ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1983

Seria: AUTOMATYKA z. 71 Nr kol. 772

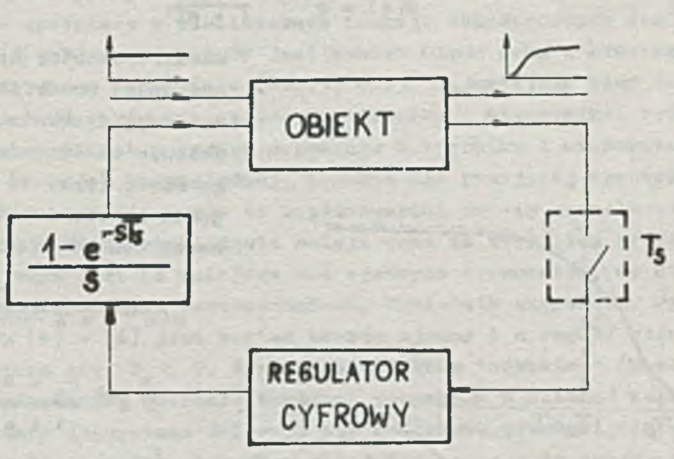
Marta ŚWIERNIAK
Zakład Problemów Organizacji
i Zarządzania PAN

WYZNACZANIE PARAMETRÓW MODELI DYSKRETNYCH NA PODSTAWIE ODPOWIEDZI SKOKOWEJ OBIEKTU

Streszczenie. W pracy proponuje się użycie aproksymacji Padé w celu wyznaczania parametrów modeli dyskretnych dla obiektów nieoscylacyjnych na podstawie ich odpowiedzi na skok jednostkowy. Szybka i prosta procedura obliczania współczynników modelu lub ich przeliczania przy zmianie okresu próbkowania umożliwia często zastosowanie pojedynczego mikroprocesora jako regulatora cyfrowego.

1. WSTĘP

Rozwój mikroprocesorów i zastosowanie sterowania w oparciu o mikrotechnologię otworzyło nowe możliwości wykorzystania cyfrowych algorytmów sterowania zarówno konwencjonalnych (PI, PID), jak i opartych na współczesnej teorii sterowania [1]. Wiele z tych algorytmów wykorzystuje dyskretny model wejściowo-wyjściowy [2], [3], którego parametry identyfikowane są na bieżąco. Z drugiej strony sterowane procesy są najczęściej ciągłe w czasie i mogą być aproksymowane przez modele transmitancyjne, przy czym okre-



Rys. 1. Schemat blokowy prostego modelu dyskretnego

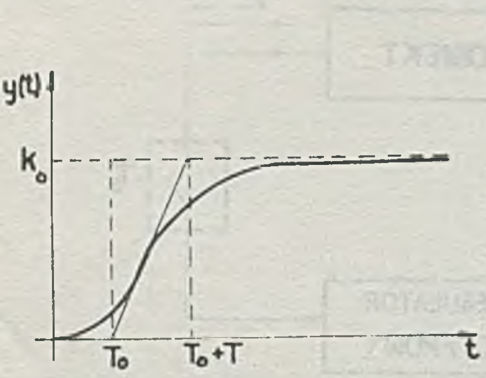
ślenie parametrów tych modeli bywa możliwe na podstawie odpowiedzi obiektów na skok jednostkowy. Zastosowanie mikroprocesorów do sterowania wymaga użycia jak najprostszych modeli (przy zadanej dokładności) i prostego sposobu obliczania ich parametrów.
Jest to szczególnie istotne przy zmianie okresu próbkowania prowadzącej do zmiany współczynników modelu.

W pracy rozważa się przypadek obiektów nieoscylacyjnych, dla których wystarczająco dobrym jest stacjonarny model liniowy dający się przybliżyć transmitancją w postaci elementu inercyjnego pierwszego rzędu z czasem martwym. Jest to często korzystna aproksymacja układów liniowych wysokiego rzędu [4]. Odpowiadająca jej transmitancja "z" przy założeniu ekstrapolatora zerowego rzędu dla sterowania jest poszukiwanym dyskretnym modelem wejściowo-wyjściowym. Zależność między współczynnikami modelu ciągłego i dyskretnego jest typu wykładniczego, proponuje się zatem użycie aproksymacji Padé do wyznaczania parametrów modelu dyskretnego.

2. OKREŚLENIE PARAMETRÓW MODELU DYSKRETNEGO NA PODSTAWIE ODPOWIEDZI OBIEKTU NA SKOK JEDNOSTKOWY

Odpowiedzi obiektów stacjonarnych w zakresie ich liniowości zwykle dają się aproksymować jedną z typowych transmitancji czasowych. Dla nieoscylacyjnych obiektów z samowyrównaniem (co najmniej trzeciego rzędu) prostym przybliżeniem jest aproksymacja za pomocą elementu inercyjnego pierwszego rzędu z czasem martwym (rys. 2).
Ciągły model obiektu ma zatem postać transmitancji

$$G(s) = e^{-sT_0} \frac{k_0}{1 + sT}, \tag{1}$$



Rys. 2. Aproksymacja transformacji czasowej elementu nieoscylacyjnego wyższego rzędu

Model dyskretny otrzymuje się, znajdując zmodyfikowaną transmitancję dyskretną po uwzględnieniu ekstrapolatora zerowego rzędu (rys. 1) i przy przyjęciu okresu impulsowania T_s. Model ten ma postać [5]:

$$G(z^{-1}) = Z\,\frac{1-e^{-sT_s}}{s}\,G(s) = z^{-k}\,\frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \tag{2}$$

Przy czym parametry b_o, b_1, a_1 związane są z τ, T_o i T_s relacjami:

$$T_o = (k-1)T_s + \tau \qquad 0 \leqslant \tau < T_s \tag{3}$$

$$b_o = k_oT\left\{1-\exp\left[-\frac{T_s}{T}\left(1-\frac{\tau}{T_s}\right)\right]\right\} = k_oT\left\{1-\exp\left(-\frac{T_s-\tau}{T}\right)\right\} \tag{4}$$

$$b_1 = k_oT\left\{\exp\left(-\frac{T_s-\tau}{T}\right) - \exp\left(-\frac{T_s}{T}\right)\right\} \tag{5}$$

$$a_1 = -\exp\left(-\frac{T_s}{T}\right) \tag{6}$$

Najczęściej występującymi tu funkcjami są eksponenty i stąd zachodzi potrzeba wykorzystania algorytmu, który umożliwia prostą (w sensie liczby i typu operacji arytmetycznych) i szybką (w sensie liczby operacji czasochłonnych) realizację funkcji e^x. Wszystkie występujące współczynniki są funkcjami okresu próbkowania T_s, co powoduje konieczność ich przeliczania przy zmianie tego okresu. Wymagania odnośnie do algorytmu wyznaczania wartości funkcji wykładniczej spełnia aproksymacja Padé. Szczególnie korzystne własności posiadają aproksymacje Padé o równym stopniu licznika i mianownika [6]. Nie bez znaczenia jest tu fakt, że argumenty funkcji e^x występujące w rozważanych współczynnikach są ujemne, a w zakresie ujemnych argumentów aproksymacja Padé posiada większą dokładność. Wyznaczania parametru k można dokonać, stosując funkcję ENTIER, nie będzie więc to (ze względu na prostotę) przedmiotem dalszych rozważań.

3. ALGORYTM WYZNACZANIA WARTOŚCI FUNKCJI WYKŁADNICZYCH

Użycie aproksymacji Padé do wyznaczania wartości funkcji wykładniczej jest często spotykane w bibliotekach funkcji standardowych dla minikomputerów [7], [8]. Wadą tej metody jest wzrost błędu wraz z oddalaniem się od zera. Jednak już w przedziale [-0,75, 0.75] najmniejszy błąd zapewnia aproksymacja Padé o równych stopniach licznika i mianownika. Wówczas współczynniki przy równych potęgach argumentu w liczniku i mianowniku są takie same co do wartości bezwzględnej, ponadto dla przyjętej aprhksymacji trzeciego stopnia mnożenia przez te współczynniki da się zrealizować za pomocą przesunięć. Błąd przybliżenia maleje wraz ze zwężeniem przedziału do zera, przy czym jest on mniejszy dla ujemnych argumentów, co nie jest bez znaczenia w rozważanych zastosowaniach. Wykładnik eksponenty występujący w wyrażeniach (4) - (6) jest bowiem zawsze ujemny i z reguły ułamkowy, gdyż zwykle dobiera się $T_s < T$. Przypadek obiektów "szybkich" (w stosunku do okresu impulsowania) zostanie skrótowo rozważony w dalszej kolejności.
W proponowanym algorytmie dokonuje się dodatkowo przesunięcia argumentu w zakres [- 0,75, - 0,25]. Ograniczenie dolne ma na celu zapewnienie odpowiedniej dokładności reprezentacji stałoprzecinkowej argumentu.

Żądany zakres zmienności argumentu osiąga się odejmując od niego 1/4, gdy jest on większy od - 1/2 i dodając 1/4, gdy jest mniejszy od - 1/2.
Stosowana aproksymacja funkcji exp(x) ma postać [6]:

$$E = \frac{120 + 60x + 12x^2 + x^3}{120 - 60x + 12x^2 - x^3} \tag{7}$$

Realizacji funkcji (7) można dokonać stałoprzecinkowo po odpowiednim przeskalowaniu. Ze względu na, wcześniej wspomnianą, równość współczynników w liczniku i mianowniku nie stosuje się schematu Hornera do wyznaczania wartości wielomianów, tym bardziej, że mnożenia przez współczynniki można zastąpić w mikroprocesorze przesunięciami i dodawaniami.
Przyjmując bowiem współczynnik skalowy 2^{-8}, można (7) zapisać jako:

$$E = \frac{\frac{15}{32} + \frac{15}{64}x + \frac{3}{64}x^2 + \frac{1}{256}x^3}{\frac{15}{32} - \frac{15}{64}x + \frac{3}{64}x^2 - \frac{1}{256}x^3} = \tag{8}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{32}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{64})x + (\frac{1}{16} - \frac{1}{64})x^2 + \frac{1}{256}x^3}{(\frac{1}{2} - \frac{1}{32}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{64})x + (\frac{1}{16} - \frac{1}{64})x^2 - \frac{1}{256}x^3}$$

Należy zauważyć, że dzięki ujemności argumentu x licznik ułamka jest co do wartości bezwzględnej na pewno mniejszy od mianownika, co umożliwia stałoprzecinkową realizację dzielenia.
Schemat blokowy programu realizującego algorytm wyznaczania wartości funkcji exp(x) ma postać jak na rys. 3.
Zauważmy, że wyznaczanie wartości parametrów b_o, b_1 i a_1 wymaga obliczania funkcji wykładniczych dla dwóch wartości argumentów, mianowicie $x = -\frac{T_s}{T}$ oraz $x = -\frac{T_s - \tau}{T}$, przy czym w przypadku zmiany okresu próbkowania T_s obie te wartości ulegają zmianie. W przypadku obiektów "szybkich" $T_s > T$ konieczne jest sprowadzenie argumentu do przedziału jednostkowego.

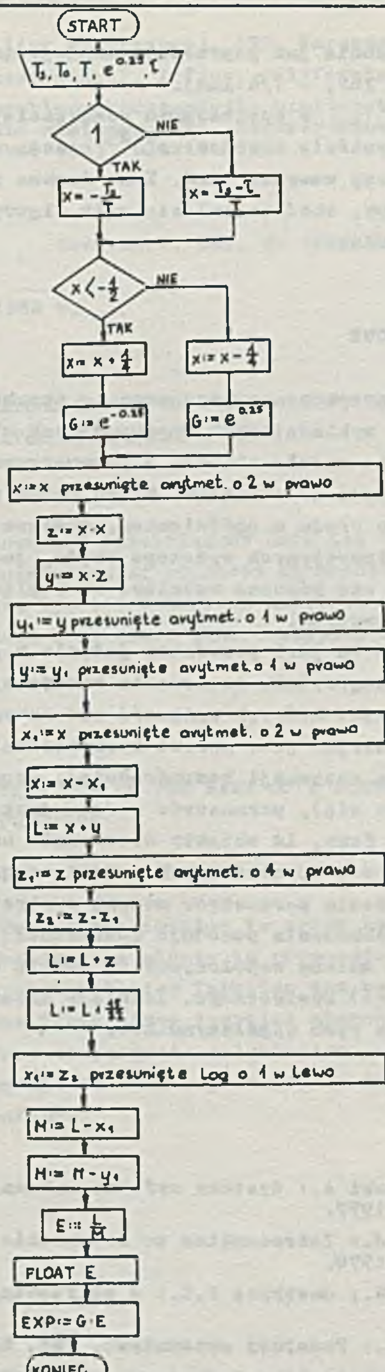
Można tego dokonać poprzez odjęcie części całkowitej od argumentu. Korzystne wydaje się jednak zmodyfikowanie omawianego algorytmu przez następującą zmianę argumentu. Jeśli x należy do przedziału $(-\infty, 0]$, to przedstawmy liczbę $x_1 = x \log_2 e$ jako $x_1 = [x_1] + y$, gdzie

$$[x_1] = \text{ENTIER } x_1 + 1, \quad y = x_1 - [x_1], \quad -1 < y < 0$$

Ponieważ

$$e^x = 2^{x\log_2 e} = 2^{[x_1]+y} = 2^{[x_1]} \cdot e^{y\ln 2},$$

a zatem argument zmienia się w przedziale $[-\ln 2, 0]$.



Rys. 3. Schemat blokowy programu realizującego algorytm wyznaczania funkcji exp(x)

Następnie podobnie jak poprzednio zmniejszamy przedział argumentu tym razem do $[-3/4 \ln 2, -1/4 \ln 2]$.
Uwzględnienia $[x_1]$ w ostatecznym rezultacie dokonujemy dodając $[x_1]$ do cechy EXP. Oczywiście wzorzec $e^{0.25}$ należy zastąpić wzorcem $2^{0.25}$ i wprowadzić dodatkowy wzorzec ln2. Inne drobne zmiany mają w zasadzie charakter kosmetyczny, choć oczywiście cały algorytm komplikuje się i może już nie być opłacalny.

4. UWAGI KOŃCOWE

W pracy zaproponowano zastosowanie aproksymacji Padé do wyznaczania wartości funkcji wykładniczych występujących w wyrażeniach wiążących parametry dyskretnego modelu obiektu z parametrami jego modelu ciągłego. Rozważania ograniczono do obiektów, które można przybliżyć elementem inercyjnym pierwszego rzędu z opóźnieniem. Podobne wyrażenia wystąpią w przypadku elementów inercyjnych wyższego rzędu, jednak użyteczność proponowanej metody wydaje się wówczas wątpliwa ze względu na liczbę koniecznych do wyznaczenia parametrów.
Ponadto metoda ta jest przydatna jedynie w przypadku implementacji mikroprocesorowej algorytmów sterowania korzystających explicite z modelu dyskretnego obiektu, których wyższość nad innymi nie jest w pełni wykazana. Podobnie dyskusyjna jest sprawa korzystania z parametrów ciągłego modelu obiektu, a nie estymacji bezpośredniej, często na bieżąco (algorytmy samonastrajające się), parametrów modelu dyskretnego. Wydaje się jednak, że ze względu na fakt, iż obiekty sterowania są ciągłe w czasie, należy dążyć do określenia uproszczonych modeli ciągłych, a następnie na ich podstawie wyznaczenia parametrów modeli dyskretnych. Z kolei empiryczny dobór okresu próbkowania powoduje konieczność zmiany tej wielkości, co pociąga za sobą zmianę współczynników modelu (przy niezmiennych parametrach modelu ciągłego) dyskretnego. Istnieje zatem potrzeba szybkiego i prostego wyznaczania tych współczynników.

LITERATURA

[1] Niederliński A.: Systemy cyfrowe automatyki przemysłowej, t. 2. WNT, Warszawa 1977.

[2] Åström K.J.: Introduction to stochastic control theory. Academic Press, New York 1970.

[3] Clarke D.W.; Gawthrop P.I.: A selftuning controller, Proc. IEE, 122, 1975.

[4] Węgrzyn S.: Podstawy automatyki. PWN, Warszawa 1978.

[5] Kuzin L.T.: Analiza i synteza dyskretnych układów sterowania. WNT, Warszawa 1965.

[6] Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej. PWN, Warszawa 1971.
[7] Varian data 620 i Computer manual, Irvine, California, 1968.
[8] Świerniak M.: Niektóre problemy konstrukcji bibliotek standardowych funkcji matematycznych dla minikomputera. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Informatyka, z. 3, Gliwice 1982.

Recenzent: Doc. dr inż. Maria Jastrzębska

Wpłynęło do Redakcji 20.11.1982 r.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ОТВЕТА ОБЪЕКТА НА ЕДИНИЧНОЕ СТУПЕНЧАТОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ

Р е з ю м е

В статье представлено применение апроксимации Паде для определения параметров дискретной модели неколебательных объектов на основе ответа на единичное ступенчатое возмущение. Простой и быстрый алгоритм расчета коэффициентов модели дает возможность применения одного микропроцессора в качестве регулятора.

DISCRETE MODEL PARAMETER ESTIMATION ON THE BASE OF A PLANT RESPONSE FOR THE UNIT STEP FUNCTION

S u m m a r y

In the paper the use of Padé approximation in order to estimate discrete model parameters for nonoscilating plants is proposed. It is assumed that the plant response for the unit step function can be approximated by the transient function of the first order inertial element with time-delay. Fast and simple procedure of parametr calculation or recalculation for different sampling intervals is very important for the use of microprocessors as digital controllers.