\underline{m}_{p(k+1)}, \underline{m}_{p(k+1)+1}, \ldots, \underline{m}_{q(k+1)}\right]^T, \tag{3.3}$$

gdzie:

$$p(k+1) = p(k) + r(k+1),$$
$$q(k+1) = q(k) + s(k+1), \tag{3.4}$$

której analogicznie do (2.7, 2.8) odpowiadają: macierz pomiarów wielkości wejściowych

$$\underline{U}_{p(k+1),q(k+1)} = \left[\underline{u}_{p(k+1)+1}, \ldots, \underline{u}_{q(k+1)}\right]^T, \tag{3.5}$$

oraz wektor pomiarów wielkości wyjściowej

$$\underline{y}_{p(k+1),q(k+1)} = \left[y_{p(k+1)}, y_{p(k+1)+1}, \ldots, y_{q(k+1)}\right]^T \tag{3.6}$$

Przy założeniu, że

$$\det\left[\underline{U}^T_{p(k+1),q(k+1)}\ \underline{W}_{h(k+1)}\ \underline{U}_{p(k+1),q(k+1)}\right] \neq 0 \tag{3.7}$$

analogicznie do oceny (2.10 - 2.12) ocena $\hat{\underline{b}}_{p(k+1),q(k+1)}$ wektora parametrów równania (2.1) wyznaczona na podstawie pomiarów należących do ruchomego zbioru pomiarów w k+1-szym kroku obliczeniowym dana jest zależnością

$$\hat{\underline{b}}_{p(k+1),q(k+1)} = \underline{P}_{p(k+1),q(k+1)}\underline{q}_{p(k+1),q(k+1)}, \tag{3.8}$$

gdzie

$$\underline{P}_{p(k+1),q(k+1)} = \left[\underline{U}^T_{p(k+1),q(k+1)}\underline{W}_{h(k+1)}\ \underline{U}_{p(k+1),q(k+1)}\right]^{-1} \tag{3.9}$$

$$\underline{q}_{p(k+1),q(k+1)} = \underline{U}^T_{p(k+1),q(k+1)}\ \underline{W}_{h(k+1)}\ \underline{y}_{p(k+1),q(k+1)} \tag{3.10}$$

Poniżej zostaną wyprowadzone zależności umożliwiające rekurencyjne wyznaczenie oceny $\hat{\underline{b}}_{p(k+1),q(k+1)}$ oraz macierzy $\underline{P}_{p(k+1),q(k+1)}$ na podstawie znanych: oceny $\hat{\underline{b}}_{p(k),q(k)}$, macierzy $\underline{P}_{p(k),q(k)}$ oraz na podstawie danych określających zmianę ruchomego zbioru pomiarów w k+1-szym kroku obliczeniowym w porównaniu z ruchomym zbiorem pomiarów w k-tym kroku obliczeniowym.

Wydzielając w $\underline{P}^{-1}_{p(k),q(k)}$ i w $\underline{q}_{p(k),q(k)}$ danych zależnościami (2.11), (2.12) oraz w $\underline{P}^{-1}_{p(k+1),q(k+1)}$ i w $\underline{q}_{p(k+1),q(k+1)}$ danych zależnościami (3.9), (3.10) składniki zależne od pomiarów wymienianych w k+1-szym kroku obliczeniowym otrzymujemy:

$$\underline{P}^{-1}_{p(k),q(k)} = \underline{P}^{-1}_{p(k),p(k+1)-1} + \alpha^{r(k+1)}\ \underline{P}^{-1}_{p(k+1),q(k)} \tag{3.11}$$

$$\underline{q}_{p(k),q(k)} = \underline{q}_{p(k),p(k+1)-1} + \alpha^{r(k+1)}\ \underline{q}_{p(k+1),q(k)} \tag{3.12}$$

oraz

$$\underline{P}^{-1}_{p(k-1),q(k+1)} = \underline{P}^{-1}_{p(k+1),q(k)} + \alpha^{h(k)-r(k+1)}\ \underline{P}^{-1}_{q(k)+1,q(k+1)} \tag{3.13}$$

$$\underline{q}_{p(k+1),q(k+1)} = \underline{q}_{p(k+1),q(k)} + \alpha^{h(k)-r(k+1)}\underline{q}_{q(k)+1,q(k+1)} \tag{3.14}$$

Eliminując z zależności (3.11 - 3.14) składniki zależne wyłącznie od pomiarów, które znajdowały się w ruchomym zbiorze pomiarów w k-tym kroku obliczeniowym oraz znajdują się w tym zbiorze w k+1-szym kroku obliczeniowym, otrzymujemy:

$$\underline{P}^{-1}_{p(k+1),q(k+1)} = \alpha^{-r(k+1)}\left[\underline{P}^{-1}_{p(k),q(k)} - \underline{P}^{-1}_{p(k),p(k+1)-1} + \alpha^{h(k)}\underline{P}^{-1}_{q(k)+1,q(k+1)}\right], \tag{3.15}$$

$$\underline{g}_{p(k+1),q(k+1)} = \alpha^{-r(k+1)}\left[\underline{g}_{p(k),q(k)} - \underline{g}_{p(k),p(k+1)-1} + \alpha^{h(k)}\underline{g}_{q(k)+1,q(k+1)}\right] \tag{3.16}$$

W zależnościach (3.15, 3.16) po prawych stronach oprócz składników zawierających pomiary należące do ruchomego zbioru pomiarów w k-tym kroku obliczeniowym występują składniki zawierające wyłącznie pomiary wymieniane w ruchomym zbiorze pomiarów w k+1-szym kroku obliczeniowym.

Dalej oznaczamy przez $\tilde{I}(k+1)$ uporządkowany zbiór indeksów pomiarów $\underline{m}_i$ wymienianych w k+1-szym kroku obliczeniowym

$$\tilde{I}(k+1) = \left\{p(k),p(k)+1,\dots,p(k+1)-1,q(k)+1,\dots,q(k+1)\right\} \tag{3.17}$$

oraz definiujemy:

- macierz $\underline{M}_{\tilde{I}(k+1)}$ jako macierz zawierającą wyłącznie pomiary wymieniane w k+1-szym kroku obliczeniowym

$$\underline{M}_{\tilde{I}(k+1)} = \begin{bmatrix} \underline{M}_{p(k),p(k+1)-1} \\ \hline \underline{M}_{q(k)+1,q(k+1)} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

której ze względu na (2.2) odpowiadają macierz $\underline{U}_{\tilde{I}(k+1)}$ oraz wektor $\underline{y}_{\tilde{I}(k+1)}$:

$$\underline{U}_{\tilde{I}(k+1)} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{p(k),p(k+1)-1} \\ \hline \underline{U}_{q(k)+1,q(k+1)} \end{bmatrix} \qquad \underline{y}_{\tilde{I}(k+1)} = \begin{bmatrix} \underline{y}_{p(k),p(k+1)-1} \\ \hline \underline{y}_{q(k)+1,q(k+1)} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

- macierz współczynników wagowych przyporządkowywanych wymienianym pomiarom w zbiprze pomiarów w k+1-szym kroku obliczeniowym

$$\underline{W}_{\tilde{I}(k+1)} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{W}_{r}(k+1) & \underline{0} \\ \hline 0 & \alpha^{h(k)}\underline{W}_{s}(k+1) \end{array}\right] \tag{3.20}$$

- ściśle przyporządkowaną macierzy $\underline{M}_{\tilde{I}(k+1)}$ diagonalną macierz $\underline{E}_{\tilde{I}(k+1)}$), określającą kierunek wymiany pomiarów w ruchomym zbiorze pomiarów w k+1-szym kroku obliczeniowym

$$\underline{E}_{\tilde{I}(k+1)} = \left[\begin{array}{c|c} -\underline{I}_{r}(k+1) & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{I}_{s}(k+1) \end{array}\right] \tag{3.21}$$

gdzie: $\underline{I}_{r(k+1)}$, $\underline{I}_{s(k+1)}$ macierze jednostkowe o stopniach odpowiednio $r(k+1)$ oraz $s(k+1)$.

Zależności (3.15, 3.16) po uwzględnieniu oznaczeń (3.17 - 3.21) można przedstawić w postaci:

$$\underline{P}^{-1}_{p(k+1),q(k+1)} = \alpha^{-r(k+1)} \left[\underline{P}^{-1}_{p(k),q(k)} + \underline{U}^{T}_{\tilde{I}(k+1)}\underline{F}^{-1}_{\tilde{I}(k+1)}\underline{U}_{\tilde{I}(k+1)}\right] \tag{3.22}$$

$$\underline{g}_{p(k+1),q(k+1)} = \alpha^{-r(k+1)} \left[\underline{g}_{p(k),q(k)} + \underline{U}^{T}_{\tilde{I}(k+1)}\underline{F}^{-1}_{\tilde{I}(k+1)}\underline{Y}_{\tilde{I}(k+1)}\right] \tag{3.23}$$

gdzie macierz

$$\underline{F}^{-1}_{\tilde{I}(k+1)} = \underline{W}_{\tilde{I}(k+1)}\underline{F}_{\tilde{I}(k+1)} \tag{3.24}$$

jest macierzą względnych współczynników wagowych przyporządkowywanych wymienianym pomiarom.

Wykorzystując w (3.22) tożsamość [4]:

$$\left[\underline{A}^{-1} + \underline{B}\underline{C}^{-1}\underline{D}\right]^{-1} = \underline{A}\left[\underline{I}_{A} - \underline{B}(\underline{D}\underline{A}\underline{B} + \underline{C})^{-1}\underline{D}\underline{A}\right]$$

gdzie: $\underline{A}$, $\underline{C}$, $\underline{A}^{-1} + \underline{B}\underline{C}^{-1}\underline{D}$ są macierzami kwadratowymi nieosobliwymi, otrzymujemy rekurencyjny wzór na macierz $\underline{P}_{p(k+1),q(k+1)}$ w postaci

$$\underline{P}_{p(k+1),q(k+1)} = \alpha^{r(k+1)}\underline{P}_{p(k),q(k)}\left\{\underline{I}_{1} - \underline{U}^{T}_{\tilde{I}(k+1)}\left[\underline{U}_{\tilde{I}(k+1)}\underline{P}_{p(k),q(k)}\underline{U}^{T}_{\tilde{I}(k+1)} + \underline{F}_{\tilde{I}(k+1)}\right]^{-1}\underline{U}_{\tilde{I}(k+1)}\underline{P}_{p(k),q(k)}\right\} \tag{3.25}$$

Uwzględniając w (3.8) zależności (3.23, 3.25) otrzymujemy:

$$\hat{\underline{b}}_{p(k+1),q(k+1)} = \underline{P}_{p(k),q(k)}\left\{\underline{I}_{1} - \underline{U}^{T}_{\tilde{I}(k+1)}\left[\underline{U}_{\tilde{I}(k+1)}\underline{P}_{p(k),q(k)}\underline{U}^{T}_{\tilde{I}(k+1)} + \underline{F}_{\tilde{I}(k+1)}\right]^{-1} \cdot \underline{U}_{\tilde{I}(k+1)}\underline{P}_{p(k),q(k)}\right\}\left[\underline{g}_{p(k),q(k)} + \underline{U}^{T}_{\tilde{I}(k+1)}\underline{F}^{-1}_{\tilde{I}(k+1)}\underline{Y}_{\tilde{I}(k+1)}\right]$$

Stąd w wyniku kolejnych przekształceń z uwzględnieniem zależności (2.10), otrzymujemy:

$$\hat{\underline{b}}_{p(k+1),q(k+1)} = \hat{\underline{b}}_{p(k),q(k)} + \underline{P}_{p(k),q(k)}\underline{U}^{T}_{\tilde{I}(k+1)}\left[\underline{U}_{\tilde{I}(k+1)}\underline{P}_{p(k),q(k)}\underline{U}^{T}_{\tilde{I}(k+1)} + \underline{F}_{\tilde{I}(k+1)}\right]^{-1}\left[\underline{Y}_{\tilde{I}(k+1)} - \underline{U}_{\tilde{I}(k+1)}\hat{\underline{b}}_{p(k),q(k)}\right] \tag{3.26}$$

Dla z góry zadanego ciągu $\{w_i\}$ macierz względnych współczynników wagowych pomiarów wymienianych $\underline{F}^{-1}_{\tilde{I}(k+1)}$ jest jednoznacznie określona przez: horyzont obserwacji $h(k)$, ilość pomiarów wprowadzanych $s(k+1)$ oraz ilość pomiarów usuwanych $r(k+1)$ i posiada postać:

$$\underline{F}_{\tilde{I}(k+1)} = \left[\begin{array}{c|c} -\begin{bmatrix} f_1 & & & \underline{0} \\ & f_2 & & \\ \underline{0} & & \ddots & \\ & & & f_{r(k+1)} \end{bmatrix} & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \gamma(k)\begin{bmatrix} f_1 & & & \\ & f_2 & & \underline{0} \\ & & \ddots & \\ & & & f_{s(k+1)} \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

gdzie: $f_i = w_i^{-1}$, $\gamma(k) = \alpha^{-h(k)}$. Stąd zależności (3.1, 3.25, 3.26) tworzą układ zależności:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\underline{b}}_{p(k+1),q(k+1)} &= \hat{\underline{b}}_{p(k),q(k)} + \underline{G}_{p(k+1),q(k+1)}\left[\underline{y}_{\tilde{I}(k+1)} - \underline{U}_{\tilde{I}(k+1)}\hat{\underline{b}}_{p(k),q(k)}\right] \\ \underline{P}_{p(k+1),q(k+1)} &= \alpha^{r(k+1)}\left[\underline{I}_1 - \underline{G}_{p(k+1),q(k+1)}\underline{U}_{\tilde{I}(k+1)}\right]\underline{P}_{p(k),q(k)} \\ h(k+1) &= h(k) + s(k+1) - r(k+1) \end{aligned}\right\} \quad (3.27)$$

gdzie $\underline{G}_{p(k+1),q(k+1)}$ jest macierzą współczynników korekcyjnych o wymiarach $1 \times [s(k+1)+r(k+1)]$, określoną zależnością

$$\underline{G}_{p(k+1),q(k+1)} = \underline{P}_{p(k),q(k)}\underline{U}^T_{\tilde{I}(k+1)}\left[\underline{U}_{\tilde{I}(k+1)}\underline{P}_{p(k),q(k)}\underline{U}^T_{\tilde{I}(k+1)} + \underline{F}_{\tilde{I}(k+1)}\right]^{-1} \quad (3.28)$$

Zależności (3.27, 3.28) umożliwiają rekurencyjne wyznaczenie oceny $\hat{\underline{b}}_{p(k+1),q(k+1)}$ na podstawie:

- znajomości oceny $\hat{\underline{b}}_{p(k),q(k)}$, macierzy $\underline{P}_{p(k),q(k)}$ oraz horyzontu obserwacji $h(k)$ wyznaczonych w k-tym kroku obliczeniowym
- znajomości $s(k+1)$, $r(k+1)$ oraz elementów macierzy $\underline{M}_{\tilde{I}(k+1)}$ określających wymianę pomiarów w ruchomym zbiorze pomiarów w k+1-szym kroku obliczeniowym.

Zależności te w przypadku gdy

$s(k+1) \neq 0$, $r(k+1) = 0$ umożliwiają uwzględnienie $s(k+1)$ nowych pomiarów w wartości oceny estymowanego wektora parametrów. W przypadku gdy

$s(k+1)=1$ pokrywają się ze znanymi zależnościami rekurencyjnej wersji algorytmu najmniejszych wykładniczo ważonych kwadratów [1, 4].

$s(k+1) = 0$, $r(k+1) \neq 0$ stanowią oryginalną rekurencyjną wersję algorytmu najmniejszych wykładniczo ważonych kwadratów, która umożliwia wyeliminowanie wpływu $r(k+1)$ pomiarów na wartość estymowanego wektora parametrów,

$s(k+1) \neq 0$, $r(k+1) \neq 0$ stanowią oryginalną rekurencyjną wersję algorytmu najmniejszych wykładniczo ważonych kwadratów, która umożliwia wymianę wpływu $s(k+1)+r(k+1)$ pomiarów (uwzględnienie wpływu $s(k+1)$ pomiarów oraz wyeliminowanie wpływu $r(k+1)$ pomiarów) na wartość estymowanego wektora parametrów.

Warunkiem koniecznym istnienia w k+1-szym kroku obliczeniowym jednoznacznie określonej zależnościami (3.27, 3.28) oceny $\hat{\underline{b}}_{p(k+1),q(k+1)}$ jest spełnienie warunku

$$h(k) + \mathrm{Tr}\underline{E}_{\tilde{I}(k+1)} \geqslant l+1 \tag{3.29}$$

Warunek ten oznacza, że w każdym kroku obliczeniowym w ruchomym zbiorze pomiarów nie może być mniej pomiarów od ilości nieznanych parametrów równania pomiarowego (2.1). Natomiast warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia jednoznacznie określonej zależnościami (3.27, 3.28) oceny jest by

$$\det\left[\underline{U}_{\tilde{I}(k+1)}\underline{P}_{p(k),q(k)}\underline{U}^T_{\tilde{I}(k+1)} + \underline{F}_{\tilde{I}(k+1)}\right] > 0. \tag{3.30}$$

4. PROBLEM WARUNKÓW POCZĄTKOWYCH

W celu inicjacji algorytmu (3.27, 3.28) wymagana jest znajomość warunków początkowych: $\hat{\underline{b}}_{p(0),q(0)}$, $\underline{P}_{p(0),q(0)}$ oraz $h(0)$. W pracy [2] wykazano, że przyjęcie warunków początkowych w rekurencyjnym algorytmie najmniejszych kwadratów ma taki sam wpływ na wyniki estymacji jak wprowadzenie do zbioru pomiarów dodatkowo $l+1$ pomiarów fikcyjnych nie związanych z własnościami identyfikowanego obiektu. Poniżej przedstawiono rozszerzenie tego stwierdzenia na przypadek algorytmu najmniejszych ważonych kwadratów. Można udowodnić następujące twierdzenie:

Dla warunków początkowych $\hat{\underline{b}}_{p(0),q(0)}$, $\underline{P}_{p(0),q(0)}$, gdzie $\hat{\underline{b}}_{p(0),q(0)}$ jest wektorem o dowolnych składowych rzeczywistych, a $\underline{P}_{p(0),q(0)}$ jest macierzą symetryczną dodatnio określoną oraz dla zadanej dodatnio określonej macierzy współczynników wagowych $\underline{W}$, można zawsze wyznaczyć taki zbiór $l+1$ pomiarów (zwanych pomiarami fikcyjnymi) o postaci

$$\underline{m}^T_{-i} = \left[\underline{u}^T_{-i} \,\middle|\, y_{-i}\right] = \left[\underline{s}^T_{-i} \,\middle|\, \underline{s}^T_{-i}\,\hat{\underline{b}}_{p(0),q(0)}\right], \quad \text{dla} \quad i = 0,1,\dots,l \tag{4.1}$$

gdzie macierz $\underline{S} = \left[\underline{s}_0 \middle| \underline{s}_{-1} \middle| \dots \middle| \underline{s}_{-1}\right]^T$ jest macierzą nieosobliwą spełniającą zależność

$$\underline{S}^T \underline{W}\, \underline{S} = \underline{P}^{-1}_{p(0),q(0)}, \tag{4.2}$$

który po przetworzeniu przez algorytm najmniejszych ważonych kwadratów daje wektor $\hat{\underline{b}}_{p(0),q(0)}$ oraz macierz $\underline{P}_{p(0),q(0)}$.

<u>Dowód</u>: Dla symetrycznych dodatnio określonych macierzy $\underline{P}^{-1}_{p(0),q(0)}$ oraz $\underline{W}$ istnieje zawsze taka macierz nieosobliwa $\underline{S}$, że $\underline{P}^{-1}_{p(0),q(0)} = \underline{S}^T \underline{W}\, \underline{S}$. Stąd dla zadanych $\hat{\underline{b}}_{p(0),q(0)}$, $\underline{P}_{p(0),q(0)}$ oraz zadanej macierzy współczynników wagowych $\underline{W}$ istnieją zawsze pomiary (4.1), dla których spełniony jest warunek (4.2). Wyznaczając według algorytmu najmniejszych ważonych kwadratów na podstawie pomiarów (4.1) oraz przyporządkowanej im macierzy współczynników wagowych $\underline{W}$ ocenę $\hat{\underline{b}}_{-1,0}$, otrzymujemy:

$$\hat{\underline{b}}_{-1,0} = \underline{P}_{-1,0}\, \underline{S}^T \underline{W}\, \underline{y},$$

gdzie:

$$\underline{P}_{-1,0} = \left[\underline{S}^T \underline{W}\, \underline{S}\right]^{-1}, \quad \underline{y} = \underline{S}\, \hat{\underline{b}}_{p(0),q(0)}$$

Stąd uwzględniając (4.2), otrzymujemy:

$$\underline{P}_{-1,0} = \underline{P}_{p(0),q(0)} \quad \text{oraz} \quad \hat{\underline{b}}_{-1,0} = \hat{\underline{b}}_{p(0),q(0)}$$

c.n.w.

Z przytoczonego twierdzenia wynika, że przyjęcie w rekurencyjnym algorytmie najmniejszych wykładniczo ważonych kwadratów warunków początkowych $\hat{\underline{b}}_{p(0),q(0)}$, $\underline{P}_{p(0),q(0)}$ ma taki sam wpływ na wyniki dalszej estymacji jak wprowadzenie do zbioru pomiarów dodatkowo l+1 pomiarów fikcyjnych (4.1), którym zostały przyporządkowane zadane współczynniki wagowe. Stąd warunek początkowy h(0) przyjmuje postać:

$$h(0) = l + 1 \tag{4.3}$$

Ze względu na fakt, że pomiary fikcyjne (4.1) są całkowicie niezwiązane z własnościami identyfikowanego obiektu, współczynniki wagowe przyporządkowywane tym pomiarom powinny posiadać wartości możliwe jak najmniejsze. Ograniczając ze względu na prostotę obliczeń wybór macierzy $\underline{P}_{p(0),q(0)}$ oraz $\underline{W}$ do macierzy diagonalnych oraz uwzględniając (4.1, 4.2), otrzymujemy:

$$\underline{P}_{p(0),q(0)} = \mathrm{diag}\left\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_l\right\}, \quad \hat{\underline{b}}_{p(0),q(0)} = \left[a_0, a_1, \ldots, a_l\right]^T,$$

gdzie dla $i=0,1,\ldots,l$: $\sigma_i = \frac{u^2_{-ii}}{w_{-i}}$, $a_i = \frac{y_{-i}}{u_{-ii}}$, w_{-i} - element macierzy $\underline{W}$ przyporządkowany pomiarowei $\underline{m}_{-i}$. Stąd dla $i = 0,1,\ldots,l$ przy $w_{-i} \to 0^+$ mamy $\sigma_i \to \infty$, natomiast a_i, ze względu na brak powiązań pomiarów fikcyjnych z własnościami identyfikowanego obiektu, tj. brak jakiejkolwiek zależności y_{-i} od u_{-ii}, przyjmują wartości dowolne (ze względu na prostotę obliczeń wygodnie jest przyjąć dla $i = 0,1,\ldots,l$ $a_i = 0$).

Reasumując warunki początkowe umożliwiające inicjację algorytmu (3.27, 3.28), przyjmują postać:

$$\begin{aligned} h(0) &= l+1 \\ \underline{P}_{p(0)q(0)} &= \mathrm{diag}\left\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_l\right\} \\ \hat{\underline{b}}_{p(0)q(0)} &= \left[a_0, a_1, \ldots, a_l\right]^T \end{aligned} \tag{4.4}$$

gdzie: σ_i posiada bardzo dużą wartość dodatnią, natomiast a_i posiada wartość dowolną.

W praktycznej realizacji przy przyjmowaniu warunków początkowych (4.4) przyjmowanie w miejsce σ_i bardzo dużych wartości, ze względu na dokładność obliczeń numerycznych, jest ograniczone [6]. Stąd szczególnie przy małych wartościach horyzontu obserwacji [2] zachodzi konieczność eliminacji wpływu przyjmowanych warunków początkowych na wartości uzyskiwanych za pomocą algorytmu ocen. Ze względu na fakt, że przyjęcie warunków początkowych (4.4) może być również interpretowane jako wprowadzenie do zbioru danych $l+1$ pomiarów fikcyjnych, którym została przyporządkowana macierz współczynników wagowych będąca macierzą jednostkową, można zastosować algorytm eliminacji wpływu tych warunków przedstawiony w [2].

5. UWAGI KOŃCOWE

Stopień macierzy odwracanej w zależności (3.28) jest równy stopniowi macierzy $\underline{E}_{i(k+1)}$ wynoszącemu $w(k+1) = s(k+1) + r(k+1)$, tzn. jest równy ilości pomiarów wymienianych w danym kroku obliczeniowym w ruchomym zbiorze pomiarów. Tak więc w przypadku $w(k+1) > l+1$ z zastosowaniem algorytmu rekurencyjnego (3.27, 3.28) związane jest odwracanie macierzy o większym stopniu niż w przypadku zastosowania algorytmu nierekurencyjnego (2.10 - 2.12), powodując na pewno nieopłacalność stosowania wersji rekurencyjnej.

Wyznaczenie w k+1-szym kroku obliczeniowym wartości oceny $\hat{b}_{p(k+1),q(k+1)}$ można przeprowadzić w oparciu o zależności (3.27, 3.28), stosując $w(k+1)$ pomocniczych kroków obliczeniowych, w każdym z których byłby albo usuwany, albo dołączany do ruchomego zbioru tylko jeden pomiar. W przypadku tym zamiast jednego kroku obliczeniowego, w którym odwracana jest macierz stopnia $w(k+1)$ mamy $w(k+1)$ kroków obliczeniowych, w każdym z których odwracany jest skalar. W przypadku, który ma często miejsce w systemach identyfikacji w czasie rzeczywistym, gdy w każdym kroku obliczeniowym do zbioru pomiarów dołączany jest jeden pomiar bieżący oraz jednocześnie usuwany jest z niego jeden pomiar najstarszy mamy, stosując zależności (3.27, 3.28), do czynienia w każdym kroku obliczeniowym z odwracaniem macierzy stopnia drugiego, co jest operacją stosunkowo prostą. Operację tę można w tym przypadku również zastąpić dwukrotnym zastosowaniem ww zależności oddzielnie dla poszczególnych pomiarów, wymieniając w ten sposób jeden krok obliczeniowy z odwracaniem macierzy stopnia drugiego na dwa kroki obliczeniowe z odwracaniem w każdym z nich wielkości skalarnej.

Poniżej w tabl. 1 zestawiono ilości podstawowych działań występujących w k+1-szym kroku obliczeniowym w wersji rekurencyjnej (3.27, 3.28) oraz w wersji nierekurencyjnej (3.8 - 3.10) przykładowo dla przypadku, gdy do zbioru pomiarów dołączany jest jeden pomiar bieżący oraz jednocześnie usuwany z niego jest jeden pomiar najstarszy. W wersji nierekurencyjnej zastosowano algorytm rozwiązywania układów równań normalnych według metody Banachiewicza [3].

Tablica 1

l , w(k+1)	Wersja rekurencyjna			Wersja nierekurencyjna		
	$n_{+,-}$ [1)]	$n_{*,/}$	$n_{\sqrt{}}$	$n_{+,-}$	$n_{*,/}$	$n_{\sqrt{}}$
1 , 2	10	25	2	4	11	1
2 , 2	27	48	2	13	29	2
3 , 2	50	78	2	28	55	3
4 , 2	79	115	2	50	90	4
5 , 2	114	159	2	80	135	5
6 , 2	155	210	2	119	191	6
7 , 2	202	268	2	168	259	7
8 , 2	255	333	2	228	340	8
9 , 2	314	405	2	300	435	9
10 , 2	379	484	2	385	545	10
11 , 2	450	570	2	484	671	11
12 , 2	527	663	2	598	814	12
13 , 2	610	763	2	728	975	13
14 , 2	699	870	2	875	1155	14
15 , 2	794	984	2	1040	1355	15
16 , 2	895	1105	2	1224	1575	16
17 , 2	1002	1233	2	1428	1819	17
18 , 2	1115	1368	2	1653	2085	18
19 , 2	1234	1510	2	1900	2375	19
20 , 2	1359	1659	2	2170	2690	20

cd. tablicy 1

l, $w(k+1)$	Wersja rekurencyjna			Wersja nierekurencyjna		
	$n_{+,-}$ [1)]	$n_{*,/}$	$n_{\sqrt{}}$	$n_{+,-}$	$n_{*,/}$	$n_{\sqrt{}}$
21 , 2	1490	1815	2	2464	3031	21
22 , 2	1627	1978	2	2783	3399	22
23 , 2	1770	2148	2	3128	3795	23
24 , 2	1919	2325	2	3500	4220	24
25 , 2	2074	2509	2	3900	4675	25
26 , 2	2235	2700	2	4329	5161	26
27 , 2	2402	2898	2	4788	5679	27
28 , 2	2575	3103	2	5278	6230	28
29 , 2	2754	3315	2	5800	6815	29
30 , 2	2939	3534	2	6355	7435	30
31 , 2	3130	3760	2	6944	8091	31
32 , 2	3327	3993	2	7568	8784	32
33 , 2	3530	4233	2	8228	9515	33
34 , 2	3739	4480	2	8925	10285	34
35 , 2	3954	4734	2	9660	11095	35

[1)] $n_{+,-}$, $n_{*,/}$, $n_{\sqrt{}}$ - odpowiednio: łączna liczba operacji dodawania i odejmowania, łączna liczba operacji mnożenia i dzielenia, liczba operacji obliczania pierwiastka kwadratowego.

Na podstawie danych przedstawionych w tablicy 1 widać, że dla $l+1>8$ liczba podstawowych działań występujących w przedstawionej rekurencyjnej wersji algorytmu jest mniejsza od liczby działań występujących w wersji nierekurencyjnej oraz że różnica między tymi liczbami jest tym większa, im większa jest liczba estymowanych parametrów, np. dla $l+1>27$ liczba działań występujących w wersji rekurencyjnej nie przekracza 50% liczby działań występujących w wersji nierekurencyjnej. Ponadto należy zauważyć, że w wersji rekurencyjnej w każdym kroku obliczeniowym mamy do czynienia z odwracaniem, w rozpatrywanym w tabl. 1 przypadku, macierzy stopnia drugiego, natomiast w wersji nierekurencyjnej mamy do czynienia z odwracaniem w każdym kroku obliczeniowym macierzy o stopniu równym $l+1$, a w konsekwencji w wersji nierekurencyjnej w porównaniu z wersją rekurencyjną, w przypadku dużej wartości $l+1$ oraz odwracanej macierzy będącej macierzą słabo uwarunkowaną, występuje trudny problem dokładności obliczeń, z którym związane są znaczne ilości dodatkowych operacji numerycznych.

LITERATURA

[1] Bubnicki Z.: Identyfikacja obiektów sterowania. PWN, Warszawa 1974.

[2] Cichocki W.: Zagadnienie warunków początkowych dla rekurencyjnego algorytmu najmniejszych kwadratów z dowolnie zmienianym zbiorem pomiarów. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Automatyka nr 61, Gliwice 1982.

[3] Demidowicz B.P., Maron I.A., Szuwałowa E.J.: Metody numeryczne. PWN, Warszawa 1965.

[4] Eykhoff P.: Identyfikacja w układach dynamicznych. PWN, Warszawa 1980.

[5] Kozielski S.: Identyfikacja obiektów niestacjonarnych metodą najmniejszej ważonej sumy kwadratów. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Automatyka nr 53, Gliwice 1980.

[6] Pachelski W.: Teoria równań filtrujących i ich zastosowanie do opracowania obserwacji według metody najmniejszych kwadratów. PWN, Warszawa 1972.

[7] Perelman I.I.: Tiekuszczij regressionnyj analiz i jego primienienije w niekotorych zadaczach awtomaticzeskogo uprawlenija. Izw. AN SSSR, Energetika i awtomatika N° 2, 1960.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Zdzisław Bubnicki

Wpłynęło do Redakcji 2.11.1981 r.

РЕКУРЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ НАИМЕНШИХ ВЕСОВЫХ КВАДРАТОВ С ПЕРЕМЕННЫМ МНОЖЕСТВОМ ИЗМЕРЕНИЙ

Р е з ю м е

Представлено рекурентную версию алгоритма наименших весовых квадратов с переменным множеством измерений и постоянной для данного горизонта наблюдений матрицей весовых коэффициентов применяемого до сих пор в нерекурентной форме [7]. При большом числе идентифицированных параметров предлагаемая рекурентная версия более удобна для вычислений чем нерекурентная.

A RECURSIVE WEIGHTING LEAST-SQUARES ALGORITHM WITH MOVING DATA SET

S u m m a r y

A recursive version of weighting least-squares algorithm with moving data set and constant weighting coefficient matrix for a given observation horizon is presented. Up to now this algorithm has been used in nonrecursive version [7]. Presented recursive version of the algorithm gives many numerical advantages with comparison to nonrecursive version.