ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: AUTOMATYKA z. 71 Nr kol. 772

Andrzej ORDYS

STATYCZNE STEROWANIE STOCHASTYCZNIE OPTYMALNE Z OGRANICZENIAMI

Streszczenie. W pracy rozwiązany jest problem sterowania stochastycznie optymalnego statycznego w przypadku równościowego ograniczenia na wartość przeciętną sterowania i ograniczenia na maksymalną i minimalną dopuszczalną wartość sterowania.
To drugie ograniczenie jest pewną modyfikacją w stosunku do rezultatów uzyskanych w pracy [2].
Podano przykład, dla którego uzyskuje się wyniki w formie analitycznej.

1. WSTĘP

Specyficzną cechą przedstawionego w pracy problemu optymalizacji statycznej jest narzucenie wartości średniej sterowania u poprzez równanie:

$$E(u) = q \tag{1}$$

Zinterpretowanie ograniczenia (1) wymaga wyraźnego wyróżnienia wektora $\bar{y}$ - wektora dostępnej informacji.

Załóżmy, że rozpatrywany układ sterowania jest częścią większego systemu. Wówczas sterowanie u wypracowane w układzie musi optymalizować wskaźnik jakości w oparciu o dostępne pomiary $\bar{y}$ i z uwzględnieniem występujących fizycznie ograniczeń, a także ograniczenia wprowadzonego w celu skoordynowania całego systemu. Tym ograniczeniem jest właśnie równanie (1). Wielkość q oznacza więc sterowanie optymalne przy braku informacji pomiarowej i jest wyliczana przez koordynatora systemu. Sposób wyznaczania optymalnego q jest osobnym problemem, nie poruszanym w tej pracy.

Przy rozwiązywaniu postawionego w pracy zadania podstawowe znaczenie miała Zasada Minimalizacji i Uśredniania [1] oraz Lemat 1 sformułowany i udowodniony w pracy [6] (s. 450), który pokazuje, w jaki sposób sterowanie optymalne zależy od dostępnej informacji.

2. OPIS ZADANIA

Będziemy poszukiwać funkcji $u(\bar{y})$ minimalizującej wskaźnik jakości:

$$J = E\, l(u,z) \tag{2}$$

E oznacza w tym wzorze operator uśredniania po wszystkich z, z jest wektorem zakłóceń, u nazywany jest wektorem sterowań. Minimalizacja odbywa się w obecności następujących ograniczeń:

$$E\, u = q \tag{1}$$

$$u_{min} \leqslant u \leqslant u_{max} \tag{3}$$

Wektor dostępnej informacji $\bar{y}$ składa się z wektora q ze wzoru (1) oraz pewnego wektora p zależnego od zakłóceń $(p = g(z))$. Oznaczmy:

$$\bar{l}(u,\bar{y}) = E_{/\bar{y}}\, l(u,z) \tag{4}$$

$E_{/\bar{y}}$ oznacza uśrednianie warunkowe przy danym $\bar{y}$. Załóżmy, że skalarna funkcja $\bar{l}(u,\bar{y})$ jest wypukła ze względu na u.

3. METODA ROZWIĄZANIA

W celu rozwiązania zadania skorzystamy z twierdzenia o mnożnikach Lagrange'a [4], zastępując minimalizację wyrażenia (2) przy ograniczeniach (1), (3) następującą minimalizacją lagrangianu:

$$\underset{u(\bar{y})}{\mathrm{Min}} \left[E\,[l(u,z)] + \eta^T [E(u) - q]\right] \tag{5}$$

przy ograniczeniach (3).

q jest z założenia wielkością stałą, można więc napisać:

$$\eta^T [E(u) - q] = \eta^T E(u - q) \tag{6}$$

Zauważmy, że zgodnie z twierdzeniem o mnożnikach Lagrange'a [4] wektor η należy do przestrzeni sprzężonej do Q $(q \in Q)$. Dla przestrzeni euklidesowych $Q^* = Q$. W związku z tym η jest funkcją tych samych zmiennych co q (parametrów rozkładu). Stąd:

$$E(\eta) = \eta \tag{7}$$

i można napisać:

$$\underset{u(\bar{y})}{\mathrm{Min}} \left[E\left[l(u,z)\right] + \eta^T\left[E(u) - q\right]\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \underset{u(\bar{y})}{\mathrm{Min}}\ E\left[l(u,z) + \eta^T(u - q)\right] \tag{8}$$

Dla przeprowadzenia minimalizacji lagrangianu (8) skorzystamy z Lematu 1 z pracy [6]. Lemat ten pozwala nam napisać:

$$\underset{u(\bar{y})}{\mathrm{Min}}\ E\left[l(u,z) + \eta^T(u - q)\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow E\ \underset{u}{\mathrm{Min}}\left[E_{/\bar{y}}\left[l(u,z) + \eta^T(u - q)\right]\right] \tag{9}$$

przy ograniczeniach (3).

Minimalizacja po prawej stronie wzoru (9) nie jest już minimalizacją w przestrzeni funkcji. Dla ustalonego $\bar{y}$ poszukujemy jednej konkretnej wartości u.

Należy zwrócić uwagę, że ograniczenia (3) są ograniczeniami funkcyjnymi. Oznaczają one, że funkcja $u(\bar{y})$ musi znajdować się między dwiema stałowartościowymi funkcjami: $f^1(\bar{y}) = u_{min}$, $f^2(\bar{y}) = u_{max}$. Jest to jednak równoważne ograniczeniu liczbowemu, takiemu mianowicie, by dla dowolnego $\bar{y}$ konkretna wartość u znajdowała się między wartościami u_{min}, u_{max}.

Jeśli uwzględni się ten fakt, to można do ograniczeń (3) zastosować mnożniki Kuhna-Tuckera, tworząc problem optymalizacji bez ograniczeń:

$$\underset{u}{\mathrm{Min}}\left[E_{/\bar{y}}\left[l(u,z) + \eta^T(u - q)\right] + \right.$$

$$\left. + \mu_1^T(u - u_{max}) + \mu_2^T(u_{min} - u)\right] \tag{10}$$

Ponieważ u ma być funkcją pomiarów $\bar{y}$, więc $E_{/\bar{y}}(u) = u$.

Stąd:

$$E_{/\bar{y}}\left[\eta^T(u - q)\right] = \eta^T(u - q) \tag{11}$$

i wzór (10) przekształca się do postaci:

$$\underset{u}{\mathrm{Min}}\left[\bar{l}(u,\bar{y}) + \eta^T(u - q) + \mu_1^T(u - u_{max}) + \mu_2^T(u_{min} - u)\right] \tag{12}$$

Zgodnie z twierdzeniem Kuhna-Tuckera [4] mnożniki μ_1, μ_2 należą do przestrzeni sprzężonej do U (gdzie $u \in U$). Są więc funkcjami tych samych

zmiennych (wektora informacji $\bar{y}$). W związku z tym, podobnie jak u są zależne od zakłóceń i są zmiennymi losowymi.
Jak wiadomo mnożniki μ_1, μ_2 są nieujemne. Przy tym wartość większą od zera mogą przyjmować tylko wtedy, gdy odpowiednie ograniczenie jest spełnione w sposób nieostry (to znaczy $u = u_{min}$ lub $u = u_{max}$).

Dalej postępujemy w następujący sposób:

Ze wzoru (12) wyznaczamy sterowanie optymalne (jest to wykonalne dzięki wypukłości funkcji $\bar{I}(u,\bar{y})$:

$$u^{opt} = a_1(\bar{y}, \eta, \mu_1, \mu_2) \tag{13}$$

Wzór (13) należy podstawić do równania (1). Stąd wyznacza się mnożnik:

$$\eta = \eta(q, \text{ parametry rozkładu } \mu_1, \text{ parametry rozkładu } \mu_2) \tag{14}$$

Podstawienie (14) do (13) pozwala wyeliminować z (13) η.
Otrzymujemy:

$$u^{opt} = a_2(\mu_1, \mu_2, q, \bar{y}, \text{ parametry rozkładu } \mu_1, \text{ parametry rozkładu } \mu_2) \tag{15}$$

Przyjmijmy we wzorze (15) $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$ i dla danego $\bar{y}$ obliczmy wartość u. Jeśli tak wyznaczone u wypadnie poza ograniczeniem, to należy tak dobrać odpowiednie μ, aby u stało się równe ograniczeniu. Wynika to z przedstawionych wyżej właściwości mnożników Kuhna-Tuckera. Postępując w ten sposób dla każdego $\bar{y}$, można znaleźć funkcję $\mu(\bar{y})$ potrzebną ze względu na uśrednianie w równaniu (1).
Opisane wyżej działania prowadzą w efekcie do określenia funkcji $u(\bar{y})$.

4. PRZYKŁAD

Niech wskaźnik jakości (wzór (2)) ma postać:

$$J = E\,\frac{1}{2}\,(z - u)^2, \tag{16}$$

przy czym obowiązują ograniczenia opisane wzorami (1) i (3). Wektor dostępnej informacji niech składa się z wielkości z,q. Załóżmy, że zakłócenie z ma rozkład równomierny ograniczony przez wartości z_{min}, z_{max}. Załóżmy, że:

$$z_{max} - z_{min} \geqslant u_{max} - u_{min} \tag{17}$$

Dokonanie minimalizacji we wzorze (12) daje dla tego przypadku następującą postać sterowania optymalnego:

$$u = z - \eta - \mu_1 + \mu_2 \tag{18}$$

Podstawmy (18) do (1) i obliczmy w ten sposób mnożnik:

$$\eta = \bar{z} - \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 - q \tag{19}$$

gdzie: $\bar{\mu}_1 = E\mu_1,\ \bar{\mu}_2 = E\mu_2,\ \bar{z} = E(z) = \frac{z_{max} + z_{min}}{2}$.

Zgodnie z tym co powiedziano wyżej μ_1, μ_2 są zmiennymi losowymi, natomiast η nie.

Po wyeliminowaniu η u wyraża się wzorem:

$$u = z - \bar{z} - \mu_1 + \bar{\mu}_1 + \mu_2 - \bar{\mu}_2 + q \tag{20}$$

Aby sterowanie optymalne było określone w sposób jawny, należy wyznaczyć $\bar{\mu}_1$ i $\bar{\mu}_2$. Robimy to tak, jak to było opisane wyżej. To znaczy dla danego z dobieramy odpowiednie μ tak, aby u wyznaczone ze wzoru (20) spełniało ograniczenia (3). Otrzymujemy w ten sposób zależności:

$$\mu_1(z, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, q, u_{max}) \tag{21}$$

$$\mu_2(z, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, q, u_{min}) \tag{22}$$

Uśrednienie po wszystkich z pozwala nam wyznaczyć $\bar{\mu}_1$ i $\bar{\mu}_2$:

$$\bar{\mu}_1 = E\mu_1(z, q, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, u_{max}) \tag{23}$$

$$\mu_2 = E\mu_2(z, q, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, u_{min}) \tag{24}$$

Z tego układu równań wyznaczamy $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$. Szczegółowe obliczenia zamieszczone są w dodatku.

W rezultacie otrzymuje się następujące wzory na sterowanie optymalne:

oznaczmy:
$$\Delta u = u_{max} - u_{min}$$

$$\Delta z = z_{max} - z_{min}$$

1) Dla $q > u_{max} - \frac{\Delta u^2}{2\Delta z}$

$$a = z - z_{min} + u_{max} - \sqrt{2\Delta z(u_{max} - q)}$$

$$u = \begin{cases} a & \text{dla} \quad a \leqslant u_{max} \\ u_{max} & \text{dla} \quad a > u_{max} \end{cases} \tag{25}$$

2) Dla $u_{min} + \frac{\Delta u^2}{2\Delta z} \leqslant q < u_{max} - \frac{\Delta u^2}{2\Delta z}$

$$b = z - \bar{z} - q + u_{max} + u_{min} + \frac{\Delta z}{2\Delta u}(2q - u_{max} - u_{min})$$

$$u = \begin{cases} u_{min} & \text{dla} \quad b < u_{min} \\ b & \text{dla} \quad u_{min} \leqslant b < u_{max} \\ u_{max} & \text{dla} \quad b > u_{max} \end{cases} \tag{26}$$

3) Dla $q \leqslant u_{min} + \frac{\Delta u^2}{2\Delta z}$

$$c = z - z_{max} + u_{min} + \sqrt{2\,\Delta z(q - u_{min})}$$

$$u = \begin{cases} u_{min} & \text{dla} \quad c < u_{min} \\ c & \text{dla} \quad c \geqslant u_{min} \end{cases} \tag{27}$$

5. INNY SPOSÓB ROZWIĄZANIA[x)]

Przykład powyższy można rozwiązać także w inny sposób - wykorzystując zasadę maksimum. Zauważmy, że wzór (16) można zapisać w następującej formie:

$$J = \frac{1}{2}\int_{z_{min}}^{z_{max}} (z - u)^2 f(z)dz, \tag{28}$$

gdzie: $f(z)$ - funkcja gęstości zmiennej z . $f(z) = \frac{1}{\Delta z}$.

Natomiast ograniczenie (1) ma postać:

$$\int_{z_{min}}^{z_{max}} u(z)f(z)dz = q \tag{29}$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$x = \int_{z_{min}}^{z} u(z)f(z)dz \tag{30}$$

---

x) Ten sposób rozwiązania zaproponował dr inż. M. Latarnik

Wówczas:

$$\Delta z\frac{dx}{dz} = u, \quad x(z_{min}) = 0, \quad x(z_{max}) = q \tag{31}$$

Hamiltonian dla naszego problemu wyraża się wzorem:

$$H = \left[\frac{1}{2}(z - u)^2 + \eta u\right] \cdot \frac{1}{\Delta z}, \tag{32}$$

przy czym u musi spełniać ograniczenia (3).
Rozwiązanie takiego problemu nie nastręcza trudności.
Wzór powyższy jest identyczny ze wzorem uzyskiwanym przy rozwiązywaniu problemu metodą prezentowaną poprzednio.

6. ZAKOŃCZENIE

Zagadnienie opisane wzorami (1) - (3) można traktować jako część większego problemu dekompozycji i koordynacji statystycznie optymalnego rozdziału zasobów. Algorytm dyskutowany w pracy odpowiadałby dolnemu poziomowi sterowania jednego z podsystemów zdekomponowanego systemu. Całość jest koordynowana przez górny poziom sterowania. Wartość q, występująca w ograniczeniu (1), jest zmienną koordynującą ustalaną przez wyższy poziom. Oznacza to, że górny poziom sterowania dysponuje mniej szczegółową informacją o systemie i na podstawie tej informacji określa sterowania optymalne. Są to wielkości q będące dyrektywami dla dolnego poziomu. W oparciu o te dyrektywy oraz bardziej szczegółowe informacje lokalne w podsystemach określane są właściwe sterowania u. Dokładny opis pełnego problemu można znaleźć w pracach [2] i [3]. W pracy [2] podaje się algorytm sterowania na dolnym poziomie, jednak bez uwzględnienia ograniczenia (3).

Przedstawiony w pracy algorytm jest metodą rozwiązania prostego problemu optymalizacji, w którym ograniczenia i wskaźnik jakości interpretuje się za pomocą pojęć z teorii prawdopodobieństwa. Jak pokazano, problem taki można rozwiązać także korzystając z zasady maksimum. Jednak w przypadku gdy rozkład błędu jest nieograniczony (np. rozkład normalny) lub błąd jest wektorem o kilku składowych, trudno jest utworzyć równanie stanu potrzebne dla rozwiązania z zasady maksimum. Natomiast metoda prezentowana w pracy ma zastosowanie, chociaż nie musi prowadzić do analitycznych rezultatów.

Dodatek: Wyprowadzenie wzorów na sterowanie optymalne z rozdziału 4

Problem rozwiążemy metodą opisaną w rozdziale 3. Równanie (10) przyjmie teraz postać:

$$u - z + \eta + \mu_1 - \mu_2 = 0 \tag{d.1}$$

stąd:
$$u = z - \eta - \mu_1 + \mu_2 \tag{d.2}$$

Można więc napisać równanie (1):
$$E(u) = E(z - \eta - \mu_1 + \mu_2) = q \tag{d.3}$$

stąd:
$$\eta = E(z) - E(\mu_1) + E(\mu_2) - q \tag{d.4}$$

(gdyż $E(\eta) = \eta$).

Oznaczmy:
$$E(z) = \frac{z_{max} + z_{min}}{2} = \bar{z} \tag{d.5}$$

$$E\mu_1 = \bar{\mu}_1 \tag{d.6}$$

$$E\mu_2 = \bar{\mu}_2 \tag{d.7}$$

η z (d.4) podstawiamy do wzoru na sterowanie optymalne:
$$u = z - \bar{z} - \mu_1 + \bar{\mu}_1 + \mu_2 - \bar{\mu}_2 + q \tag{d.8}$$

W granicach swojej zmienności sterowanie okazuje się być liniowo zależne od zakłócenia z. Mnożniki μ_1, μ_2 nie są w tym wzorze istotne, gdyż wewnątrz obszaru dopuszczalnych wartości u mają wartość zero. Trzeba natomiast wyznaczyć wartości $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$. Do ilustracji zastosowanego tu rozumowania służy rysunek A. Rysunek ten przedstawia zależność sterowania od zakłócenia dla różnych wartości q, zależność uzyskaną bezpośrednio ze wzoru (d.8). Z rysunku widać, że istnieje pewna wartość q_1, powyżej której przestaje ingerować (dla dowolnego z) ograniczenie dolne. Podobnie istnieje pewna wartość q_2, poniżej której przestaje ingerować ograniczenie górne.

Jeśli dane ograniczenie przestaje ingerować, to odpowiadający mu mnożnik μ jest stale równy zeru - dla dowolnego zakłócenia z. W związku z tym jego wartość średnia jest także równa zeru.

Wartości q_1 i q_2 można łatwo wyznaczyć, zauważając, że gdy $q = q_1$, musi być $u = u_{min}$ dla $z = z_{min}$.
$$u_{min} = q_1 + z_{min} - \bar{z} + \bar{\mu}_1 \tag{d.9}$$

$$q_1 = u_{min} - \bar{\mu}_1 + \frac{\Delta z}{2} \tag{d.10}$$

W podobny sposób wyznaczy się q_2:
$$q_2 = u_{max} + \bar{\mu}_2 - \frac{\Delta z}{2} \tag{d.11}$$

Rysunek 1 sugeruje też sposób liczenia wartości średnich $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$. Mianowicie widać, że dla pewnego zakresu zmian z ograniczenia nie ingerują, natomiast gdy z przekroczy pewną wartość graniczną zaczynają ingerować ograniczenia odpowiednio dolne lub górne. Na tej podstawie można narysować wykresy zależności μ_1 i μ_2 od z. Są to odpowiednio rysunki B i C. Wartości średnie $\bar{\mu}_1$ i $\bar{\mu}_2$ wyznaczymy licząc pole powierzchni pod wykresem $\mu = f(z)$ i dzieląc przez długość przedziału Δz. Szczególnie proste jest to dla dwóch przypadków granicznych rozpatrywanych poprzednio:

dla $q = q_1$
$$\bar{\mu}_1(q_1) = \frac{(\Delta z - \Delta u)^2}{2\Delta z} \tag{d.12}$$

dla $q = q_2$
$$\bar{\mu}_2(q_2) = \frac{(\Delta z - \Delta u)^2}{2\Delta z} \tag{d.13}$$

W pozostałych przypadkach postępujemy według następującego schematu. Wyznaczamy wartość z, przy której zaczyna ingerować ograniczenie górne:

$$z_{gr} = u_{max} - q + \bar{z} - \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 \tag{d.14}$$

Dla $z > z_{gr}$ μ_1 wyraża się wzorem:

$$\mu_1 = z - z_{gr} \tag{d.15}$$

stąd:
$$\mu_{1max} = z_{max} - u_{max} + q - \bar{z} + \bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2 \tag{d.16}$$

Podobnie można wyliczyć:

$$\mu_{2max} = u_{min} - q - z_{min} + \bar{z} - \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 \tag{d.17}$$

Wartości średnie wyrażają się wzorami:

$$\bar{\mu}_1 = \frac{\mu^2_{1max}}{2\Delta z}, \tag{d.18}$$

przy czym wzór ten obowiązuje dla $q > q_2$ - gdy wartość średnia $\bar{\mu}_1$ jest większa od zera.

Podobnie dla $\bar{\mu}_2$:

$$\bar{\mu}_2 = \frac{\mu^2_{2max}}{2\Delta z}, \tag{d.19}$$

przy czym wzór ten obowiązuje dla $q < q_1$.

Tak więc obszar zmienności q możemy podzielić na trzy przedziały. Zakładając, ze względu na realizowalność sterowania, $q_{max} = u_{max}$ i $q_{min} = u_{min}$, mamy:

Przedział 1:
$$q_{max} \geqslant q \geqslant q_1$$
$$\bar{\mu}_2 = 0 \qquad \bar{\mu}_1 = \frac{\mu^2_{1max}}{2\Delta z}$$

Przedział 2:
$$q_1 > q > q_2$$
$$\bar{\mu}_1 = \frac{\mu^2_{1max}}{2\Delta z} \qquad \bar{\mu}_2 = \frac{\mu^2_{2max}}{2\Delta z}$$

Przedział 3:
$$q_2 \geqslant q \geqslant q_{min}$$
$$\bar{\mu}_1 = 0 \qquad \bar{\mu}_2 = \frac{\mu^2_{2max}}{2\Delta z}$$

Teraz w miejsce μ_{1max} i μ_{2max} należy podstawić lewe strony wzorów (d.16), (d.17). Otrzymuje się w ten sposób kwadratowe równania ze względu na $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$. Rozwiązanie tych równań nie sprawia trudności. Z kolei uzyskane wzory należy podstawić do równania (d.8). W ten sposób powstają analityczne wzory na sterowanie optymalne podane w pracy.

7. LITERATURA

[1] Gessing R.: Sterowanie statystycznie optymalne w przypadku losowego czasu sterowania. Arch. Aut. i Telem. z. 4, 1978.

[2] Gessing R.: Metoda dekompozycji i koordynacji statystycznie optymalnego statycznego rozdziału zasobów. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Automatyka 54.

[3] Metoda i algorytm sterowania stochastycznie optymalnego zbiorem obiektów w systemie wodno-gospodarczym. Część I: Optymalny rozdział zasobów. Praca zlecona przez Instytut Inżynierii Środowiska Politechniki Warszawskiej. Warszawa 1979.

[4] Luenberger D.G.: Teoria optymalizacji. PWN, Warszawa 1974.

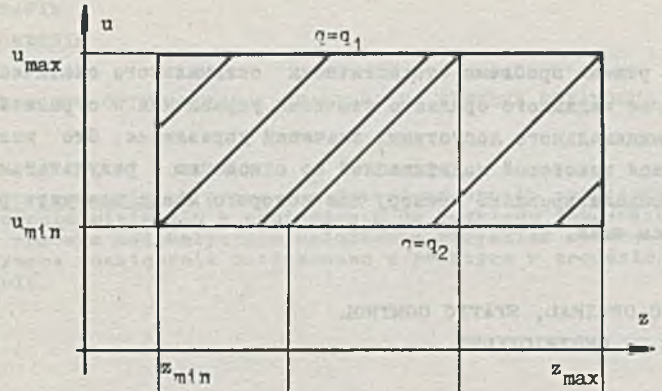
[5] Meditch J.S.: Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych. WNT, Warszawa 1975.

[6] Gessing R.: Zasada minimalizacji i uśredniania jako metoda wyznaczania algorytmów sterowania statystycznie optymalnego. Arch. Aut. i Telem. z. 4, 1976 t. XXI.

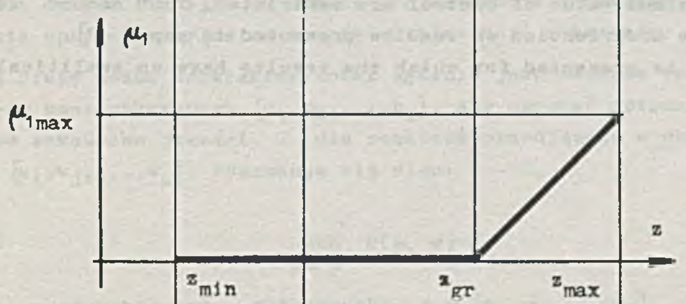
Recenzent: Prof. dr hab. inż. Ryszard Gessing

Wpłynęło do Redakcji 10.11.1982 r.

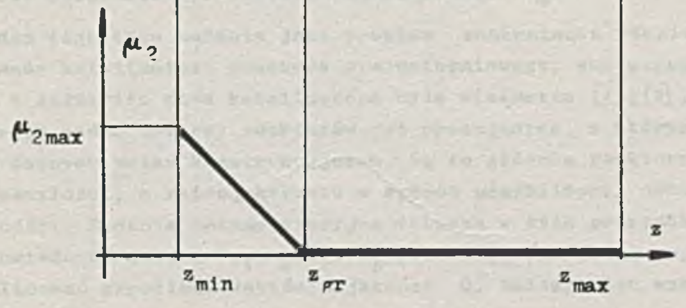
Rysunek A :



Rysunek B :



Rysunek C :



Rysunek 1. Ilustracja sposobu wyznaczania μ_1 i μ_2

СТАТИЧЕСКОЕ, СТОХАСТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Р е з ю м е

В работе решена проблема стохастически оптимального статического управления в случае заданного среднего значения управления и ограничения максимального и минимального допустимых значений управления. Это второе ограничение является некоторой модификацией по отношению к результатам работы [2]. В работе проанализированно пример, для которого можно получить результаты в аналитическом виде.

A STOCHASTIC OPTIMAL, STATIC CONTROL IN THE CASE OF RESTRICTIONS

S u m m a r y

In this paper the problem of stochastic optimal static control is solved, in the case when the average value of control is given and the minimum and maximum value of control are restricted. That second restriction implies the modification of results presented in paper [2].
An example is presented for which the results have an analitical form.