ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: AUTOMATYKA z. 71 Nr kol. 772

Andrzej JANCZAK

WPŁYW BŁĘDÓW KWANTOWANIA NA PRZEBIEG PROCESU IDENTYFIKACJI METODĄ NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW

Streszczenie. W pracy przedstawiono analizę wpływu błędów kwantowania sygnałów pomiarowych na przebieg procesu identyfikacji parametrów dyskretnego układu dynamicznego metodą najmniejszych kwadratów. Podczas analizy wykorzystano stochastyczne modele kwantyzatorów sygnałów. Identyfikacja parametrów układu dynamicznego przy wykorzystaniu skwantowanych wartości sygnałów jest równoważna identyfikacji układu, na który oddziałują w sposób addytywny dwa dodatkowe źródła zakłóceń. Sumaryczne zakłócenia oddziałujące na układ nie mają właściwości szumu białego, dlatego nie można otrzymać nieobciążonych ocen parametrów przy wykorzystaniu metody najmniejszych kwadratów. Przedstawiono wyniki symulacji procesu identyfikacji parametrów układu przy wykorzystaniu jako sygnału wejściowego sygnału z generatora liczb pseudolosowych o rozkładzie równomiernym.

1. WSTĘP

Proces kwantowania sygnałów pomiarowych podczas identyfikacji parametrów dyskretnych układów dynamicznych są źródłami błędów kwantowania, które wpływają na przebieg procesu identyfikacji. Analiza tego wpływu jest szczególnie ważna, jeżeli do pomiarów sygnałów stosowane są przetworniki analogowo-cyfrowe o stosunkowo niewielkiej liczbie bitów (6-10 bitów).

Do budowy modelu procesu identyfikacji uwzględniającego efekty kwantowania sygnałów pomiarowych można wykorzystać stochastyczne modele kwantyzatorów. Identyfikacja układu przy wykorzystaniu skwantowanych wartości sygnałów jest równoważna identyfikacji układu, na którego wejście i wyjście oddziałują dodatkowe źródła zakłóceń, które powstają w wyniku kwantowania sygnałów.

2. METODA NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW

Metoda najmniejszych kwadratów jest jedną z najczęściej stosowanych metod identyfikacji parametrów układów dynamicznych. Oprócz podstawowego algorytmu metody najmniejszych kwadratów stosowane są również wersje metody umożliwiające wyznaczanie nieobciążonych ocen parametrów w przypadku, gdy zakłócenia oddziałujące na układ są skorelowane, między innymi uogólniona metoda najmniejszych kwadratów (generalized least squares method), rozszerzona metoda najmniejszych kwadratów (extended least squares method) oraz metoda zmiennych instrumentalnych (instrumental variable method) [4].

Identyfikacja polega na wyznaczaniu modelu układu na podstawie pomiarów sygnału wejściowego i sygnału wyjściowego. Przyjmuje się, że model układu wyznaczany metodą najmniejszych kwadratów jest opisany równaniem

$$\hat{A}(z^{-1})\, y(i) = \hat{B}(z^{-1})\, u(i) + \mathcal{E}(i), \tag{1}$$

gdzie:

$u(i)$ – sygnał wejściowy,

$y(i)$ – sygnał wyjściowy,

$\mathcal{E}(i)$ – błąd uogólniony,

z^{-1} – operator opóźnienia o okres próbkowania,

$$z^{-1} u(i) = u(i-1),$$

$$\hat{A}(z^{-1}) = 1 + \hat{a}_1 z^{-1} + \ldots + \hat{a}_{n_a} z^{-n_a},$$

$$\hat{B}(z^{-1}) = \hat{b}_1 z^{-1} + \ldots + \hat{b}_{n_b} z^{-n_b},$$

przy czym: $\hat{a}_1, \ldots \hat{a}_{n_a}, \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_{n_b}$ – parametry modelu.

Przyjmuje się, że są znane n_a i n_b oraz że $n_a \geqslant n_b$. Zakłada się, że identyfikowany układ można opisać za pomocą równania

$$A(z^{-1}) y(i) = B(z^{-1})\, u(i) + e(i), \tag{2}$$

gdzie:

$e(i)$ – zakłócenie oddziałujące na układ,

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{n_a} z^{-n_a},$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \ldots + b_{n_b} z^{-n_b},$$

przy czym: $a_1, \ldots, a_{n_a}, b_1, \ldots, b_{n_b}$ – parametry układu.

Przyjmuje się, że zakłócenia oddziałujące na układ $e(i)$ mają wartość oczekiwaną równą zero

$$E\left[e(i)\right] = 0 \tag{3}$$

oraz nie są skorelowane

$$E\left[e(i)\ e(j)\right] = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad i \neq j \\ \sigma^2 & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases}. \tag{4}$$

Zakłada się również, że układ jest asymptotycznie stabilny.
Oceny parametrów układu można wyznaczyć w sposób rekurencyjny [2]:

$$\theta(i) = \theta(i-1) + P(i)x(i)\mathcal{E}(i), \tag{5}$$

$$\mathcal{E}(i) = y(i) - x(i)^T\ \theta(i-1), \tag{6}$$

$$P(i) = P(i-1) - \frac{P(i-1)\ x(i)\ x(i)^T\ P(i-1)}{1 + x(i)^T\ P(i-1)x(i)} \tag{7}$$

gdzie:

$\theta(i)^T = \left[\hat{a}_1(i) \ldots \hat{a}_{n_a}(i)\hat{b}_1(i) \ldots \hat{b}_{n_b}(i)\right]$ – wektor ocen parametrów układu,

$x(i)^T = \left[-y(i-1) \ldots -y(i-n_a)u(i-1) \ldots u(i-n_b)\right]$ – wektor pomiarowy,

$P(i)$ – macierz o wymiarach $(n_a + n_b) \times (n_a + n_b)$.

Algorytm rekurencyjny jest szczególnie przydatny do estymacji parametrów przy wykorzystaniu maszyny cyfrowej, ponieważ umożliwia dokonywanie aktualizacji wektora ocen parametrów po każdorazowym wykonaniu pomiaru sygnału wejściowego i wyjściowego.

3. STOCHASTYCZNE MODELE KWANTYZATORÓW

Ograniczenia natury fizycznej uniemożliwiają wykonywanie próbkowania sygnałów z nieskończenie dużą dokładnością. Próbki sygnałów muszą być albo obcinane, albo zaokrąglane. Proces zaokrąglania realizowany przez przetwornik analogowo-cyfrowy można przedstawić za pomocą modelu stochastycznego [3]. Równania stochastycznych modeli kwantyzatorów sygnałów wejściowego i wyjściowego można przedstawić w postaci:

$$\hat{u}(i) = u(i) + e_1(i), \tag{8}$$

$$\hat{y}(i) = y(i) + e_2(i), \tag{9}$$

gdzie:

$\hat{u}(i)$ – wartość $u(i)$ po zaokrągleniu,
$\hat{y}(i)$ – wartość $y(i)$ po zaokrągleniu,
$e_1(i)$ – błąd kwantowania sygnału $u(i)$,
$e_2(i)$ – błąd kwantowania sygnału $y(i)$.

Błędy kwantowania spełniają nierówności:

$$-\frac{\Delta}{2} < e_1(i) \leq \frac{\Delta}{2},$$

$$-\frac{\Delta}{2} < e_2(i) \quad \frac{\Delta}{2},$$

gdzie: Δ oznacza szerokość podziału kwantowania dla sygnałów $u(i)$ i $y(i)$. W stochastycznych modelach kwantyzatorów przyjmowane są zwykle następujące założenia dotyczące błędów kwantowania [3]:

- ciągi wartości $\{e_1(i)\}$ i $\{e_2(i)\}$ są realizacjami stacjonarnych procesów losowych,
- ciągi wartości $\{e_1(i)\}$ i $\{e_2(i)\}$ nie są skorelowane z odpowiednimi ciągami wartości dokładnych $\{u(i)\}$ i $\{y(i)\}$,
- zmienne losowe tworzące proces błędu kwantowania są nieskorelowane, tj. błąd jest szumem białym,
- zmienne losowe tworzące procesy błędów kwantowania mają równomierne rozkłady prawdopodobieństwa o wartościach oczekiwanych

$$\mu_{e_1} = \mu_{e_2} = 0$$

i wariancjach

$$\sigma^2_{e_1} = \sigma^2_{e_2} = \frac{\Delta^2}{12}$$

Przyjęcie tych założeń jest uzasadnione w przypadku, gdy kwantowane sygnały mają skomplikowany kształt, a przedział kwantowania jest dostatecznie mały.

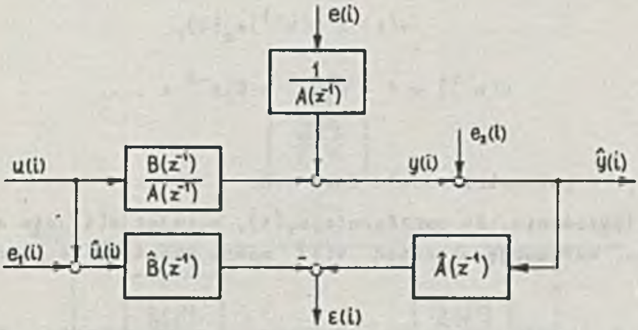
4. MODEL UKŁADU Z UWZGLĘDNIENIEM BŁĘDÓW KWANTOWANIA

Schemat blokowy identyfikowanego układu i modelu wykorzystywanego w metodzie najmniejszych kwadratów wraz ze źródłami zakłóceń wywoływanych przez kwantowanie sygnałów przedstawiono na rys. 1. Ponieważ podczas estymacji parametrów wykorzystywane są skwantowane wartości sygnałów, równanie modelu układu można zapisać w postaci:

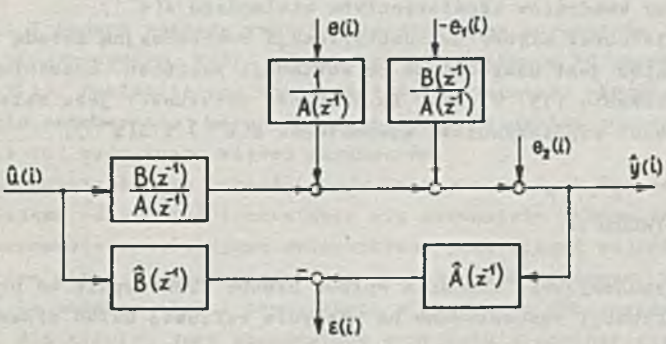
$$\hat{A}(z^{-1})\,\hat{y}(i) = \hat{B}(z^{-1})\,\hat{u}(i) + \varepsilon(i). \tag{10}$$

Podstawiając do równania (2) wyrażenia określające u(i) i y(i) wyznaczone z równań (8) i (9), otrzymuje się:

$$A(z^{-1})\hat{y}(i) = B(z^{-1})\hat{u}(i) + A(z^{-1})e_2(i) - B(z^{-1})e_1(i) + e(i). \quad (11)$$



Rys. 1. Schemat blokowy identyfikowanego układu i modelu wykorzystywanego w metodzie najmniejszych kwadratów



Rys. 2. Przekształcony schemat blokowy identyfikowanego układu i modelu

Równanie (11) opisuje identyfikowany układ z uwzględnieniem procesów kwantowania sygnałów. Schemat blokowy układu i modelu wynikający z równań (10) i (11) przedstawiono na rys. 2. Zakłócenia oddziałujące na układ opisany równaniem (11) można przedstawić za pomocą jednego zastępczego źródła zakłóceń

$$v(i) = A(z^{-1})e_2(i) - B(z^{-1})\,e_1(i) + e(i). \quad (12)$$

Zakłócenia $v(i)$ są skorelowane, dlatego oceny parametrów wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów są ocenami obciążonymi. Ciąg zakłóceń $v(i)$ można interpretować jako wynik przetwarzania w filtrze liniowym ciągu niezależnych zmiennych losowych $e_z(i)$ o wartości oczekiwanej równej 0 i wariancji σ_z^2 [2].
Zakłócenia $v(i)$ można przedstawić za pomocą modelu

$$v(i) = C(z^{-1})e_z(i), \tag{13}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots, \tag{14}$$

gdzie:

$c_1, c_2, \dots$ – parametry modelu zakłóceń.

Przyjmując założenie, że zakłócenia $e_1(i)$, $e_2(i)$ i $e(i)$ nie są ze sobą skorelowane, wariancję zakłóceń $v(i)$ można określić za pomocą wyrażenia:

$$E\left[v(i)^2\right] = \sigma^2 + \left[b_1^2 + \dots + b_{n_b}^2\right]\sigma_{e_1}^2 + \left[1 + a_1^2 + \dots + a_{n_a}^2\right]\sigma_{e_2}^2 . \tag{15}$$

Wariancja ta jest zależna od wariancji σ^2 zakłóceń $e(i)$, wariancji błędów kwantowania $\sigma_{e_1}^2$ i $\sigma_{e_2}^2$, sumy kwadratów współczynników wielomianu $B(z^{-1})$ i sumy kwadratów współczynników wielomianu $A(z^{-1})$.
Szybkość zbieżności algorytmu identyfikacji rekurencyjną metodą najmniejszych kwadratów jest uzależniona od wariancji zakłóceń oddziałujących na układ. Z wyrażenia (15) wynika, że szybkość zbieżności jest zależna od liczby i wartości współczynników wielomianów $B(z^{-1})$ i $A(z^{-1})$.

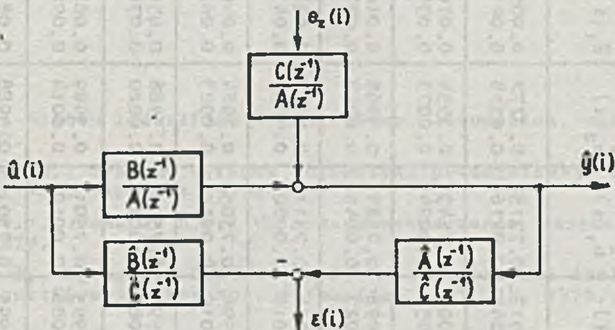
5. WYNIKI SYMULACJI

W celu symulacyjnego zbadania wpływu błędów kwantowania na przebieg procesu identyfikacji zamodelowano na maszynie cyfrowej układ dynamiczny o transmitancji

$$G(z) = \frac{0.75z^{-1} + 0.4z^{-2}}{1 + 0.8z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

Jako sygnał wejściowy wykorzystano sygnał z generatora liczb pseudolosowych o rozkładzie równomiernym na przedziale (0,1). Oceny parametrów były wyznaczane przy wykorzystaniu skwantowanych wartości $u(i)$ i $y(i)$. Liczbę poziomów kwantowania przyjęto równą 64. Oceny parametrów wyznaczono wykorzystując rekurencyjną metodą najmniejszych kwadratów i rekurencyjną rozszerzoną metodę najmniejszych kwadratów. W celu porównania wyników estymaoji przyjęto jako miarę dokładności pierwiastek z sumy kwadratów błędów ocen parametrów

$$S(i) = \sqrt{\sum_{k=1}^{2} \left[\hat{a}_k(i) - a_k\right]^2 + \left[\hat{b}_k(i) - b_k\right]^2}.$$



Rys. 3. Schemat blokowy układu i modelu wykorzystywanego w rozszerzonej metodzie najmniejszych kwadratów

W tabeli 1 podane zostały wartości średnie ocen parametrów i wartości odchyleń standardowych, które wyznaczono na podstawie 10 przebiegów oraz wartości $S(i)$. Dokładniejsze oceny wartości parametrów otrzymano przy wykorzystaniu rozszerzonej metody najmniejszych kwadratów pomimo tego, że w metodzie tej wyznaczano więcej parametrów.
Szybkość ustalania się wartości ocen parametrów $\hat{c}_1$ i $\hat{c}_2$ jest wielokrotnie mniejsza od szybkości ustalania się parametrów transmitancji układu.
W eksperymencie symulacyjnym wykorzystano jako sygnał wejściowy sygnał z generatora liczb pseudolosowych o rozkładzie równomiernym. Można przypuszczać, że podobne wyniki otrzymanoby w przypadku wykorzystania innych sygnałów, dla których jest uzasadnione przyjęcie stochastycznego modelu procesu kwantowania.

6. WNIOSKI

Zakłócenia, których źródłem jest kwantowanie sygnałów pomiarowych powodują skorelowanie zastępczych zakłóceń oddziałujących na układ, dlatego oceny parametrów otrzymane przy wykorzystaniu metody najmniejszych kwadratów są ocenami obciążonymi. Wariancja zastępczych zakłóceń jest zależna od wariancji błędów kwantowania sygnałów pomiarowych oraz od sum kwadratów współczynników wielomianów $A(z^{-1})$ i $B(z^{-1})$. Wynika stąd wniosek,

Tabela 1

Liczba iteracji i	Metodą najmniejszych kwadratów					Rozszerzona metoda najmniejszych kwadratów						
	$\hat{a}_1(i)$	$\hat{a}_2(i)$	$\hat{b}_1(i)$	$\hat{b}_2(i)$	$S(i)$	$\hat{a}_1(i)$	$\hat{a}_2(i)$	$\hat{b}_1(i)$	$\hat{b}_2(i)$	$\hat{c}_1(i)$	$\hat{c}_2(i)$	$S(i)$
25	0.7933 0.0318	0.4988 0.0148	0.7689 0.0365	0.3786 0.0306	0.02935	0.7935 0.0456	0.5013 0.0244	0.7715 0.0416	0.3777 0.0318	0.0053 0.0415	0.0066 0.0289	0.03168
100	0.7961 0.0058	0.5005 0.0048	0.7541 0.0065	0.3950 0.0070	0.00757	0.7963 0.0062	0.5003 0.0051	0.7543 0.0094	0.3959 0.0073	0.0108 0.0344	0.0052 0.0182	0.00701
200	0.7974 0.0066	0.4998 0.0027	0.7521 0.0045	0.3965 0.0051	0.00484	0.7979 0.0066	0.4998 0.0027	0.7521 0.0045	0.3968 0.0048	0.0107 0.0276	0.0066	0.00437
400	0.7972 0.0044	0.4994 0.0017	0.7512 0.0020	0.3970 0.0035	0.00432	0.7975 0.0045	0.4994 0.0018	0.7511 0.0020	0.3973 0.0037	0.0222 0.0430	0.0108 0.0203	0.00389
800	0.7978 0.0027	0.4992 0.0008	0.7505 0.0017	0.3979 0.0023	0.00318	0.7984 0.0025	0.4994 0.0010	0.7505 0.0015	0.3984 0.0023	0.0406 0.0628	0.0184 0.0321	0.00239
1200	0.7980 0.0021	0.4994 0.0006	0.7503 0.0014	0.3983 0.0018	0.00271	0.7986 0.0023	0.4995 0.0007	0.7503 0.0013	0.3988 0.0020	0.0560 0.0787	0.0244 0.0370	0.00193
1600	0.7981 0.0017	0.4994 0.0006	0.7502 0.0011	0.3984 0.0013	0.00256	0.7987 0.0017	0.4995 0.0006	0.7501 0.0010	0.3989 0.0014	0.0684 0.0921	0.0264 0.0366	0.00178
2000	0.7980 0,0017	0.4994 0,0007	0.7502 0,0011	0.3984 0,0014	0.00264	0.7987 0,0017	0.4995 0,0007	0.7501 0,0010	0.3988 0,0014	0.0813 0,1044	0.0305 0.0399	0.00184

że szybkość zbieżności algorytmu identyfikacji jest zależna od liczby i wartości współczynników wielomianów $A(z^{-1})$ i $B(z^{-1})$. Zwiększenie wariancji zakłóceń oddziałujących na układ spowodowane wpływem błędów kwantowania powoduje zmniejszenie szybkości zbieżności parametrów.
W eksperymencie symulacyjnym wykorzystano jako sygnał wejściowy sygnał z generatora liczb pseudolosowych o rozkładzie równomiernym. Dokładniejsze oceny parametrów otrzymano przy wykorzystaniu rekurencyjnej rozszerzonej metody najmniejszych kwadratów.

LITERATURA

[1] Aström K.I: System Identification-A Survey. Automatica, vol. 7, 1971, ss. 123-162.

[2] Niederliński A.: Systemy cyfrowe automatyki przemysłowej, t. II. Zastosowanie. WNT, Warszawa 1977.

[3] Oppenheim A.V., Schafer R.W.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. WKiŁ, Warszawa 1979.

[4] Söderstrom T., Ljung L., Gustavsson I.: A. Theoretical Analysis of Recursive Identification Methods. Automatica, vol. 14, 1978, ss. 221 - 244.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Ryszard Gessing

Wpłynęło do Redakcji 20.11.1982 r.

ВЛИЯНИЕ ОШИБОК ДИСКРЕТИЗАЦИИ НА ПРОЦЕСС ИДЕНТИФИКАЦИИ МЕТОДОМ НАИМЕНШИХ КВАДРАТОВ

Р е з ю м е

В статье представлен анализ влияния ошибок дискретизации входного и выходного сигналов на процесс идентификации параметров дискретной динамической системы. Использовано стохастическую модель устройства дискретизации сигналов. Задача идентификации параметров при использовании дискретных значений сигналов, сводится к задаче идентификации параметров системы, на которую действуют дополнительно два аддитивных источника помех.

THE INFLUENCE OF QUANTIZATION ERRORS ON THE LEAST
SQUARES IDENTIFICATION ALGORITHM

S u m m a r y

The analysis of the influence of quantisation errors on discrete system identification algorithm was presented.
The stochastic models of signal quantizators were used in the analysis.
The problem of discrete system parameter identification using quantized values of input and output signals can be considered as a problem of parameter identification of the system with two additional noise sources acting on its output.