ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: AUTOMATYKA z. 71 Nr kol. 772

Antoni NIEDERLIŃSKI

WPŁYW OKRESU PRÓBKOWANIA NA PARAMETRY MODELI OBIEKTÓW DYNAMICZNYCH LINIOWYCH DYSKRETNYCH

Streszczenie. Przedstawiono dwa twierdzenia umożliwiające wyznaczenie modeli dynamicznych liniowych dyskretnych dla okresów próbkowania będących całkowitą wielokrotnością tego okresu próbkowania, dla którego został zidentyfikowany model toru sterowania i model toru zakłócenia obiektu.

1. MOTYWACJA

Podstawowym modelem obiektu dynamicznego liniowego dyskretnego poddanego zakłóceniom stochastycznym jest model w postaci równania różnicowego:

$$y(i) = z^{-k}\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(i) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})\nabla^{d}}e(i), \tag{1.1}$$

gdzie: $y(i)$ jest ciągiem wyjściowym, $u(i)$ jest ciągiem sterującym, a $e(i)$ jest dyskretnym białym szumem typu $(0, \lambda^2)$, generującym zakłócenie

$$v(i) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})\nabla^{d}}e(i) \tag{1.2}$$

będące zastępczym zakłóceniem, sprowadzonym na wyjście obiektu. Poszczególne wielomiany są postaci:

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \ldots + a_nz^{-n} \tag{1.3}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + \ldots + b_nz^{-n} \tag{1.4}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1z^{-1} + \ldots + c_qz^{-q} \tag{1.5}$$

$$D(z^{-1}) = 1 + d_1z^{-1} + \ldots + d_pz^{-p} \tag{1.6}$$

$$\nabla = 1 - z^{-1} \tag{1.7}$$

gdzie: z^{-i} jest operatorem opóźnienia o $\underset{\sim}{i}$ okresów próbkowania, k jest dyskretnym czasem opóźnienia obiektu, a wykładnik $\underset{\sim}{d}$ przyjmuje wartości

d = 0 dla ciągu v(i) stacjonarnego,
d = 1 dla ciągu v(i) o zmieniającej się wartości średniej,
d = 2 dla ciągu v(i) wykazującego trend narastania i/ lub opadania.

Znaczenie modelu (1.1) polega na tym, że opracowano dla niego szereg bardzo efektywnych algorytmów regulacji minimalnowariancyjnej, (por. Åström (1970), Box i Jenkins (1971) oraz Clarke i Hastings-James (1971)), jak i na tym, że dla tego modelu istnieją bardzo efektywne techniki identyfikacji (por. Box i Jenkins (1971) oraz Eykhoff (1980)). Znaczenie tego modelu znacznie wzrosło z chwilą opracowania dla niego w pierwszej połowie lat siedemdziesiątych szeregu efektywnych algorytmów regulacji samonastrajającej (por. Åström i in. (1977), Clarke i Gawthrop (1975), Gawthrop (1977)).

Wszystkie parametry wielomianów (1.3) - (1.6) modelu są funkcjami okresu próbkowania. Wybór okresu próbkowania wpływa bardzo silnie (w sposób mało dokładnie zbadany) na właściwości wymienionych układów regulacji. Dla przeprowadzenia takich badań duże znaczenie ma znajomość zależności wymienionych parametrów od okresu próbkowania.
Ponieważ jednak:

- zależności analityczne wiążące wymienione parametry z parametrami pierwotnego obiektu ciągłego i okresem próbkowania najczęściej nie są znane np. w przypadku gdy model (1.1) został wyznaczony na drodze doświadczalnej identyfikacji,
- powtarzanie doświadczeń identyfikacyjnych dla wielu różnych okresów próbkowania może być kosztowne,
- wielokrotne przetwarzanie tych samych serii pomiarowych dla okresów próbkowania będących wielokrotnościami podstawowego okresu próbkowania nie zawsze jest możliwe, np. w przypadku identyfikacji za pomocą algorytmów rekurencyjnych,

dobrze byłoby dysponować zależnościami umożliwiającymi określenie wpływu okresu próbkowania wyłącznie na podstawie znajomości modelu (1.1) otrzymanego w wyniku identyfikacji. Łatwo zauważyć, że zależności takie mogą istnieć wyłącznie dla okresów próbkowania będących całkowitymi wielokrotnościami tego okresu próbkowania, dla którego wyznaczony został model obiektu dyskretnego.

2. WPŁYW OKRESU PRÓBKOWANIA NA MODEL TORU STEROWANIA OBIEKTU

Określenie zależności parametrów modelu toru sterowania od okresu próbkowania jest zagadnieniem stosunkowo prostym. Sposób postępowania ilustruje następujący przykład:

Zakłada się, że dla okresu próbkowania T_p obiekt dyskretny jest opisany równaniem różnicowym

$$y(i)\,(1 - pz^{-1}) = z^{-2}(1 - p)\,u(i), \qquad 0 < p < 1 \tag{2.1}$$

Aby wyznaczyć równanie różnicowe tego obiektu dla okresu próbkowania $2T_p$, należy (2.1) tak przekształcić, by zawierało wyłącznie operatory opóźnienia z^{-2} na dwa okresy próbkowania. W tym celu mnoży się (2.1) przez $(1 + pz^{-1})$, otrzymując:

$$y(i)\,(1 - p^2 z^{-2}) = z^{-2}(1 - p)\,(1 + pz^{-1})\,u(i) =$$

$$= (1 - p)\left[u(i-2) + p\,u(i-3)\right] \tag{2.2}$$

gdzie lewa strona posiada już wymaganą postać. Dla dalszego przekształcenia strony prawej należy zauważyć, że podwojeniu okresu próbkowania musi towarzyszyć podwojenie okresu nastawy wielkości sterującej, która obecnie będzie zmieniać się w chwilach i, i-2, i-4 itd., natomiast nie będzie zmieniać się w chwili i-3, dla której zachowa tę samą wartość co w chwili i-4. Stąd (2.2) przyjmie postać

$$y(i) - p^2 y(i-2) = (1 - p)\left[u(i-2) + p\,u(i-4)\right] \tag{2.3}$$

a wprowadzając dla nowego okresu próbkowania nowy operator opóźnienia z_2^{-1}

$$z_2^{-1} = z^{-2} \tag{2.4}$$

i uwzględniając, że wartości dyskretnych chwil czasu wymagają następującego przenumerowania

$$\begin{aligned} i &= (i)_2 \\ i-2 &= (i-1)_2 \\ i-4 &= (i-2)_2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

otrzymuje się nowy model dyskretny dla okresu próbkowania $2T_p$ w postaci:

$$\frac{y(i)_2}{u(i)_2} = z_2^{-1}\,\frac{(1 - p)\,(1 + pz_2^{-1})}{1 - p^2\,z_2^{-1}}. \tag{2.6}$$

Dla przypadku ogólnego słuszne jest następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 1

Jeżeli tor sterowania obiektu dyskretnego jest dla okresu próbkowania T_p opisany równaniem różnicowym

$$\frac{y(i)}{u(i)} = z^{-k}\,\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}, \tag{2.6}$$

gdzie:

$$A(z^{-1}) = \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i z^{-1}), \tag{2.7}$$

to dla okresu próbkowania hT_p $(h = 2,3,4,\ldots)$ będzie opisany równaniem różnicowym

$$\frac{y(i)_h}{u(i)_h} = z_h^{-p}\,\frac{B_h(z_h^{-1})}{A_h(z_h^{-1})}, \tag{2.8}$$

gdzie:

$$z_h^{-1} = z^{-h} \tag{2.9}$$

jest operatorem opóźnienia o nowy okres próbkowania hT_p,

$$A_h(z_h^{-1}) = \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i^h z_h^{-1}) \tag{2.10}$$

$$z_h^{-p} B_h(z_h^{-1})u(i)_h = \left[z^{-k}B(z^{-1})\, M(p_1)\ldots M(p_n)\, u(i)\right]\Bigg|_{\substack{i = (i)_h \\ i-h = (i-1)_h \\ \ldots \\ i-hm = (i-m)_h \\ i-g = (i-j)_h,\ (j-1)h < g < jh}} \tag{2.11}$$

$$M(p_i) = 1 + p_i z^{-1} + p_i^2 z^{-2} + \ldots + p_i^{h-1} z^{-(h-1)} \tag{2.12}$$

Dowód:

Dowód przebiega podobnie jak rozwiązywanie przytoczonego przykładu. Korzysta się przy tym z zależności

$$1 - p^h z^{-h} = (1 - pz^{-1})\,(1 + pz^{-1} + p^2 z^{-2} + \ldots + p^{h-1} z^{-(h-1)}) =$$

$$= (1 - pz^{-1})\, M(p) \tag{2.13}$$

oraz z faktu, że dla próbkowania z okresem hT_p wielkość sterująca może zmieniać się wyłącznie w chwilach i, i-h, i-2h,..., natomiast dla chwil i-g, gdzie

$$(j-1)h < g < jh \tag{2.14}$$

zachowuje wartość, którą przyjęła dla chwil i-jh, gdyż na podstawie (2.14) jest

$$i - jh < i - g < i - (j-1)h \tag{2.15}$$

Łatwo zauważyć, że wielomiany A_h i B_h są zawsze tego samego stopnia co wielomiany A i B. Nowy dyskretny czas opóźnienia p jest określony zależnością

$$p = \frac{k}{h}, \quad \text{jeżeli} \quad k = bp \tag{2.16}$$

lub - w przeciwnym przypadku - nierównością

$$(p-1)h < k < ph \tag{2.17}$$

Z przytoczonego twierdzenia wynika również następująca interesująca właściwość modeli dyskretnych: jeżeli model jest asymptotycznie stabilny, tzn. $|p_i| < 1$ dla $i = 1,\dots,n$, to łatwo zauważyć, że ponieważ współczynnik przy operatorze z_h^{-n} w wielomianie A_h jest równy p_i^{nh}, a w wielomianie B_h jest równy $b_n p_1^{h-1} p_2^{h-1} \dots p_n^{h-1}$, ze wzrostem krotności h współczynniki te stają się pomijalnie małe. A więc - zgodnie z intuicyjnym odczuciem - zwiększenie okresu próbkowania sprawia, że model dyskretny staje się coraz bardziej "zgrubny", tzn. wielomiany A_h i B_h stają się wielomianami coraz niższego stopnia. Efekt ten można wyraźnie zaobserwować przy doświadczalnej identyfikacji.

3. WPŁYW OKRESU PRÓBKOWANIA NA MODEL TORU ZAKŁÓCENIA OBIEKTU

Określenie zależności parametrów toru zakłócenia od okresu próbkowania jest sprawą trudniejszą zarówno koncepcyjnie, jak i obliczeniowo. Wynika stąd, że model ten nie jest opisem dyskretnym jakiegoś pierwotnego obiektu ciągłego z pobudzeniem schodkowym. Związane z tym trudności ilustruje następujący przykład:

Zakłada się, że dla okresu próbkowania T_p zakłócenie sprowadzone na wyjście obiektu jest opisane modelem o postaci

$$v(i)\,(1 + dz^{-1}) = e(i)\,(1 + cz^{-1}), \tag{3.1}$$

gdzie $-1 \leqslant d < 1$, $-1 < c < 1$, a $e(i)$ jest białem szumem typu $(0, \lambda^2)$. Aby wyznaczyć model tego ciągu dla okresu próbkowania $2T_p$, należy - podobnie jak w p. 4 - przekształcić (3.1) tak, by zawierało wyłącznie operatory opóźnienia z^{-2} na dwa okresy próbkowania. W tym celu mnoży się (3.1) przez $1-dz^{-1}$, otrzymując:

$$v(i)\,(1 - d^2z^{-2}) = e(i)\,(1 + cz^{-1})\,(1 - dz^{-1}) \tag{3.2}$$

Ciąg

$$w(i) = e(i)\,(1 + cz^{-1})\,(1 - dz^{-1}) \tag{3.3}$$

odpowiadający prawej stronie modelu (3.2) jest ciągiem typu MA (Moving Average) rzędu 2. Należy z kolei znaleźć inny ciąg $w'(i)$, który będzie opisany wyłącznie za pomocą operatorów z^{-2}, z^{-4} itd. i który będzie miał dla nowego okresu próbkowania $2T_p$ takie same autokoleracje jak ciąg $w(i)$. Innymi słowy - ciąg $w'(i)$ będzie równoważny ciągowi $w(i)$ w okresach próbkowania $2T_p$. Wynika to z istnienia wzajemnie jednoznacznej zależności pomiędzy modelem różnicowym ciągu MA a jego autokorelacjami. Ponieważ ciąg MA rzędu q posiada autokorelacje równe zeru dla przesunięcia $m > q$ i ponieważ zgodnie z drugim z powyższych wymagań autokorelacje ciągów powinny spełniać warunek:

$$R_{ww}(0) = R_{w'w'}(0) \tag{3.4}$$

$$R_{ww}(2) = R_{w'w'}(1)_2 \tag{3.5}$$

$$R_{ww}(2m) = R_{w'w'}(m)_2 = 0 \quad \text{dla} \quad m > 1 \tag{3.6}$$

to ciąg $w'(i)$ będzie ciągiem MA rzędu 1 (dla okresu próbkowania $2T_p$) lub rzędu 2, lecz bez operatora z^{-1} (dla okresu próbkowania T_p) opisany zależnością

$$w'(i) = e'(i)\,(1 + c'\,z^{-2}) \tag{3.7}$$

gdzie $e'(i)$ jest białym szumem typu $(0, \lambda'^2)$.
Ponieważ

$$R_{ww}(0) = E\left\{w(i)\,w(i)\right\} = \lambda^2\left[1 + (c-d)^2 + c^2d^2\right] \tag{3.8}$$

$$R_{ww}(2) = E\left\{w(i)\,w(i-2)\right\} = -\lambda^2\,c\,d \tag{3.9}$$

oraz podobnie

$$R_{w'w'}(0) = \lambda'^2\,(1 + c'^2) \tag{3.10}$$

$$R_{w'w'}(2) = \lambda'^2\,c'. \tag{3.11}$$

to przyrównując (3.8) i (3.10) oraz (3.9) i (3.11), otrzymuje się układ dwóch równań nieliniowych, z których można wyznaczyć niewiadome λ' i c'. A więc dla okresu próbkowania $2T_p$ model przyjmie postać

$$v(i)\,(1 - d^2 z^{-2}) = e'(i)\,(1 + c'\,z^{-2}) \tag{3.12}$$

lub

$$v(i)_2\,(1 - d^2 z_2^{-1}) = e'(i)_2\,(1 + c'\,z_2^{-1}) \tag{3.13}$$

gdzie: $z_2^{-1} = z^{-2}$ jest operatorem opóźnienia o 2 okresy próbkowania.

Dla przypadku ogólnego słuszne jest następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 2

Jeżeli ciąg czasowy jest dla okresu próbkowania T_p opisany modelem ARIMA[x)]

$$\frac{y(i)}{e(i)} = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})\,\nabla^d}, \tag{3.14}$$

gdzie:

$$D(z^{-1}) = \prod_{i=1}^{p} (1 - r_i z^{-1}) \tag{3.15}$$

$$\nabla^d = (1 - z^{-1})^d \tag{3.16}$$

to dla okresu próbkowania hT_p $(h = 2,3,4,\ldots)$ ciąg ten będzie opisany modelem ARIMA

$$\frac{y(i)_h}{e'(i)_h} = \frac{C_h\,(z_h^{-1})}{D_h(z_h^{-1})\,\nabla_h^d}, \tag{3.17}$$

gdzie:

$$z_h^{-1} = z^{-h} \tag{3.18}$$

jest operatorem opóźnienia o nowy okres próbkowania hT_p,

$$D_h(z_h^{-1}) = \prod_{i=1}^{p} (1 - r_i^h\, z_h^{-1}) \tag{3.19}$$

$$\nabla_h^d = (1 - z_h^{-1})^d \tag{3.20}$$

x) ARIMA - Autoregressive Integrated Moving Average

a $C_h(z_h^{-1})\, e'(i)_h$ jest takim ciągiem MA rzędu p', gdzie p' jest największą liczbą naturalną spełniającą nierówność

$$p'h \leqslant q + (p + d)(h - 1), \tag{3.21}$$

który dla chwili $(i)_h = 0,1,2,3,\ldots,p'$, ma takie same autokorelacje jak ciąg MA

$$C(z^{-1})\, M(r_1) \ldots M(r_p)\, M^d(1)\, e(i), \tag{3.22}$$

odpowiednio dla chwil $i=0,\ h,\ 2h,\ 3h,\ldots$, gdzie

$$M(r_i) = 1 + r_i z^{-1} + r_i^2 z^{-2} + \ldots + r_i^{h-1} z^{-(h-1)} \tag{3.23}$$

Dowód:

Dowód przebiega podobnie jak rozwiązanie przytoczonego przykładu przy czym korzysta się z zależności

$$1 - r^h z^{-h} = (1 - rz^{-1})(1 + rz^{-1} + r^2 z^{-2} + \ldots + r^{h-1} z^{-(h-1)}) =$$

$$= (1 - rz^{-1})\, M(r) \tag{3.24}$$

Nierówność (3.21) wynika stąd, że ciąg (3.22) będący ciągiem MA rzędu $(p+d)(h-1)$ zostaje zastąpiony przez ciąg MA zawierający wyłącznie operatory z^{-h} i posiadający różne od zera autokorelacje tylko dla takich przesunięć będących całkowitą wielokrotnością h jak ciąg (3.22), a więc dla $0,h,2h,\ldots,p'h$.

4. INNE ZASTOSOWANIA

Przedstawione twierdzenia stanowią również podstawę teoretyczną cyfrowej symulacji wpływu okresu próbkowania na właściwości dyskretnych układów regulacji. Wpływ ten był do tej pory badany wyłącznie na drodze symulacji hybrydowej (analogowo-cyfrowej).

LITERATURA

[1] Åström K.J.: Introduction to Szchastic Control Theory. Academic Press, New York 1970.

[2] Åström K.J. i in.: Theory and applications of self-tuning regulators. Automatica, vol. 13, 1977, pp. 457-476.

[3] Box G.E.P., Jenkind G.M.: Time Series Analysis Forecasting and Control. San Francisco 1971, Holdan Day.

[4] Clarke D.W., Hastings-James R.: Design of digital controllers for randomly disturbed systems. Proc. IEE, 1971, vol. 118, No, 10, pp. 1503-1506.

[5] Clarke D.W., Gawtrhop P.J.: Self-tuning controller. Proc. IEE, 1975, vol. 122, No. 9, pp. 929-934.

[6] Eykhoff P.: Identyfikacja w układach dynamicznych. PWN, Warszawa 1980.

[7] Gawthrop P.J.: Some interpretations of the self-tuning controller. Proc. IEE, vol. 124, 1977, pp. 889-894.

Recenzent: Prof. dr inż. Henryk Górecki

Wpłynęło do Redakcji 20.05.1982 r.

ВЛИЯНИЕ ПЕРИОДА ИМПУЛЬСИРОВАНИЯ НА СВОЙСТВА МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ

Р е з ю м е

Представлено две теоремы дающие возможность создать модели динамических дискретных линейных объектов для периода импульсирования ровного кратности периода, для которого проведено идентификацию канала управления и канала помех объекта.

THE INFLUENCE OF SAMPLING INTERVAL ON DYNAMIC LINEAR DISCRETE-TIME MODELS

S u m m a r y

The paper present two theorems for the determination of discrete-time control- and disturbance transfer functions for sampling intervals which are integer multiples of the basic sampling interval, for with the basic discrete-time model has been identified.