ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: AUTOMATYKA z. 71 Nr kol. 772

Antoni NIEDERLIŃSKI

# STRUKTURA MODELU DYNAMICZNEGO LINIOWEGO DYSKRETNEGO DLA CELÓW IDENTYFIKACJI

Streszczenie. Przedstawiono twierdzenie o strukturze modelu obiektu dynamicznego liniowego dyskretnego, uwzględniającej istnienie czasu przesunięcia pomiędzy chwilami zmiany sygnału sterującego i chwilami próbkowania sygnału wyjściowego oraz istnienie w pierwotnym obiekcie ciągłym czasu opóźnienia nie będącego całkowitą wielokrotnością okresu próbkowania. Zwrócono uwagę na to, że wymienione dwa efekty mogą prowadzić do nieminimalnofazowości modelu dyskretnego.

## 1. MOTYWACJA

Modele obiektów dyskretnych dla celów regulacji lub kompensacji cyfrowej są z reguły wyznaczane na drodze eksperymentalnej identyfikacji, bazującej na znajomości przebiegu czasowego schodkowego sygnału sterującego oraz dyskretnego w czasie sygnału wyjściowego, rejestrowanych przez komputer przy zadanym okresie próbkowania sygnału wyjściowego i najczęściej takim samym okresie nastawy sygnału wejściowego. Ponieważ identyfikacja polega na estymacji parametrów modelu o założonej strukturze, duże znaczenie posiada wybór właściwej struktury modelu.

Na temat wyboru tej struktury spotyka się w literaturze pewną różnicę zdań. I tak np. Åström i Eykhoff (1971), Gustavsson (1972) oraz Isermann (1977) proponują opis toru sterowania obiektu dyskretnego za pomocą równania różnicowego

$$\frac{y(i)}{u(i)} = z^{-k}\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}, \tag{1.1}$$

gdzie:

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}, \tag{1.2}$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \ldots + b_n z^{-n}, \tag{1.3}$$

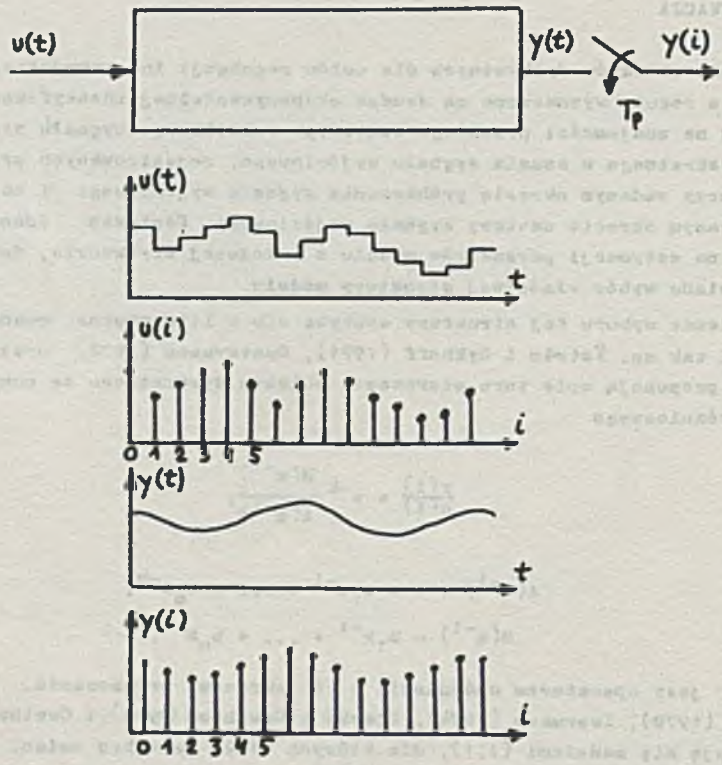
a $z^{-1}$ jest operatorem opóźnienia o i okresów próbkowania. Natomiast Åström (1970), Isermann (1974), Clarke i Gawthrop (1975) i Gawthrop (1977) posługują się modelami (1.1), dla których (1.2) jest bez zmian, lecz

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_n z^{-n} \tag{1.4}$$

Drobna na pozór różnica pomiędzy (1.3) a (1.4) może być źródłem dosyć istotnych różnic w zachowaniu się modelu; np. dla n=1 w przypadku (1.2) i (1.4) transmitancja $B(z^{-1})/A(z^{-1})$ może być nieminimalnofazowa, podczas gdy dla (1.2) i (1.3) nieminimalnofazowość w przypadku n=1 nie może wystąpić.

## 2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

Niech komputer próbkuje periodycznie ciągły sygnał wyjściowy y(t) pierwotnego obiektu ciągłego i zmienia periodycznie - niekoniecznie w tych samych chwilach czasu, lecz z tym samym okresem $T_p$ - odpowiedni sygnał sterujący u(t), (por. rys. 1). Przyporządkowując kolejnym momentom próbko-




Rys. 1. Relacje czasowe pomiędzy ciągłym i próbkowanym sygnałem wyjściowym a sygnałem sterującym obiektu

wania sygnału wyjściowego liczby naturalne $i_y = 0,1,2,3,\ldots$, a kolejnym momentom zmiany sygnału sterującego liczby naturalne $i_u = 0,1,2,3,\ldots\ldots$, można obiekt dyskretny widziany przez komputer opisać za pomocą ciągu czasowego wejściowego $\{y(i_y)\} = \{y(0), y(1), y(2),\ldots\}$ oraz ciągu czasowego sterującego $\{u(i_u)\} = \{u(0), u(1), u(2),\ldots\}$. Podkreśla się, że:

- Równość wartości indeksów $i_u = i_y$ oznacza tylko, że odpowiednie elementy ciągu wejściowego i wyjściowego odpowiadają tej samej kolejnej nastawie i temu samemu kolejnemu próbkowaniu, lecz niekoniecznie odpowiadają tej samej chwili czasu. Przestrzega się jednak konwencję, zgodnie z którą i-te próbkowanie sygnału wyjściowego nie następuje przed i-tą nastawą sygnału sterującego.
- Równość okresu próbkowania sygnału wyjściowego i okres nastawy sygnału sterującego obejmuje również przypadek "próbkowania" sygnału wyliczanego przez komputer na podstawie pomiarów dokonywanych z większą częstotliwością próbkowania. Sygnał "próbkowany" znajduje się wtedy w określonej komórce pamięci komputera.

Przykładem może być "próbkowanie" z okresem $3T_p$ sumy trzech kolejnych pomiarów, otrzymanych przy okresie próbkowania $T_p$.
Dla uproszczenia notacji będzie się w dalszym ciągu pisać $u(i)$ zamiast $u(i_u)$, $y(i)$ zamiast $y(i_y)$ oraz $x(i)$ zamiast $x(i_x)$, pamiętając jednakże o wprowadzonej konwencji.

## 3. TWIERDZENIE O STRUKTURZE MODELU

Struktura modelu dynamicznego liniowego dyskretnego dla celów identyfikacji powinna odznaczać się pewną uniwersalnością, umożliwiającą uwzględnienie takich istotnych (jak się w dalszym ciągu okaże) efektów, jak:

- Istnienie czasu przesunięcia pomiędzy odpowiadającymi sobie chwilami zmiany sygnału sterującego oraz próbkowania sygnału wyjściowego. Istnienie czasu przesunięcia jest związane z istotą działania jednoprocesorowego systemu komputerowego, a jego wielkość "wchodzi" w parametry modelu obiektu dyskretnego w wyniku jego identyfikacji.
- Istnienie, w pierwotnym obiekcie ciągłym, czasu opóźnienia nie będącego całkowitą wielokrotnością okresu próbkowania.

Efekty te uwzględnia struktura określona przez następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE

Obiekt ciągły opisany równaniami

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{b}\,u(t-T_0), \qquad \underline{x}(t) \in R_n \tag{3.1}$$

$$y(t) = \underline{c}^T\underline{x}(t) \tag{3.2}$$

o wejściu $u(t)$ będącym schodkową funkcją czasu o szerokości schodka równej $T_p$ i wyjściu $y(t)$ próbkowanym z okresem $T_p$, jest w przypadku istnienia:

- czasu przesunięcia $\Delta$ pomiędzy odpowiadającymi sobie chwilami zmiany sygnału wejściowego i próbkowania sygnału wyjściowego oraz
- czasu opóźnienia $T_0$ nie będącego całkowitą wielokrotnością okresu próbkowania $T_p$,

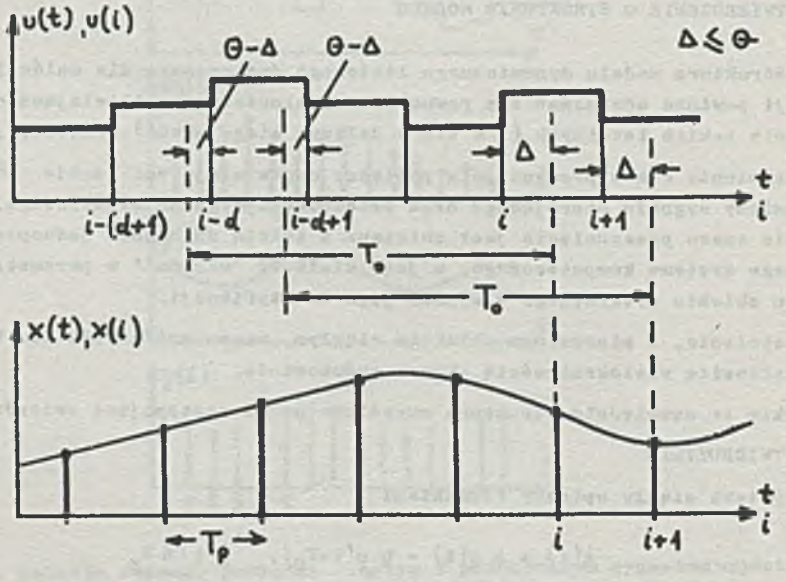
opisany modelem liniowym dyskretnym

$$\frac{y(i)}{u(i)} = z^{-k}\,\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}} \tag{3.3}$$

Dowód:

Niech kolejne chwile próbkowania sygnału wyjściowego opóźniają się względem kolejnych chwil zmiany sygnału sterującego o czas przesunięcia $\Delta$ i niech

$$\frac{T_0}{T_p} = d + \frac{\theta}{T_p}, \tag{3.4}$$




Rys. 2. Szczegółowe relacje czasowe pomiędzy ciągłym i próbkowanym sygnałem wyjściowym a sygnałem sterującym dla $\Delta \leq 0$

gdzie $d$ jest liczbą całkowitą, a $0 \leqslant \Theta < T_p$ jest ułamkowym czasem opóźnienia obiektu. Zależnie od stosunku $\Delta$ i $\Theta$ trzeba rozpatrzeć dwa przypadki:

1) Przypadek $\Delta \leqslant \Theta$ (por. rys. 2).

Oznaczając $\underline{x}(t_i) = \underline{x}(i)$, otrzymuje się z (3.1)

$$\underline{x}(i+1) = e^{\underline{A}T_p}\,\underline{x}(i) + \int_{t_i}^{t_i+T_p} e^{\underline{A}(t_i+T_p-\tau)}\,\underline{b}\,u(\tau-T_0)\,d\tau =$$

$$= e^{\underline{A}T_p}\,\underline{x}(i) + \int_{t_i}^{t_i+\Theta-\Delta} e^{\underline{A}(t_i+T_p-\tau)}\,d\tau\,\underline{b}\,u(i-(d+1)) + \tag{3.5}$$

$$+ \int_{t_i+\Theta-\Delta}^{t_i+T_p} e^{\underline{A}(t_i+T_p-\tau)}\,d\tau\,\underline{b}\,u(i-d) = \underline{P}\,\underline{x}(i) + \underline{q}\,u(i-(d+1)) + \underline{r}\,u(i-d)$$

gdzie:

$$\underline{P} = e^{\underline{A}T_p} \tag{3.6}$$

$$\underline{q} = (e^{\underline{A}T_p} - e^{\underline{A}(T_p-\Theta+\Delta)})\,\underline{A}^{-1}\underline{b} \tag{3.7}$$

$$\underline{r} = (e^{\underline{A}(T_p-\Theta+\Delta)} - \underline{1})\,\underline{A}^{-1}\underline{b}. \tag{3.8}$$

Uwzględniając (3.2) dla dyskretnych chwili czasu $iT_p$, odpowiadających chwilom próbkowania stanu $\underline{x}(t)$, otrzymuje się transmitancję

$$\frac{y(i)}{u(i)} = z^{-d}\,\underline{c}^T(z\underline{1} - \underline{P})^{-1}\,(\underline{r} + \underline{q}z^{-1}) \tag{3.9}$$

dającą się zapisać w postaci (3.3) dla $k = d+1$.

2) Przypadek $\Theta \leqslant \Delta$ (rys. 3)

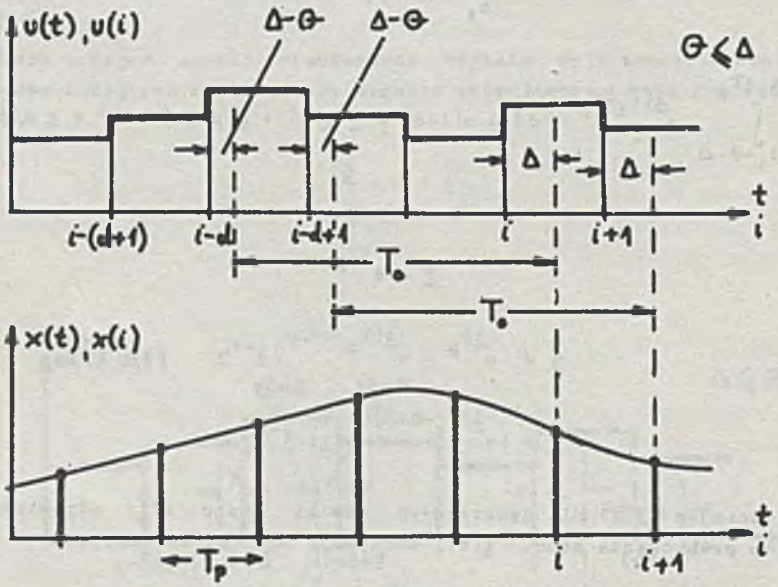
Dla tego przypadku

$$\underline{x}(i+1) = e^{\underline{A}T_p}\,\underline{x}(i) + \int_{t_i}^{t_i+T_p} e^{\underline{A}(t_i+T_p-\tau)}\,\underline{b}\,u(\tau-T_0)\,d\tau =$$

$$= e^{\underline{A}T_p}\,\underline{x}(i) + \int_{t_i}^{t_i+T_p-(\Delta-\Theta)} e^{\underline{A}(t_i+T_p-\tau)}\,d\tau\;\underline{b}\;u(i-d) +$$

$$+ \int_{t_i+T_p-(\Delta-\Theta)}^{t_i+T_p} e^{\underline{A}(t_i+T_p-\tau)}\,d\tau\;\underline{b}\;u(i-d+1) =$$

$$= \underline{P}\;\underline{x}(i) + \underline{r}'u(i-d) + \underline{s}\;u(i-d+1) \tag{3.10}$$




Rys. 3. Szczegółowe relacje czasowe pomiędzy ciągłym i próbkowanym sygnałem wyjściowym a sygnałem sterującym dla $\Theta < \Delta$

gdzie: $\underline{P}$ jest określone przez (3.6)

$$\underline{r}' = (e^{\underline{A}T_p} - e^{\underline{A}(\Delta-\Theta)})\,\underline{A}^{-1}\,\underline{b} \tag{3.11}$$

$$\underline{s} = (e^{\underline{A}(\Delta-\Theta)} - \underline{1})\underline{A}^{-1}\underline{b} \tag{3.12}$$

Uwzględniając (3.2), otrzymuje się

$$\frac{y(i)}{u(i)} = z^{-d}\;\underline{c}^T(z\underline{1} - \underline{P})^{-1}\;(\underline{r}' + \underline{s}\;z), \tag{3.13}$$

co można również zapisać w postaci (3.3) dla k=d.

## 4. GENERACJA NIEMINIMALNOFAZOWOŚCI

Obiektem nieminimalnofazowym nazywa się m.in. obiekt posiadający niestabilne zera. Nieminimalnofazowość jest w przypadku obiektów ciągłych rzadko spotykaną anomalią. Natomiast w przypadku obiektów dyskretnych jest ona raczej normą aniżeli wyjątkiem. W obiektach tych nieminimalnofazowość jest generowana przede wszystkim w wyniku istnienia ułamkowego czasu opóźnienia i czasu przesunięcia. Ilustruje to następujący prosty przykład:

Rozpatruje się model (3.9) dla przypadku $n=1$, $\Delta=0$, $d=0$ i $\Theta>0$ dla którego

$$\frac{y(i)}{u(i)} = z^{-1}\,\frac{r + q\,z^{-1}}{1 - p\,z^{-1}}, \tag{4.1}$$

gdzie:

$$p = e^{-T_p/T} \tag{4.2}$$

$$r = 1 - e^{-T_p/T}\,e^{\Theta/T} \tag{4.3}$$

$$q = e^{-T_p/T}\,(e^{\Theta/T} - 1) \tag{4.4}$$

gdzie: $\underline{A} = A = -1/T$, $\underline{b} = b = 1/T$. Model ten jest więc dyskretnym modelem obiektu inercyjnego pierwszego stopnia z czasem opóźnienia $\Theta < T_p$, opisanego równaniem:

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{T}\,x(t) + \frac{1}{T}\,u(t-\Theta) \tag{4.5}$$

$$y(t) = x(t) \tag{4.6}$$

którego wyjście jest próbkowane w tych samych momentach czasu, w których zmienia się sygnał sterujący.

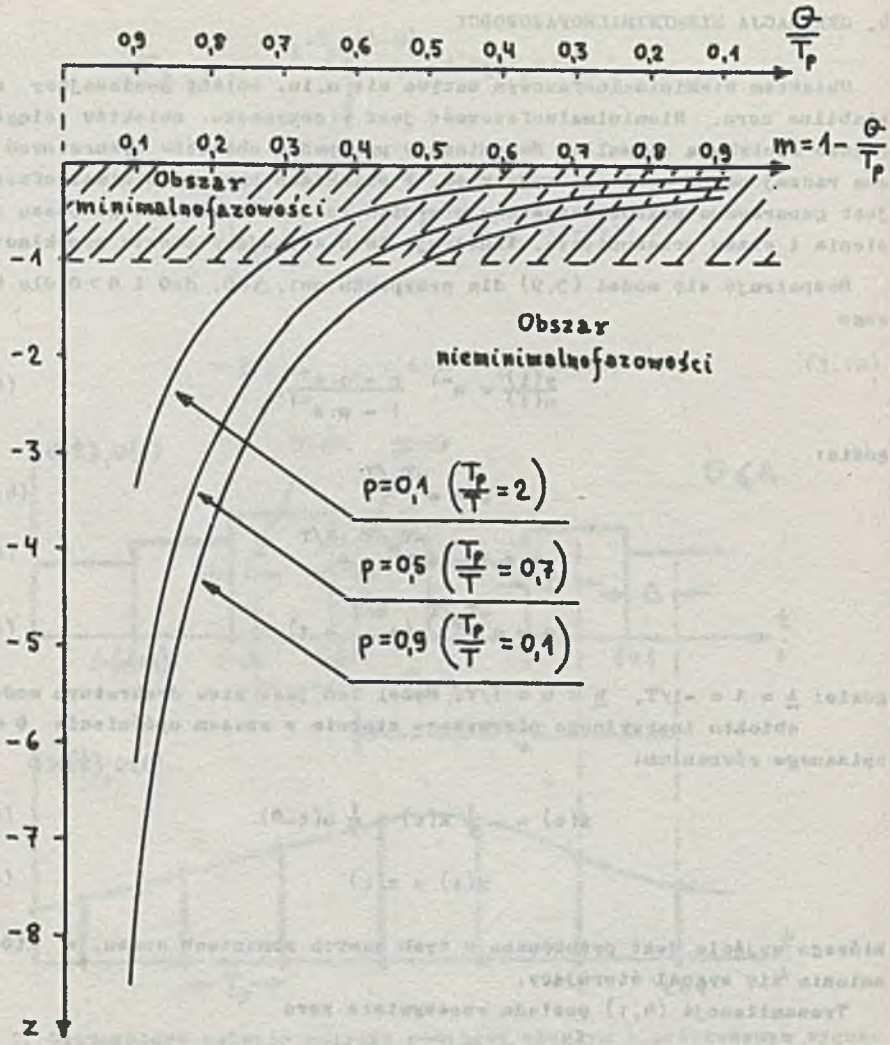
Transmitancja (4.1) posiada rzeczywiste zero

$$z = -\frac{q}{r} = \frac{e^{-T_p/T}\,(1 - e^{\Theta/T})}{1 - e^{-T_p/T}\,e^{\Theta/T}} = \frac{p - p^m}{1 - p^m} \tag{4.7}$$

gdzie:

$$m = 1 - \frac{\Theta}{T_p}. \tag{4.8}$$

Rysunek 4 przedstawia zależność tego zera od parametru $m$ i stosunku $\Theta/T_p$. Jak widać, szczególnie dla często spotykanych dużych wartości $p$ małych stosunków $T_p/T$ istnieje szczególnie duży zakres zmian $T_m/T_p$, dla którego transmitancja (3.1) jest nieminimalnofazowa.




Rys. 4. Zależność wartości zera transmitancji (4.1) od czasu opóźnienia

Ponieważ wielkości $\Theta$ i $\Delta$ wchodzą do wyrażeń na $q$, $r$, $r'$ i $s$ zawsze jako różnica, nieminimalnofazowość może być również generowana w wyniku istnienia czasu przesunięcia $\Delta$ przy zerowym ułamkowym czasie opóźnienia lub przy równoczesnym wystąpieniu $\Delta > 0$ i $\Theta > 0$. Zjawisko generacji nieminimalnofazowości występuje w tym przypadku również dla $n > 1$, aczkolwiek jego analiza jest wtedy bardziej utrudniona.

Znajomość źródeł nieminimalnofazowości modelu dyskretnego posiada znaczenie z tego powodu, gdyż nieminimalnofazowość obiektu uniemożliwia praktycznie stosowanie szeregu algorytmów regulacji cyfrowej, np. klasycznego algorytmu regulacji minimalnowariancyjnej (por. Åström 1970).

LITERATURA

[1] Åström K.J.: Introduction to Stochastic Control Theory. Academic Press New York 1970.

[2] Åström K.J., Eykhoff P.: System identification - a survey. Automatica, 1971, vol. 7, No 2, pp. 123-162.

[3] Clarke D.W., Gawthrop P.J.: Self-tuning controller, Proc. IEE, 1975, vol. 122, No 9, pp. 929-934.

[4] Gawthrop P.J.: Some Interpretations of the Self-Tuning Controller. Proc. IEE, vol. 124, 1977, pp. 889-894.

[5] Gustavsson I.: Comparision of different methods for identification of industrial processes. Automatica, 1972, vol. 8, pp. 127-142.

[6] Isermann R.: Prozessidentifikation. Berlin 1974, Springer Verlag.

[7] Isermann R.: Digitale Regelsysteme. Berlin 1977, Springer Verlag.

Recenzent: Prof. dr inż. Henryk Górecki

Wpłynęło do Redakcji 20.05.1982 r.

СТРУКТУРА ДИНАМИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ ДЛЯ ЦЕЛЕЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Р е з ю м е

Представлено теорему о структуре модели динамического дискретного линейного объекта, которая учитывает сдвиг между моментами времени изменения управляющего сигнала и опроса выходного сигнала, а также времени запаздывания в исходном непрерывном объекте отличающегося от целочисленной кратности периода опроса. Показано, что в этих случаях динамическая линейная модель часто не минимально-фазовая.

THE STRUCTURE OF A DYNAMIC LINEAR DISCRETE-TIME MODEL FOR IDENTIFICATION PURPOSES

S u m m a r y

The paper presents a theorem which determines a universal structure of dynamic linear discrete-time models for identification purposes. The struc-

tures takes account of the occurrence of timr lags between control switching instants and output sampling instants and the occurrence of time delays which are not integer multiples of the sampling interval. It has been shown that the above mentioned phenomena are the sources of nonminimum-phase behaviour of discrete-time models.