

P.3347 | 72

# ELEKTRYKA z. 34

MAREK BRODZKI

O WSPÓŁZIEMNICZOŚCI RÓWNAŃ I METODACH  
ROZWIĄZYWANIA SIECI ELEKTRYCZNYCH  
O PEWNYCH SYMETRIACH

P O L I T E C H N I K A   Ś L Ą S K A  
ZESZYT NAUKOWY Nr 331 – GLIWICE 1972



P. 3347 172

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 331

MAREK BRODZKI

**O WSPÓŁMIENNICZOŚCI RÓWNAŃ I METODACH  
ROZWIĄZYWANIA SIECI ELEKTRYCZNYCH  
O PEWNYCH SYMETRIACH**

PRACA HABILITACYJNA Nr 115

Data otwarcia przewodu habilitacyjnego 6. 10. 1970 r.

---

GLIWICE 1972

REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH  
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

*Iwo Pollo*

REDAKTOR DZIAŁU

*Zofia Cichowska*

SEKRETARZ REDAKCJI

*Witold Gużkowski*

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej  
Gliwice, ul. Kujawska 2

---

Nakł. 50+175 Ark. wyd. 3,5 Ark. druk. 3,62 Papier offsetowy kl. III, 70x100, 80 g  
Oddano do druku 11. 2. 1972 Podpis. do druku 12 4. 1972 Druk ukończ. w maju 1972  
Zam. 219 7. 2 1972 R-23 Cena zł 5,-

---

Skład, fotokopie, druk i oprawę  
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

PJ - 198/72

## SPIS TREŚCI

	Str.
Streszczenie .....	5
I. Wstęp .....	6
1. Sformułowanie pewnych zadań niniejszej pracy .....	6
2. Założenia uczynione odnośnie układów elektromechanicznych ...	7
3. Uwagi o więzach elektrycznych. Wprowadzenie praukładu współ- rzędnych .....	7
4. Definicja zbioru dopuszczalnych układów współrzędnych .....	9
5. Metryka kinematyczna .....	11
6. Równania Lagrange'a 2 rodzaju układu elektromechanicznego ...	13
7. Równoważność równań Lagrange'a 2 rodzaju i pewnych równań ten- sorowych (z pochodną absolutną) oraz ich interpretacja elek- tryczna .....	14
8. Metryka działania. Równania tensorowe oparte na tej metryce. Linie geodezyjne i odpowiadający im problem wariacyjny .....	17
9. Podsumowanie .....	19
II. Sieci elektryczne o pewnych symetriach .....	19
1. Pewne ogólne założenia dotyczące opisywanych sieci .....	19
2. Praukłady współrzędnych .....	20
A. Praukład w przestrzeni prądowej .....	20
B. Praukład w przestrzeni napięciowej .....	22
3. Zbiory dopuszczalnych układów współrzędnych .....	22
A. Przestrzeń prądowa oparta o grupę $G_c$ .....	22
B. Przestrzeń prądowa oparta o grupę $G_{cut}$ oraz współrzędne sprzężone .....	24
C. Przestrzeń napięciowa oparta o grupy $G_c$ lub $G_{cut}$ .....	26
D. Wspólne struktury prądowo-napięciowe .....	27
E. Interpretacja fizykalna transformacji i układów współrzęd- nych .....	27
4. Charakterystyka elementów sieci .....	29
A. Elementy proste oraz ich równania we współrzędnych fazo- wych .....	29
B. Linia krótka .....	30
C. Transformator .....	32
D. Wielobiegunniki. Symetria elementów .....	33

5. Budowa sieci oraz jej równania we współrzędnych fazowych ....	36
A. Ogólne założenia i ich komentarz .....	36
B. Prawa Kirchhoffa we współrzędnych fazowych i obliczanie sieci przy ich użyciu .....	38
6. Współzmienniczość równań sieci .....	42
A. Charakter geometryczny przedstawienia prądów i napięć ....	42
B. Współzmiennicze wyrażenie praw Kirchhoffa .....	44
C. Współzmiennicze wyrażenie równań elementów sieci oraz pew- ne uwagi dotyczące całości jej równań .....	45
D. Równania oczkowe .....	46
E. Równania węzłowe .....	47
F. Wspólne struktury prądowo-napięciowe .....	48
G. Zacieśnienie grupy transformacji. Subobiekty .....	49
H. Uwagi o sieci n-przewodowej .....	50
7. Moce. Zasady zachowania .....	50
A. Definicje mocy i charakter geometryczny ich przedstawienia	50
B. Norma. Metryka .....	51
C. Zasady zachowania mocy .....	52
8. Uwagi dotyczące współzmienniczości równań wielobiegunków ..	52
A. 4s-biegunki .....	52
B. Sieć złożona z elementów 4s-biegunków .....	53
C. (n+1)-biegunki .....	54
9. Zakończenie .....	55
A. O możliwościach dalszych zastosowań rachunku tensorowego do teorii sieci elektrycznych .....	55
B. O stosunku przedstawionej teorii do eksperymentu .....	56
C. Pewne uwagi odnośnie konstrukcji przedstawionej teorii ...	56
Literatura .....	57

## O WSPÓLMIENNICZOŚCI RÓWNAŃ I METODACH ROZWIĄZYWANIA SIECI ELEKTRYCZNYCH O PEWNYCH SYMETRIACH

**Streszczenie.** Praca niniejsza poświęcona jest głównie zagadnieniu kowariantnego sformułowania równań sieci 4-przewodowych, o elementach liniowych, w których panuje stan ustalony i przebiegi prądów i napięć są sinusoidalne.

Pracę właściwą, dotyczącą wspomnianego zagadnienia poprzedzono wstępem, w którym przedstawione są w zarysie podstawy tensorowej teorii układów elektromechanicznych. Wstęp ten stanowi dobrą okazję do przedśledzenia sposobu wprowadzenia rachunku tensorowego do teorii dotyczącej stałych skupionych oraz do oceny korzyści z tego płynących. Są tam kolejno omówione założenia dotyczące rozpatrywanych układów elektromechanicznych łącznie z zagadnieniem więzów. Następnie pokazany jest sposób wprowadzenia przestrzeni punktowej (konfiguracyjnej), praukładu współrzędnych oraz struktury lokalnej S. Gołąba w oparciu o pojęcie pseudogrupy transformacji układów współrzędnych. Później została zdefiniowana tzw. metryka kinematyczna w tej przestrzeni oraz w oparciu o nią przedstawiono równoważne równania badanego układu elektromechanicznego: Lagrange'a oraz pewne tensorowe (z pochodną absolutną pola wektorów kontrawariantnych uogólnionej prędkości). Wprowadzono też inną metrykę (działania) oraz równania tensorowe układu na niej oparte związane z pojęciem linii geodezyjnej i pewnym problemem wariacyjnym. W końcu podana została pewna interpretacja elektryczna otrzymanych równań i skomentowany fizyczny sens kowariantnego sformułowania równań teorii.

W części pracy odnoszącej się do wspomnianych sieci 4-przewodowych wprowadzono pojęcia przestrzeni punktowych: prądowej i napięciowej, praukłady współrzędnych w obu oraz globalne struktury F. Kleina w oparciu o grupy transformacji: centroafiniczną lub centrycznounitarną. Wprowadzono również pojęcia struktur sprzężonych oraz wspólnych prądowo-napięciowych. Następnie przedstawiona jest interpretacja fizyczna transformacji układów współrzędnych. Opisane są, przy pomocy współrzędnych fazowych elementy dopuszczone do konstrukcji sieci, tzw. elementy proste i sprzęgające. Skomentowane są częściowo przypadki linii krótkiej i transformatora. Wprowadzone jest pojęcie wielobiegownika oraz zdefiniowana jego symetria. W dalszym ciągu treścią pracy jest sprawa konstrukcji topologicznej sieci przy pomocy takich elementów, jej opis we współrzędnych fazowych oraz rozmaite komentarze odnoszące się do jej obliczania przy użyciu tych współrzędnych. Od strony tensorowej zagadnienia omówione są: charakter geometryczny przedstawienia rozmaitych wielkości dotyczących sieci: prądów, napięć, impedancji, admittancji, współczynników orientacji gałęzi oraz związana z tym współmienniczość jej równań (podane są również w tej postaci równania oczkowe i węzłowe). Pokazane są zastosowania wspólnych struktur prądowo-napięciowych oraz podgrup transformacji i związanego z tym pojęcia subobiektów. Stosuje się też pojęcia obiektu geometrycznego abstrakcyjnego (nie zajmując się jednak dokładnie złożoną kwestią włókien oraz włókien tranzytywnych tych obiektów) oraz swobodnego. Zamieszczone są uwagi o sieciach  $(n+1)$  - przewodowych  $(n \in \mathbb{N} - \{0\})$ . Poruszone są kwestie mocy i zasad ich zachowania, charakteru geometrycznego ich przedstawienia oraz związane z tym pojęcia iloczynu skalarnego, normy i metryki. Następnie szkicowo omówiono współmienniczy sposób przedstawienia równań 4s oraz  $(n+1)$  - biegowników  $(n, s \in \mathbb{N} - \{0\})$  jak też budowę i równania sieci z nich złożonych. W zakończeniu zamieszczone są pewne propo-

zycje dalszych zastosowań rachunku tensorowego (czy też teorii obiektów geometrycznych) do teorii opisujących w elektrotechnice stałe skupione i rozłożone (chodzi o przebiegi odkształcone, stany nieustalone i linię długą); uwagi o stosunku wyłożonej teorii do eksperymentu i o jej konstrukcji.

## I. Wstęp

### 1. Sformułowanie pewnych zadań niniejszej pracy

Przedmiotem tej pracy będzie w dużej mierze pewne rozszerzenie metody składowych symetrycznych. Podczas gdy w zwykłej teorii sieci elektrycznych do opisu jej elementów używa się napięć i prądów odnoszących się do nich, teoria składowych symetrycznych wyróżnia się wprowadzeniem bądź trójki "składowych" fazowych, bądź symetrycznych napięć i prądów dla elementów trójprzewodowych.

Nietrudno odgadnąć praktyczny powód tego "dualizmu" w opisie sieci. Chodzi mianowicie o to, że w macierzowej formie prawa Ohma dla pewnej ilości elementów trójfazowych macierz impedancji jest diagonalna dla składowych fazowych, dla pewnej zaś - dla symetrycznych. Jeśli dodamy do tego stwierdzenie, że postać macierzowa praw Ohma i Kirchhoffa jest podobna dla obu "składowych" - wynika stąd korzyść w łatwiejszym operowaniu macierzami diagonalnymi przy zastosowaniu odpowiednich składowych.

Nasuwa się tu pewna analogia: teorie polowe, jak np. pola elektromagnetycznego, hydrodynamika, teoria sprężystości oraz oczywiście w pierwszym rzędzie teoria względności, używają do opisu badanych w nich obiektów zbiory (nieskończone) układów współrzędnych. Wspomniane obiekty fizyczne reprezentowane są za pomocą pewnych obiektów geometrycznych, jak np. wektory i tensory. Prawa są formułowane w taki sam sposób dla wszystkich współrzędnych, tzn. kowariantnie.

Czy w takim razie można mówić, w odpowiednio uogólnionej teorii składowych symetrycznych, o współrzędnych zamiast składowych, czy ilość układów współrzędnych może być również nieskończona? Czy można tu wprowadzić pewne obiekty geometryczne i czy teoria ta będzie mogła należeć do wspólnej rodziny stosującej zapis kowariantny swych praw?

Na te pytania zamierzamy w dalszym ciągu odpowiedzieć. Krótko mówiąc chodzi w pewnym sensie o "przerobienie" "składowych symetrycznych" na teorię tensorową. Aby taki sposób podejścia w stosunku do stałych skupionych nie wydawał się dziwny (w zagadnieniu tak specjalistycznym jak składowe symetryczne), poprzedzimy go naszkicowaniem podstaw pewnej ogólniejszej teorii układów elektromechanicznych, ujętej właśnie tensorowo.

## 2. Założenia uczynione odnośnie układów elektromechanicznych

Założmy, że dany jest pewien układ ciał sztywnych oraz cewek i kondensatorów traktowanych jako stałe skupione (i jako ciała sztywne). Sposób połączeń elektrycznych tych ciał jest dowolny, o połączeniach mechanicznych będzie jeszcze mowa.

O cewkach i kondensatorach będziemy zakładali, że ich wymiary oraz odległości między nimi są znacznie mniejsze od najkrótszej spośród rozpatrywanych długości fal elektromagnetycznych reprezentowanych w widmie występujących przebiegów elektrycznych (warunek aby elementy można traktować jako stałe skupione) oraz, że są bezstratne.

W dalszym ciągu przyjmujemy, że współczynniki indukcyjności własnej, wzajemnej oraz pojemności są niezależne od zmiennej czasowej ani od zmian opisujących ładunki i prądy (zależność pojemności od ładunków można w razie potrzeby dopuścić).

Przewody cewek mają małe grubości w porównaniu z ich pozostałymi wymiarami (chodzi o to, by sposób rozkładu prądu wewnątrz przewodów miał możliwie mały wpływ na wartości współczynników indukcyjności; przewodów "nie skończenie cienkich" nie można rozpatrywać ze względu na to, że współczynnik indukcyjności własnej staje się wówczas nieskończony).

Założmy ekranowanie poszczególnych kondensatorów (nie ma to zresztą znaczenia pomniejszającego ogólność rozważań - zawsze w przypadku sprzężeń pomiędzy kondensatorami można wprowadzić ich więcej, tak by sprzężenia już potem nie występowały). Odnośnie każdego kondensatora należy również założyć, że odległości między jego płytkami (w przybliżeniu stałe) oraz ich grubości są znacznie mniejsze od średnich rozmiarów liniowych określających ich powierzchnie. Sens tego założenia jest podobny do poprzedniego dla cewek.

Od strony mechanicznej będziemy opisywali nasz układ w inercjalnym układzie odniesienia.

Odształcenia względne omawianych ciał sztywnych (dla rozpatrywanych sił) winny być niewielkie oraz niewielkie ich rozmiary w porównaniu z długością najkrótszych spośród rozpatrywanych fal sprężystych (są to warunki sztywności).

Zakładamy, że siły tarcia są pomijalne w porównaniu z innymi; lub jeśli występują jedynie one, to rozproszenie energii związane z tarcie poszczególnych ciał jest też małe w porównaniu do ich energii kinetycznych (ich obecność powinna niewiele tylko zmienić ruch układu w rozpatrywanym przedziale czasu). Podobne uwagi można uczynić odnośnie ewentualnej oporności elektrycznej, zakładając jednocześnie, że gęstość prądów przesunięcia w przewodnikach jest znacznie mniejsza od gęstości prądów przewodzenia.

Prędkości ciał względem wybranego inercjalnego układu odniesienia mają być małe w porównaniu do prędkości  $c$  (aby uniknąć efektów relatywistycznych).



Więzy, którym poddane są nasze ciała spełniają warunki holonomiczności regularności, dwustronności, skleronomiczności i ich realizacja jest bez-tarciowa ([12], R.II; [14]).

### 3. Uwagi o więzach elektrycznych. Wprowadzenie praukładu współrzędnych

Przypuśćmy, że stan naszego układu opisywany jest przy pomocy  $n$  zmiennych rzeczywistych  $q^{k_p}$  ( $k_p \in \{1_p, \dots, n_p\}$ ), przy czym dla: ( $1_p \leq k_p \leq r_p$ ,  $0 \leq r_p \leq n_p$ ) zmienne te oznaczają ładunki elektryczne oczkowe sieci jaką tworzą cewki i kondensatory, a dla ( $r_p < k_p \leq n_p$ ) - współrzędne uogólnione mechanicznie zgodne z więzami ([12], R.II).

Niezbędna jest tu pewna uwaga wskazująca na sposób powiązania ładunków gałęziowych i oczkowych. Mianowicie zachodzi:

$$q \stackrel{\#}{=} \frac{b}{g^{k_p}} q^{k_p} + \frac{q}{g(0)}, \quad (1_p \leq k_p \leq r_p), \quad (1)$$

gdzie "g" oznacza numer gałęzi,  $\frac{b}{g^{k_p}}$  - znany z teorii sieci elektrycznych współczynnik orientacji gałęzi  $g$  względem oczka  $k_p$  (gałąź jest ta zorientowana za pomocą kierunku przepływu dodatniego ładunku; w stanie statycznym do orientacji gałęzi może posłużyć uporządkowana para ładunków na okładkach kondensatora - analogicznie do prądu),  $q$  - ładunek jaki przepłynął przez gałąź  $g$  (zgodnie z jej orientacją) do chwili  $t = t_0 +$ . Przy odpowiednim, znanym z teorii sieci, wyborze oczek niezależnych rząd macierzy współczynników  $\frac{b}{g^{k_p}}$  jest równy  $r_p$ . Sens umieszczania wskaźników  $g, k_p$  na różnych poziomach oraz gwiazdki przy znaku równości będzie wyjaśniony później. Dwa wskaźniki powtarzające się w iloczynie oraz ewentualnie w innych wyrażeniach (co w razie potrzeby będzie precyzowane) oznaczać będą sumowanie (w ustalonym zakresie).

Przez analogię do mechaniki równania więzów można określić:

$$\frac{a}{g u} q + \frac{q}{u(0)}, \quad \frac{q}{u(0)} + \frac{a}{g u} q, \quad (2)$$

gdzie "a" - współczynnik orientacji gałęzi  $g$  względem węzła  $u$ . Równania te są niezależne jeśli wypisujemy je dla wszystkich węzłów z wyjątkiem jednego (całej sieci lub jej części galwanicznie izolowanych). Na skutek tożsamości topologicznej:

$$\frac{a}{g u} b = 0, \quad 1_p \leq k_p \leq r_p, \quad (3)$$

równanie (2) jest spełnione dla dowolnych wartości " $q^{k_p}$ " - co nadaje im właśnie charakter "współrzędnych" zgodnych z więzami (holonomicznymi, regularnymi, dwustronnymi i skleronomicznymi). Więzy te spełniają warunek wynikający z beztarciowej ich realizacji, mianowicie ortogonalności reakcji do ich hiperpowierzchni. Nietrudno zauważyć, że rolę reakcji więzów spełnia napięcie na zaciskach gałęzi  $g$  opisane wyrażeniem -  $\frac{a}{g u} V$ . Równania (1) odgrywają tu rolę równań parametrycznych więzów. Podobne rozwa-

żania można przeprowadzić dla prądów różniczkując równania (1), (2) względem "t" - ładunki wybraliśmy dlatego, gdyż one będą właśnie traktowane jako określające stan układu.

Wyobraźmy sobie teraz zbiór opisanych układów (każdy przy pomocy współrzędnych  $q^p$  ( $k_p \in (1_p, \dots, n_p)$ ) tego samego rodzaju) składających się z ciał sztywnych cewek i kondensatorów spoczywających względem siebie (spoczynek ten może być zapewniony pewnymi dodatkowymi więzami), a różniących się od siebie wartościami ciągów współrzędnych należących do zbioru określonego warunkiem:

$$\left| q^{k_p} \right| < \delta, \quad \delta > 0, \quad k_p \in (1_p, \dots, n_p). \quad (4)$$

Przyporządkujemy teraz każdemu z tych układów punkt pewnej przestrzeni w ten sposób, by pomiędzy przestrzenią punktową a ciągami otoczenia (4) zachodził dla pewnej wartości " $\delta$ " homeomorfizm (przestrzeń ta nazywa się w mechanice konfiguracyjna). Istnienie jego można zapewnić bądź dodatkowym aksjomatem; bądź zbudować jego model traktując naszą przestrzeń punktową, która będzie zmetryzowana (niekoniecznie w sposób euklidesowy), jako zanurzoną w przestrzeni euklidesowej o większej liczbie wymiarów, która jest homeomorficzna z przestrzenią arytmetyczną o tej samej liczbie wymiarów zmetryzowaną również w sposób euklidesowy. Dokładną konstrukcją takiego zanurzenia nie będziemy się tu zajmować.

Uwaga: pojęcie ciągłości występujące w definicji homeomorfizmu można uzyskać niezależnie od tego czy przestrzeń punktowa Hausdorffa jest dodatkowo zmetryzowana, czy nie.

W ten sposób zbudowaliśmy pewien praukład współrzędnych (wspomniany homeomorfizm; stąd też znaczek p przy oznaczeniu współrzędnych tego układu) dokonując charakterystycznego kroku polegającego na badaniu nie jednego układu elektromechanicznego, a pewnego ich zbioru, którego elementy różnią się między sobą swymi stanami. W teorii układów, a nie jednego układu, takie stanowisko jest zrozumiałe.

#### 4. Definicja zbioru dopuszczalnych układów współrzędnych

Następnie zdefiniujemy zbiór dopuszczalnych układów współrzędnych podając wprowadzony praukład transformacjom określonym następująco ([6], cz. I, R.II): każda z nich określona w zbiorze otwartym zawartym w przestrzeni  $R^n$  (ewentualnie pustym) jest klasy  $C_3$  (chodzi tu o wszystkie takie transformacje), czyli daje się określić funkcjami klasy  $C_3$ :

$$q^{k'} = \varphi^{k'}(q^k) \quad (5)$$

spełniającymi warunkiem:

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial q}{\partial k} \\ \frac{\partial q}{\partial k'} \end{bmatrix} \neq 0, \quad \begin{array}{l} k \in (1, \dots, n), \\ k' \in (1', \dots, n') \end{array} \quad (6)$$

w wymienionym zbiorze.

Warunek (6) i określenie klasy mają sens wówczas, gdy transformacja nie jest pusta.

Podane tu transformacje tworzą pseudogrupę  $G_3$  ([4], cz.I, R.I), spełniającą warunki:

1. Każda transformacja określona jest na zbiorze otwartym (ewentualnie pustym).

2. Obrazy dowolnych zbiorów otwartych poprzez rozpatrywane transformacje są zbiorami otwartymi (zbiory te zawarte są w dziedzinach odpowiednich transformacji).

3. Lokalne złożenie transformacji należących do pseudogrupy, również do niej należy.

4. Lokalne odwrócenie transformacji należącej do pseudogrupy też do niej należy.

(W pozycji [4], cz.I, R.I podane są pojęcia lokalnego złożenia i odwrócenia transformacji).

Uwaga: praukład współrzędnych transformujemy tak, by do dziedziny transformacji należał jego początek (współrzędne zerowe), (porównaj też zamieszczoną poniżej uwagę o pustych układach).

Otrzymany zbiór dopuszczalnych układów współrzędnych tworzy strukturę lokalną w sensie S. Gołąba - L. Dubikajtisa; czyli ma on te własności, że złożenie dowolnego lokalnego układu współrzędnych i dowolnej transformacji wyznaczonej przez dwa układy należy znów do tej struktury (jest to operacja nie wyprowadzająca poza nią) oraz do dziedziny każdego układu lokalnego należy ten sam punkt - tu wspomniany początkowy (lub jest ona pusta). Złożenie, o którym mowa, dotyczy pewnej wspólnej części przeciwdziedziny układu współrzędnych i dziedziny transformacji, do której należą współrzędne punktu początkowego (mogą one też być puste).

Uwaga: w pustym układzie współrzędnych nie będziemy określać współrzędnych żadnych obiektów. Można z pseudogrupy wyeliminować transformacje puste oraz przypadki złożenia układu współrzędnych i transformacji, gdy ich przeciwdziedziny i dziedziny nie mają części wspólnych. Wówczas nie będzie w strukturze pustego układu współrzędnych.

Rozpatrywaną przestrzeń, której przyporządkowane zostały układy współrzędnych, nazywać będziemy przestrzenią opartą o pseudogrupę  $G_3$  lub krótko przestrzenią  $G_3$ .

Nasze rozważania mają charakter lokalny i nie obejmują znacznie bardziej złożonego przypadku, kiedy przestrzeń punktowa nie jest homeomor-

ficzna ze zbiorem przestrzeni arytmetycznej wyznaczonym warunkiem (4). Nie wprowadzamy tu więc koniecznych wówczas pojęć rozmaitości, atlasu oraz rozmaitości różniczkowej ([6], cz.I, R.II).

### 5. Metryka kinematyczna

Wprowadzimy teraz w przestrzeni  $G_3$  metrykę. W tym celu wypiszemy wzór określający energię kinetyczną naszego układu elektromechanicznego, "znajdującego się" w punkcie o współrzędnych  $q^k$  i posiadającego prędkość  $\dot{q}^k$ . Jeśli więzy mechaniczne są holonomiczne regularne, dwustronne i skleronomiczne (elektryczne są takimi - równania (1)), to energia kinetyczna układu jest opisana funkcją jednorodną kwadratową prędkości uogólnionych  $\dot{q}^k$ , którą nie zależy w sposób wyraźny od zmiennej czasu  $t$  ([12], R.II). Jest ona określona wzorem:

$$T = \frac{1}{2} a_{kl}(q) \dot{q}^k \dot{q}^l, \quad k, l \in (1, \dots, n), \quad (7)$$

przy czym  $r$  pierwszych numerów zmiennych dotyczących praukładu współrzędnych jest związanych z prądami, a reszta z mechanicznymi prędkościami uogólnionymi.

Uważajmy teraz funkcje  $a_{kl}(q)$  za określające pole tensora metrycznego w rozważanej przestrzeni  $G_3$ , czyli uczynimy z niej przestrzeń Riemanna  $V^n$ . O funkcjach  $a_{kl}(q)$  będziemy zakładali, że są klasy  $C_2$  (na skutek transformacji współrzędnych klasy  $C_3$  jest to własność współzmiennicza). Tensor metryczny jest tensorem symetrycznym:

$$a_{kl}(q) = a_{lk}(q), \quad k, l \in (1, \dots, n). \quad (8)$$

Dla:

$$1_p < k_p, \quad 1_p < l_p, \quad a_{k_p l_p}(q) \doteq M_{k_p l_p}(q), \quad (9)$$

gdzie  $M_{k_p l_p}$  oznaczają tzw. oczkowe współczynniki inducyjności; dla:  $(k_p = l_p)$  - własnej, dla:  $(k_p \neq l_p)$  - wzajemnej. Współczynniki te wiążą się z gałęziowymi w następujący sposób:

$$M_{k_p l_p}(q) = b_{gk_p} M_{gh}(q) b_{hl_p}, \quad (10)$$

ponieważ:

$$T_{(el)} = \frac{1}{2} \sum_{gh} M_{gh}(q) \dot{q}_g \dot{q}_h = \frac{1}{2} \sum_{k_p l_p} M_{k_p l_p}(q) \dot{q}^{k_p} \dot{q}^{l_p}, \quad (11)$$

$$1_p < k_p, l_p < r_p,$$

gdzie "g" oraz "h" oznaczają numery gałęzi,  $M_{gh}$  - gałęziowe współczynniki indukcyjności,  $T_{(el)}$  - energię cewek. Wiadomo, że współczynniki  $M_{k_p l_p}$  posiadają własności (8); dla części mechanicznej zachodzi to również ([12], R.II). Własność (8) jest współzmiennicza.

Zależność funkcji  $a_{kl}$  tylko od mechanicznych współrzędnych uogólnionych obowiązuje na ogół jedynie w rozpatrywanym praukładzie współrzędnych, w innym układzie, na skutek transformacji traktujących równorzędnie współrzędne elektryczne i mechaniczne, nie będziemy mogli w ogóle dokonać ich podziału na części elektryczną i mechaniczną. Podobnie podział energii kinetycznej na wymienione części wiąże się z rozdziałem formy kwadratowej na dwa niezwiązane składniki ( $a_{kl} = 0$ ), jeśli "k" i "l" oznaczają wskaźniki współrzędnych różnego rodzaju na ogół tylko w praukładzie współrzędnych.

Łatwo spostrzec, iż na skutek tego, że " $\dot{q}^k$ " reprezentują współrzędne wektora kontrawariantnego (pola wektorowego) o regule transformacyjnej typu:

$$v^k(q') = A_k^{k'}(q(q')) v^k(q(q)), \quad (12)$$

gdzie:

$$A_k^{k'}(q) = \frac{\partial q^{k'}}{\partial q^k}(q), \quad \begin{array}{l} k \in (1, \dots, n), \\ k' \in (1', \dots, n') \end{array} \quad (13)$$

energia kinetyczna określona jest skalarem (polem skalarnym). Różnica pomiędzy " $v^k$ " i " $\dot{q}^k$ " jest taka, że jeśli rozpatrywać ruch układu to pole " $\dot{q}^k$ " dane jest wzdłuż jego toru.

Teraz też widać sens umieszczania wskaźników k, l reprezentujących ja kies wielkości ko czy kontrawariantne na innych poziomach niż wskaźniki g, h, które nie są związane z żadnymi transformacjami układów współrzędnych. Gwiazdka przy znaku równości we wzorach (1), (9), (11) oznacza, że nie zachodzą one we wszystkich układach współrzędnych, lecz tylko w niektórych, tu mianowicie w naszym praukładzie. Odtąd umawiamy się, że wskaź-

niki  $j, k, l, m$  będą spełniać związek:  $j, k, l, m \in (1, \dots, n)$ ; umowa obowiązuje do końca wstępu.

Określmy teraz formę metryczną  $ds$  w przestrzeni  $G_3 (V^n)$ :

$$(ds)^2 = 2 T(dt)^2 = a_{kl}(q) dq^k dq^l. \quad (14)$$

Jest to poprawna definicja metryki lokalnej, gdyż zakładając, że forma (14) jest istotnie dodatnio określona, można wykazać, iż spełnia ona (w sensie lokalnym) 3 znane dobrze aksjomaty przestrzeni metrycznych ([4], cz.I, R.I). Analizując energię we współrzędnych praukładu, wiemy z teorii pola elektromagnetycznego i z mechaniki, że zachodzi faktycznie określoność formy (14), o której była mowa. Potrzeba wprowadzenia takiej metryki (tzw. kinematycznej) wyniknie z dalszych rozważań.

#### 6. Równania Lagrange'a 2 rodzaju układu elektromechanicznego

Możemy teraz przystąpić do podania równań ruchu naszego układu w postaci równań Lagrange'a 2 rodzaju. W tym celu określimy jego energię potencjalną, gdy znajduje się on w punkcie o współrzędnych  $q^k$  (to znaczy zachodzi tu w pewnej chwili czasu koincydencja punktu odpowiadającego naszemu układowi wykonującemu ruch z punktem układu odniesienia, który występuje w definicji układu współrzędnych; używamy tu też tego samego oznaczenia dla współrzędnych obu układów).

$$V_{(el)} = \frac{1}{2} S_{gh}(q) q^g q^h = \frac{1}{2} S_{k_p l_p}(q) q^{k_p} q^{l_p} + \quad (15)$$

$$+ \frac{b}{g k_p} S_{gh}(q) q^{k_p} h(0) + \frac{1}{2} S_{gh}(q) q^{g(0)} h(0), \quad l_p < k_p, l_p < r_p.$$

Do przekształcenia występującego we wzorze (15) wykorzystujemy wzór (1) wprowadzając definicje:

$$S_{gh}(q) = \frac{1}{U(q)}, \quad (16)$$

$$S_{k_p l_p}(q) = \frac{b}{g k_p} S_{gh}(q) \frac{b}{h l_p}, \quad l_p < k_p, l_p < r_p. \quad (17)$$

Na skutek założonego braku sprzężeń pojemnościowych mamy:

$$S_{gh}(q) = \frac{S(q)}{|g g|} \delta_{gh}. \quad (18)$$

Zależność funkcji  $C$  od elektrycznych współrzędnych uogólnionych w układzie oznacza obecność elektrycznie nieliniowych kondensatorów.

Ujęcie choćby jednego z powtarzających się wskaźników w nawiasy, bądź pionowe kreski, oznacza zakaz sumowania podług nich. " $\delta$ " - oznacza znaną deltę Kroneckera.

Do elektrycznej energii potencjalnej można dołączyć jeszcze mechaniczną, pochodzącą np. od współdziałania potencjalnego pola grawitacyjnego z masami ciał sztywnych. Wówczas mamy:

$$V = V_{(el)} + V_{(m)}. \quad (19)$$

Energia potencjalna opisana jest skalarną funkcją wyłącznie współrzędnych uogólnionych (klasy  $C_2$ ).

Tworzymy teraz funkcję Lagrange'a:

$$L = T - V. \quad (20)$$

Równania Lagrange'a 2 rodzaju mają postać:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0. \quad (21)$$

Nie będziemy tutaj rozważali kwestii równoważności tych równań i zwykłych równań sieci oraz równań Lagrange'a 1 rodzaju dla części mechanicznej (patrz pozycje: [12], R.II; [9]). Chodzi nam jedynie o podkreślenie ich kowariantnego charakteru i pewnych spraw z tym związanych. Można zatem traktować je jako aksjomaty dla omawianego układu elektromechanicznego. Takie stanowisko przyjmowane jest ogólnie w mechanice i teorii pola elektromagnetycznego (stałe skupione można traktować jako reprezentacje pewnych obszarów pola, gdy interesują nas tylko takie wielkości jak prądy w cienkich przewodach i napięcia między pewnymi ich punktami - jest to znana idea przejścia od teorii pola do teorii stałych skupionych przy uprzednio wymienionych założeniach).

7. Równoważność równań Lagrange'a 2 rodzaju i pewnych równań tensorowych (z pochodną absolutną) oraz ich interpretacja elektryczna

Równania (21) można zapisać w postaci:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} = - \frac{\partial V}{\partial q^k}. \quad (22)$$

Są one równoważne wzorowi:

$$a_{kl} \frac{d^2 q^l}{dt^2} + \Gamma_{klm} \frac{dq^l}{dt} \frac{dq^m}{dt} = - \frac{\partial V}{\partial q^k} \quad (23)$$

lub:

$$\frac{d^2 q^k}{dt^2} + \Gamma^k_{lm} \frac{dq^l}{dt} \frac{dq^m}{dt} = - a^{kl} \frac{\partial V}{\partial q^l}, \quad (24)$$

gdzie:

$$\Gamma_{klm} = \frac{1}{2} (\partial_l a_{mk} + \partial_m a_{kl} - \partial_k a_{lm}), \quad (25)$$

$$\Gamma^j_{lm} = a^{jk} \Gamma_{klm} \quad (26)$$

([4], cz.II, R.VII, X) lub: ([13], R.II, V).

Uwaga: równania Lagrange'a (21), (22) są ważne także przy więzach reonomicznych, równania (23), (24) - przy skleronomicznych. W obu przypadkach obowiązuje reszta założeń co do więzów.

Lewa strona wzoru (24) oznacza współrzędne pochodnej absolutnej wektora kontrawariantnego o współrzędnych  $\frac{dq^k}{dt}$  i przedstawia znowu współrzędne wektora kontrawariantnego (pola wektorowego wzdłuż krzywej  $q^k(t)$  ruchu naszego układu). Wzór (23) opisuje to samo w postaci kowariantnej. Oba, jako że stanowią porównanie współrzędnych wektorów tego samego rodzaju są współzmiennicze. (Zachodzą w tej samej postaci w dowolnym spośród określonych uprzednio układów współrzędnych. Użycie wskaźników j, k, l, m może dotyczyć dowolnego z nich, ta sama uwaga odnosi się do innych współzmiennicznych wzorów. Zamiast tej umowy można by przyjąć ogólnie, tak jak to było zrobione dla praukładu, by wskaźniki j, k, l, m opatrywać dodatkowym, dotyczącym układu współrzędnych i wówczas kowariantność wzoru oznaczałaby spełnienie go dla każdego dodatkowego wskaźnika układu. Lecz komplikowałoby to pismo - szczególnie dla wzorów transformacyjnych) " $\Gamma_{klm}$ " lub " $\Gamma^k_{lm}$ " oznaczają współrzędne symboli Christoffela 1 i 2 rodzaju. Zależą one od pochodnych współrzędnych tensora metrycznego. (Stosujemy takie oznaczenia, ponieważ obiektów równoległego przeniesienia niezależnie od tensora metrycznego nie będziemy rozpatrywać.)

Jeśli zadać warunki początkowe dla czasu  $t = t_0^+$ , tzn. podać w tym punkcie wartości " $q^k(t_0^+)$ " (np. w praukładzie:  $(q^p(t_0^+) = 0)$  - patrz: równanie (1); warunki początkowe dla kondensatorów zakładamy w chwili  $t_0^+$  tak, by było spełnione II prawo Kirchhoffa) i " $\frac{dq^k}{dt}(t_0^+)$ ", to na podsta-



wie twierdzenia o istnieniu całki równań różniczkowych ([8], cz.II, R.XV) w pewnym otoczeniu tych warunków będzie istniało jednoznaczne rozwiązanie układu równań różniczkowych (24). (Oczywiście muszą być zadane funkcje  $a_{kl}(q)$  i  $V(q)$ ).

Jeśli układ byłby czysto elektryczny ( $r_p = n_p$ ), to wówczas w takim układzie współrzędnych, w którym zachodzi:

$$r_{1p}^{k_p} \stackrel{=} {=} 0, \quad (27)$$

dla wszystkich punktów rozpatrywanego otoczenia warunków początkowych ( $n_p$  w praukładzie) z równań (23), (15), (9) wynikają równania oczkowe:

$$M_{k_p 1_p} \frac{d^2 q^{1_p}}{dt^2} + S_{k_p 1_p} q^{1_p} = - \frac{b}{g_{k_p}} S_{gh} q^g h(0). \quad (28)$$

jeśli dodatkowo pojemności nie zależą od ładunków (są liniowe). Składnik po prawej stronie równania (28) oznacza oczkową SEM związaną z ładunkami początkowymi kondensatorów.

Uwaga: równanie (28) dotyczy praukładu i nie ma charakteru współzmienniczego (chyba, że ładunki początkowe kondensatorów byłyby równe zeru lub wyrażenie po prawej stronie wzoru (28) rozpatrywane byłoby w charakterze " $E_{(0)k}$ " i stosowane transformacje układów współrzędnych byłyby zacieśnione do centroafinicznych. Wówczas też " $M_{kl}$ " i " $S_{kl}$ " miałyby charakter geometryczny taki jak " $a_{kl}$ ").

W ogólnym przypadku nie musi wcale istnieć taki układ współrzędnych, w którym zachodzi wzór (27). Wiadomo ([4], cz.II, R.VI; 13, R.III), że warunkiem koniecznym i wystarczającym do jego istnienia jest zerowanie się tensora krzywizny w omawianym otoczeniu. Jeśli warunek ten jest spełniony mamy do czynienia ze szczególnym przypadkiem przestrzeni Riemanna, z tzw. przestrzenią metryczno-euklidesową ([4], cz.II, R.VIII).

Jeśli układ nie jest czysto elektryczny, to nietrudno jest zorientować się w sensie drugiego składnika lewej strony wzoru (23) (przy użyciu praukładu współrzędnych). Mianowicie dla takiego " $k_p$ ", kiedy wzór ten stanowi równanie oczkowe, wspomniany składnik ma sens SEM rotacji (tj. występującej na skutek zmian strumienia magnetycznego spowodowanych ruchem cewek układu).

Nie jest celem tej pracy badanie poszczególnych układów elektromechanicznych, lecz byłoby rzeczą bardzo ciekawą rozpatrzenie pod kątem metryki i własności z niej wynikających przynajmniej kilku podstawowych maszyn elektrycznych.

Przypuśćmy teraz, że funkcja energii potencjalnej  $V$  jest niezależna od zmiennych  $q^k$  dla rozpatrywanego obszaru; wówczas ponieważ nasz układ elektromechaniczny posiada więzy zapewniające spełnienie zasady zachowania energii ([12], R.II; [14]), jego energia kinetyczna też jest opisana funkcją stałą (wzdłuż toru  $q^k(t)$ ). Wtedy zamiast równania (24) mamy:

$$\frac{d^2 q^k}{ds^2} + \Gamma_{lm}^k \frac{dq^l}{ds} \frac{dq^m}{ds} = 0. \quad (29)$$

Są to równania linii geodezyjnych ([4], cz.II, R.V) lub: ([13], R.II). Linie te można traktować jako ekstremale pewnego problemu wariacyjnego ([13], R.II), mianowicie chodzi o zerowanie się pierwszej wariacji całki:

$$\int_{(1)}^{(2)} (a_{kl} p^k p^l)^{\frac{1}{2}} ds, \quad (30)$$

gdzie:

$$p^k = \frac{dq^k}{ds} \quad (31)$$

oraz krzywe występujące w problemie wariacyjnym przechodzą przez punkty o współrzędnych  $q^{(1)}$ ,  $q^{(2)}$ . Narzuca to na ekstremale odmienne warunki początkowe od omawianych, poza tym trzeba zaznaczyć, że spełnienie równania (29) jest tylko warunkiem koniecznym dla osiągnięcia minimum względnego całki (30). Nie będziemy tu zajmowali się bliżej wymienionymi problemami rachunku wariacyjnego.

8. Metryka działania. Równania tensorowe oparte na tej metryce.

Linie geodezyjne i odpowiadający im problem wariacyjny

Przez wprowadzenie nowego tensora metrycznego:

$$b_{kl}(q) = (E - V(q)) a_{kl}(q) \quad (32)$$

([13], R.V), można osiągnąć, by tor układu był linią geodezyjną również i wówczas, gdy energia potencjalna nie jest stałą ("E" - oznacza energię całkowitą układu, stałą wzdłuż jego toru; zakładamy, że zachodzi:  $T \neq 0$  w czasie ruchu). Metryka oparta na tensorze  $b$  nazywa się metryką dzia-

żania. Wówczas mamy związek między symbolami Christoffela 2 rodzaju opartymi na tensorach  $a$  i  $b$ :

$$\Gamma_{(a)lm}^j = \Gamma_{(b)lm}^j + \frac{1}{2(E-V)} \left( \delta_l^j \frac{\partial V}{\partial q^m} + \delta_m^j \frac{\partial V}{\partial q^l} - a_{lm} a^{jk} \frac{\partial V}{\partial q^k} \right). \quad (33)$$

Jeśli zdefiniować:

$$(d\sigma)^2 = b_{kl}(q) dq^k dq^l = (E-V(q))(ds)^2, \quad (34)$$

to można wykazać ([13], R.V), że:

$$\frac{d^2 q^k}{d\sigma^2} + \Gamma_{(b)lm}^k \frac{dq^l}{d\sigma} \frac{dq^m}{d\sigma} = 0, \quad (35)$$

czyli tor układu jest faktycznie linią geodezyjną względem tensora metryki działania. Zamiast równania (35) można zażądać zerowania się pierwszej wariancji całki:

$$\int_{(1)}^{(2)} (b_{kl} r^k r^l)^{\frac{1}{2}} d\sigma, \quad (36)$$

gdzie:

$$r^k = \frac{dq^k}{d\sigma}. \quad (37)$$

Zarówno ekstremala jak i krzywe porównawcze przechodzą przez punkty o współrzędnych  $\begin{matrix} q \\ (1) \end{matrix}$ ,  $\begin{matrix} q \\ (2) \end{matrix}$ .

Uwaga: na rozpatrywane układy elektromechaniczne narzucone były bardzo kłopotliwe warunki w postaci doboru więzów. Można by je znacznie zliberalizować, np. dopuścić tarcie (opory elektryczne), więzy nieholonomiczne i mimo to uzyskać równania ruchu układu w postaci kowariantnej. Nie chodzi tu o wyczerpanie tego zagadnienia, a o najprostszą jego ilustrację, która zyskuje przy zadanym rodzaju więzów piękne twierdzenia o "ruchu układu" po linii geodezyjnej.

## 9. Podsumowanie

Po tym szkicowym przedstawieniu teorii układów elektromechanicznych może powstać pytanie, (które w podobnej formie wystąpi odnośnie tensorowego ujęcia teorii składowych symetrycznych): jaka jest jej przydatność?

Pod względem czysto praktycznym, tak jak w teorii składowych symetrycznych lepiej używać takich, dla których jak najwięcej macierzy impedancji elementów sieci jest diagonalnych, tak tu lepiej wybrać taki układ współrzędnych, w których łatwo jest zcałkować równania (24), np. o ile istnieje, to taki gdzie zachodzą związki (27). Tym więc można tłumaczyć chęć "posiadania" jak największej ilości układów współrzędnych oraz formułowania praw teorii w postaci kowariantnej.

Lecz jest inny motyw, wydaje się daleko ważniejszy od sprawy łatwości przeprowadzenia rachunków (i co warto podkreślić dużej wygody i przejrzystości symboliki tensorowej), który uzasadnia taką właśnie postać teorii. Mianowicie przyporządkowanie punktowi (w danym układzie) współrzędnych  $q^k$  czy też współrzędnych obiektów geometrycznych, jak np.  $a_{kl}$ ,  $V$ , można interpretować jako wynik pomiaru zrealizowanego przy użyciu pewnych przyrządów (układów pomiarowych), które są takie lub inne, w zależności od czego otrzymujemy pomiar wymienionych wielkości w różnych układach współrzędnych, np.:  $q^k$ ,  $a_{kl}$ ,  $V$  - w jakimś innym układzie niż poprzednio wymieniony. Otóż czym więcej mamy takich układów współrzędnych (układów pomiarowych), w których prawa naszej teorii są zapisane w podobnych postaciach (kowariantnie), tym bardziej uniezależniamy się w wysłowieniu własności opisanego obiektu fizycznego od użytych przyrządów (układów pomiarowych); czyli można powiedzieć, że tym lepiej charakteryzujemy sam "czysty" obiekt. To właśnie jest chyba jedną z przyczyn rozszerzania się zasięgu stosowności rachunku tensorowego do teorii daleko odbiegających problematyką (no i wagą) od teorii-względności czy też pola elektromagnetycznego (stanowi to naturalnie również duży walor tych ostatnich).

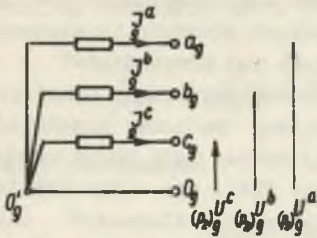
Wypada jeszcze usprawiedliwić ten dość długi wstęp tym, że w łatwo dostępnej literaturze dotyczącej tego tematu są luki (z naszego punktu widzenia). Tak np. w artykule [14] omawiane są tylko układy mechaniczne a w podręczniku [13] nie jest poruszana kwestia wyboru dopuszczalnych układów współrzędnych oraz nie są sprecyzowane w ogóle założenia fizyczne odnośnie rozpatrywanych "ogólnych układów dynamicznych" i wykład prowadzony jest czysto formalnie.

## II. Sieci elektryczne o pewnych symetriach

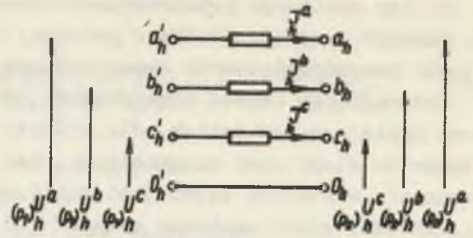
### 1. Pewne ogólne założenia dotyczące opisywanych sieci

Zakładamy, że sieci składają się wyłącznie z gałęzi 4 przewodowych (w skończonej ilości) zilustrowanych rys. 1, 2.

Gałęzie przedstawione rys. 1 nazywać będziemy końcowymi; rys. 2 - przelotowymi.



Rys. 1



Rys. 2

Elementy wchodzące w skład gałęzi (zwyczajnych)  $aO'$ ,  $bO'$ ,  $cO'$  lub:  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  (rys. 1, 2) oraz ewentualnie pewne inne ogólniejsze opiszemy dokładnie pod względem elektrycznym później, gdyż do tego będzie konieczne wprowadzenie pewnych układów współrzędnych. Na razie założymy o nich tylko to, że są liniowe, to znaczy związki pomiędzy napięciami i prądami występującymi w ich opisie wyrażone są przy pomocy liniowych równań algebraicznych, różniczkowych, względnie różniczkowo-całkowych, zwyczajnych o stałych parametrach. Będzie to oznaczać np., że jeśli wśród tych elementów występują cewki - ich charakterystyka magnesowania jest liniowa; dla maszyn wirujących oznacza to dodatkowo niezależność ich prędkości obrotowej od czasu (wprawdzie równania różniczkowe tych maszyn posiadają parametry zależne od zmiennej czasu, lecz co dla nas będzie ważne, dla pewnych przypadków w stanie ustalonym przy "pobudzeniach" sinusoidalnych "odpowiedzi" są również sinusoidalne). Na ogół elementy te będą zbudowane z oporników, cewek oraz kondensatorów i w związku z tym zakładamy, że są dla nich spełnione wszystkie postulaty wymienione we wstępie (łącznie z liniowością kondensatorów).

Źródła występujące w sieci  $(e, I)$  opisane są sinusoidalnymi funkcjami zmiennej czasu oraz rozpatrujemy stan ustalony. Implikuje to (łącznie z poprzednim założeniem) możliwość zastosowania metody symbolicznej do obliczania interesujących nas prądów i napięć.

Następnie zakładamy, że gałęzie  $OO'$  są bezimpedancyjne oraz pozbawione źródeł. O znaczeniu tego założenia oraz sposobie uzyskania takiego modelu sieci będzie mowa później. Później też będziemy mogli uwolnić się w pewien sposób od krępującego założenia o budowie sieci z 4 przewodowych gałęzi.

## 2. Praukłady współrzędnych

### A. Praukład w przestrzeni prądowej

Wprowadzone gałęzie 4-przewodowe scharakteryzowane są 3 prądami:  $J^a$ ,  $J^b$ ,  $J^c$  lub:  $J_h^a$ ,  $J_h^b$ ,  $J_h^c$  (rys. 1, 2), (używamy metody symbolicznej, dla

wartości skutecznych, nie zaznaczając tego dodatkowo daszkami; wskaźniki  $g$  i  $h$  odnoszą się do całej 4-przewodowej gałęzi). Prądem przewodu  $00'$  w tej chwili nie zajmujemy się.

Wyobraźmy sobie zbiór takich gałęzi  $g$  lub  $h$ , które różnią się między sobą wartościami trójek prądów  $J^a, J^b, J^c$ , czyli:

$$J^{\alpha f} \in C, \quad \alpha_f \in (a, b, c), \quad (1)$$

gdzie "C" oznacza płaszczyznę liczbową zespoloną otwartą (zbiór liczb zespolonych). Przyporządkujemy każdej z tych gałęzi punkt pewnej przestrzeni. Niech teraz pomiędzy przestrzenią punktową (prądową) a przestrzenią  $C^3 = C \times C \times C$  zachodzi homeomorfizm.

Można to np. osiągnąć zakładając, że nasza przestrzeń punktowa jest przestrzenią afiniczną ([11], R.I). Z aksjomatyki tej przestrzeni wynika istnienie homeomorfizmu pomiędzy nią a przestrzenią arytmetyczną (w naszym przypadku będzie to przestrzeń 6 wymiarowa  $R^6$ ); z kolei przestrzeń  $R^6$  jest homeomorficzna z przestrzenią  $C^3$  (przestrzeń tę możemy uważać na razie jako topologiczną, lecz pozbawioną metryki). Stąd na skutek przechodniości mamy żadaną relację homeomorfizmu pomiędzy przestrzenią punktową prądową a przestrzenią  $C^3$  - czyli wprowadziliśmy praukład współrzędnych dla wybranej gałęzi (fazowy - stąd indeks  $f$  przy oznaczeniach współrzędnych tego układu). Wprawdzie zwykle przez układ współrzędnych rozumie się przyporządkowanie punktom otoczenia w przestrzeni Hausdorffa ciągów liczb rzeczywistych z pewnego otoczenia przestrzeni  $R^n$  (wzajemnie jednoznaczne i obustronnie ciągłe), ([6], cz.I, R.II); lecz można tak zawężone pojęcie układu współrzędnych uogólnić na analogiczne przyporządkowanie punktom przestrzeni punktowej Hausdorffa punktów pewnej przestrzeni analitycznej Hausdorffa, o czym jest także mowa w [6], cz.I, R.II. Z tej możliwości skorzystaliśmy tutaj.

Uwaga: nie będziemy wprowadzać tu płaszczyzny zespolonej uzupełnionej punktem w nieskończoności oraz uzupełniać w tym sensie przestrzeń  $C^3$ . Jest to spowodowane tym, że punkt w nieskończoności byłby punktem nieoznaczoną transformacji układów współrzędnych, a transformacja ta jako wyrażona funkcją meromorficzną 3 zmiennych nie miałaby w tym punkcie granicy ([7], Dodatek).

Podobną operację wprowadzenia układu współrzędnych powtarzamy dla pozostałych gałęzi (na razie zakładamy, że nie są one połączone w sieć i zasilane są niezależnie z odrębnych źródeł). Za każdym razem gałąź reprezentowana jest punktem tej samej przestrzeni prądowej. Nie wprowadzamy tu pojęcia analogicznego do przestrzeni konfiguracyjnej o liczbie wymiarów równej iloczynowi liczby gałęzi "swobodnych" przez 6, ponieważ transformacje układów współrzędnych dotyczyć będą tylko 3 współrzędnych zespolonych. Wprawdzie formalnie nic nie stoi na przeszkodzie aby naśladować te-

raz rozumowania dotyczące przestrzeni konfiguracyjnej, gdzie aksjomatami teorii byłyby nie równania Lagrange'a a od razu równania oczkowe w postaci zespolonej, kowariantne ze względu na pewne liniowe transformacje wszystkich prądów oczkowych; lecz wybieramy drogę poprzednią ze względu na to, aby wykorzystać pełniej szczególną symetrię sieci, polegającą na 4-przewodowej budowie jej gałęzi. Wobec tego punkt pracy (prądowej) układu będzie tu odpowiadał nie jednemu punktowi przestrzeni prądowej, a tylu punktom (czasem będą się mogły one pokrywać) ile jest gałęzi (w sensie 4-przewodowym, czy raczej 3-przewodowym, ponieważ zobaczymy, że prąd przewodu zerowego będzie już określony prądami pozostałych 3 przewodów).

### B. Praukład w przestrzeni napięciowej

Ponieważ gałęzi przelotowej przyporządkowane są napięcia  $(p_1)_h^{U^f}$ ,  $(p_2)_h^{U^f}$ , gdzie:

$$(p_1)_h^{U^f}, (p_2)_h^{U^f} \in C, \quad \lambda_f \in (a, b, c) \quad (2)$$

(podobnie dla gałęzi końcowej, tylko wówczas napięcia w przekroju  $p_1$  równe są zeru), więc powtarzamy poprzednie rozumowania najpierw dla jednej gałęzi i jednego przekroju tworząc przestrzeń punktową napięciową homeomorficzną z przestrzenią  $C^3$ , później przeprowadzamy to samo rozumowanie dla pozostałych przekrojów i gałęzi, zakładając, że nie pracują one na razie w sieci i posiadać mogą w przewodach a, b, c dowolne SEM. Jesteśmy więc w posiadaniu przestrzeni punktowych prądowej i napięciowej oraz praukładów współrzędnych w obu.

## 3. Zbiory dopuszczalnych układów współrzędnych

### A. Przestrzeń prądowa oparta o grupę $G_c$

Zbiór ten otrzymamy, poddając praukład transformacjom należącym do pewnej grupy. Dla współrzędnych prądowych będą to transformacje liniowe, o jacobianie różnym od zera i wyrazie wolnym równym zeru, przekształcające przestrzeń  $C^3$  na siebie:

$$J^{\alpha'} = a_{\alpha}^{\alpha'} J^{\alpha}, \quad a_{\alpha}^{\alpha'} \in C_1, \quad (3)$$

$$\det [a_{\alpha}^{\alpha'}] \neq 0, \quad (4)$$

gdzie wskaźnik  $\alpha$  przyjmuje wartości należące do zbioru 3 elementów służących do oznaczania współrzędnych prądowych w "starym" układzie współrzędnych; wskaźnik  $\alpha'$  - w "nowym" układzie. Utrzymujemy tu w dalszym cią-

gu umowę sumacyjną ze wstępu oraz umowę dotyczącą roli wskaźników w ko-  
wariantnej postaci wzorów. Ponieważ te same transformacje dotyczą wszyst-  
kich gałęzi więc dla uproszczenia pisowni opuszczamy wskaźniki gałęziowe  
g lub h.

Zbiór takich transformacji tworzy grupę (9 parametrową), ponieważ su-  
perpozycja 2 wymienionych transformacji jest transformacją liniową, o ja-  
kobianie różnym od zera, o wolnym wyrazie równym zeru, przekształcającą  
przestrzeń  $C^3$  na siebie oraz transformacja odwrotna również zachowuje wy-  
mienione własności; co można zapisać:

$$J^{\alpha\alpha'} = a_{\alpha\alpha'}^{\alpha\alpha'} J^{\alpha\alpha}, \quad \det [a_{\alpha\alpha'}^{\alpha\alpha'}] \neq 0, \quad (5)$$

stąd na mocy wzoru (3) dla superpozycji transformacji zachodzi:

$$J^{\alpha\alpha''} = a_{\alpha\alpha''}^{\alpha\alpha'} J^{\alpha\alpha}, \quad \det [a_{\alpha\alpha''}^{\alpha\alpha'}] \neq 0, \quad (6)$$

gdzie:

$$a_{\alpha\alpha''}^{\alpha\alpha'} = a_{\alpha\alpha''}^{\alpha\alpha'} a_{\alpha\alpha'}^{\alpha\alpha} \quad (7)$$

oraz druga część wzoru (6) jest spełniona na mocy twierdzenia Cauchy'ego  
o wyznaczniku iloczynu macierzy.

Transformacja odwrotna jest określona wzorem:

$$J^{\alpha\alpha} = a_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha'} J^{\alpha\alpha'}, \quad (8)$$

gdzie na skutek wzoru (3) mamy:

$$a_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha'} a_{\alpha\alpha'}^{\alpha\alpha} = a_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha} \quad (9)$$

oraz

$$\det [a_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha'}] \neq 0, \quad (10)$$

czyli " $a_{\alpha\alpha}^{\alpha\alpha'}$ " oznaczają faktycznie współczynniki przekształcenia odwrotne-  
go, posiadającego te uprzednio wymienione własności co przekształcenie pro-  
ste.

Umawiamy się, że w tym rozdziale wskaźniki:  $\alpha, \beta, \gamma$ , czy też:  $\alpha', \beta', \gamma'$ ,  
lub:  $\alpha'', \beta'', \gamma''$  itd. dotyczyć będą oznaczeń 3 współrzędnych prądowych  
(tzn. każdy z nich będzie spełniać tę rolę) odpowiednio w układach współ-  
rzędnych ( ), ( ' ), ( '' ).



Zbiór układów współrzędnych otrzymanych z praukładu przy pomocy transformacji należących do powyższej grupy tzw. centroafinicznej ( $G_c$ ) tworzy strukturę F. Kleina ([6], cz.I, R.II), tzn., że każdy układ określony jest na całej przestrzeni prądowej (punktowej) oraz jeśli rozpatrzyć dowolny układ współrzędnych i dowolną transformację wyznaczoną przez 2 układy należące do tego zbioru, to złożenie ich istnieje i również do niego należy. Wprowadzoną przestrzeń prądową będziemy nazywać przestrzenią opartą o grupę  $G_c$  lub krótko przestrzenią  $G_c$ .

Aby można było później zdefiniować w prosty sposób metrykę, wygodniej będzie operować pewną podgrupą grupy centroafinicznej.

B. Przestrzeń prądowa oparta o grupę  $G_{out}$  oraz współrzędne sprzężone

Podajemy współczynniki  $a_{\alpha}^{\beta}$  grupy transformacji  $G_c$  dodatkowym warunkiem ograniczającym:

$$a_{\alpha}^{\alpha} \bar{a}_{\alpha}^{\beta} = \delta^{\alpha\beta}, \quad (11)$$

gdzie współczynniki  $\bar{a}_{\alpha}^{\beta}$  są sprzężone w stosunku do  $a_{\alpha}^{\beta}$ . Sumowanie zachodzi tu podług wskaźnika  $\alpha$  niezależnie od tego, czy jest zaopatrzony kreską (poziomą!) czy nie, poza tym nasza umowa sumacyjna dotyczy również wskaźników umieszczonych na tym samym poziomie (inaczej niż w pozycji [4]).

Zakładając związek (11) nie trzeba już postulować osobno wzoru (4), bo obliczając wyznacznik z obu stron wzoru (11) mamy na mocy wspomnianego już twierdzenia Cauchy'ego, twierdzenia o wyznaczniku z macierzy transponowanej oraz twierdzenia o obliczaniu wartości sprzężonej iloczynu i sumy:

$$\det [a_{\alpha}^{\beta}] \overline{\det [a_{\alpha}^{\beta}]} = 1, \quad (12)$$

czyli:

$$\det [a_{\alpha}^{\beta}] = e^{J\varphi}, \quad \varphi \in R, \quad (13)$$

więc zachodzi wzór (4).

Wykażmy teraz, że superpozycja dwu transformacji centroafinicznych spełniających dodatkowo warunek (11), też go spełnia. Wobec tego z założenia zachodzi oprócz wzoru (11):

$$a_{\alpha}^{\alpha'} \bar{a}_{\alpha'}^{\beta'} = \delta^{\alpha'\beta'}. \quad (14)$$

Dla transformacji złożonej mamy:

$$a_{\alpha}^{\alpha'} \bar{a}_{\alpha'}^{\beta'} = a_{\alpha}^{\alpha'} a_{\alpha'}^{\alpha''} \bar{a}_{\alpha''}^{\beta'} \bar{a}_{\alpha''}^{\beta} = \delta^{\alpha'\beta'} a_{\alpha}^{\alpha''} \bar{a}_{\alpha''}^{\beta} = a_{\alpha}^{\alpha''} \bar{a}_{\alpha''}^{\beta} = \delta^{\alpha\beta}, \quad (15)$$

c. b. d. o.

Porównując wzory (9) oraz (11) stwierdzamy, że zachodzi:

$$\bar{a}_{\alpha}^{\beta} = a_{\beta}^{\alpha}, \quad (16)$$

co w języku macierzy oznacza, że macierz sprzężona oraz transponowana do danej równa się jej odwrotności. Przekształcenie (3) spełniające warunki (11) lub (16) nazywać będziemy centryczno-unitarnym.

Należy teraz dowieść, że przekształcenie odwrotne do wymienionego jest również centryczno-unitarne.

W tym celu wprowadzimy oznaczenie:

$$J^{\bar{\alpha}} = \bar{J}^{\alpha}. \quad (17)$$

Współrzędna sprzężona podlega, na mocy równań (3) i (17), transformacji:

$$J^{\bar{\alpha}'} = \bar{a}_{\alpha}^{\alpha'} J^{\bar{\alpha}}. \quad (18)$$

Dowód, że takie transformacje spełniają wymienione warunki grupowości, jeśli spełniają je transformacje zmiennych niesprzężonych, jako prosty opuszcmy (w stosunku do wprowadzonego układu należy użyć wówczas zmiennych sprzężonych - można to uczynić, bowiem operacja sprzężenia stanowi homeomorfizm). Zarówno współrzędne  $J^{\alpha}$  jak i  $J^{\bar{\alpha}}$  mogą być poza tym traktowane jako współrzędne pewnych obiektów geometrycznych ([6], cz.II, R.I, III). Do pewnego aspektu tego zagadnienia jeszcze powrócimy.

Wypiszmy teraz wzór określający transformację wyrażenia  $J^{\bar{\alpha}} J^{\alpha}$ :

$$J^{\bar{\alpha}} J^{\alpha} = \bar{a}_{\alpha}^{\alpha'} a_{\beta}^{\alpha'} J^{\bar{\alpha}'} J^{\beta} = J^{\bar{\alpha}'} J^{\alpha'}. \quad (19)$$

(wykorzystaliśmy tu wzory (16), (11)).

W dalszym ciągu:

$$J^{\bar{\alpha}'} J^{\alpha'} = \bar{a}_{\alpha}^{\alpha'} a_{\beta}^{\alpha'} J^{\bar{\alpha}} J^{\beta}, \quad (20)$$

czyli na mocy wzoru (19):

$$J^{\bar{\alpha}} J^{\alpha} = \bar{a}_{\alpha}^{\alpha'} a_{\beta}^{\alpha'} J^{\bar{\alpha}} J^{\beta}. \quad (21)$$

Jeśli wzór (21) zachodzi tożsamościowo względem zmiennych  $J^{\alpha}$ ,  $J^{\beta}$ , to:

$$a_{\alpha}^{\alpha'} \bar{a}_{\alpha'}^{\beta} = \delta^{\alpha\beta}, \quad (22)$$

gdzie wykorzystaliśmy znowu wzór (16). Wzór (22) jest potwierdzeniem, że transformacja odwrotna do centryczno-unitarnej ma również tę własność, c.b.d.o.

Uwaga: o charakterze metrycznym równania (19) oraz jego interpretacji elektrycznej będzie mowa później.

Widać, że zbiór transformacji centryczno-unitarnych, przekształcających przestrzeń  $C^3$  na siebie tworzy grupę  $G_{cut}$  (jak można zauważyć na podstawie związku (11) 3-parametrową), (transformacje te, w przeciwieństwie do lokalnych omawianych we wstępie, mają charakter globalny, dotyczą całej przestrzeni punktowej, ponieważ na całej można było wprowadzić układ współrzędnych).

Podobnie jak w przypadku grupy  $G_C$ , zbiór dopuszczalnych układów współrzędnych otrzymanych przy pomocy grupy  $G_{cut}$  tworzy strukturę F. Kleina. Przestrzeń prądową, opartą o grupę  $G_{cut}$  nazwiemy przestrzenią  $G_{cut}$ . Właściwie poprawniej przez pojęcie przestrzeni opartej na grupie należałoby rozumieć uporządkowaną trójkę: przestrzeń punktową, przestrzeń analityczną (tu:  $C^3$ ) oraz strukturę wyznaczoną przez praukład i grupę transformacji. W naszym przypadku chodzi właściwie o dwie struktury, druga wyznaczona jest przez praukład i transformacje dla zmiennych sprzężonych. Zamiast dwóch struktur można jednak wprowadzić jedną, której elementami byłyby uporządkowane pary układów współrzędnych: jeden zwykły, drugi "sprzężony".

Zupełnie podobne rozważania nad dopuszczalnymi układami współrzędnych można przeprowadzić dla przestrzeni napięciowej.

### C. Przestrzeń napięciowa oparta o grupy $G_C$ lub $G_{cut}$

Umówimy się, że współrzędne napięciowe będą oznaczane w tym rozdziale wskaźnikami:  $\lambda, \mu, \nu$ , lub:  $\lambda, \mu', \nu'$ , czy:  $\lambda, \mu'', \nu''$  itd. (każdy z nich może przyjmować 3 wartości, kreski u góry odnoszą się odpowiednio do układów  $(\lambda)$ ,  $(\mu')$ ,  $(\mu'')$ ).

A więc transformacja centroafiniczna ma postać:

$$U^\lambda = b_\lambda^\lambda U^\lambda, \quad b_\lambda^\lambda \in C, \quad (23)$$

gdzie:

$$\det [b_\lambda^\lambda] \neq 0. \quad (24)$$

Pomijamy tu wskaźniki dotyczące numeru gałęzi i przekroju, bowiem dla wszystkich gałęzi i przekrojów transformacje są takie same.

Transformacja centryczno-unitarna poddaje współczynniki  $b_\lambda^\lambda$  ograniczeniu:

$$b_\lambda^\lambda b_\lambda^{\lambda'} = \delta^{\lambda\lambda'}. \quad (25)$$

Tak samo dowodzimy w obu przypadkach warunków grupowości tych transformacji. Podobnie tworzymy struktury F. Kleina układów współrzędnych oraz przestrzenie oparte na grupach  $G_C$  lub  $G_{cut}$ .

#### D. Wspólne struktury prądowo-napięciowe

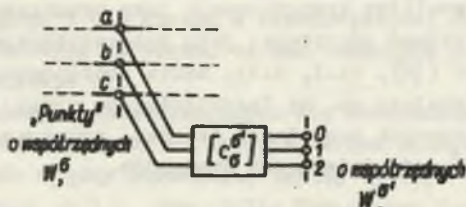
Mamy więc dwie niezależne przestrzenie punktowe prądową i napięciową, które mogą być oparte o grupy  $G_c$ , bądź  $G_{cut}$ . Można, po wprowadzeniu prakładów (zwykłego i sprzężonego) w obu, poddawać je jednocześnie takim samym transformacjom należącym do wspólnej grupy  $G_c$  lub  $G_{cut}$ . Wówczas (po zaniedbaniu wymiarów - jeśli będzie się operować tylko wartościami liczbowymi prądów i napięć) można identyfikować punkty obu przestrzeni posiadające te same współrzędne, otrzymując wspólne struktury zwykłą i sprzężoną. W pewnych dalszych rozważaniach dotyczących mocy wykorzystamy to stanowisko.

Można też postąpić następująco. Tworzymy zbiór transformacji, którego elementami są uporządkowane czwórki: transformacja prądowa, transformacja prądowa sprzężona do wymienionej, transformacja napięciowa, transformacja napięciowa sprzężona do wymienionej. Łatwo wykazać, że jeśli zbiory poszczególnych transformacji tworzą grupy, to przy odpowiedniej definicji superpozycji transformacji oraz transformacji odwrotnej podany zbiór uporządkowanych czwórek, również tworzy grupę. Transformując przy jej pomocy odpowiednie czwórki prakładów współrzędnych otrzymujemy strukturę F.Kleina złożoną z uporządkowanych czwórek: układ współrzędnych prądowy, prądowy sprzężony, napięciowy, napięciowy sprzężony. Jeśli dla grupy transformacji pierwszy element każdej czwórki będzie identyczny z trzecim (a drugi z czwartym) - po zaniedbaniu wymiarów, to jak łatwo zauważyć otrzymujemy jej podgrupę i w oparciu o nią tworzymy strukturę odpowiadającą uprzednio wprowadzonym wspólnym prądowo-napięciowym. Taka struktura może być podstawą do zdefiniowania pewnych obiektów geometrycznych iloczynowych oraz rozdwojonych ([6], cz.II, R.I).

Uwaga: nie będziemy wprowadzali transformacji, dla których drugi element czwórki nie jest sprzężony w stosunku do pierwszego, a czwarty do trzeciego oraz otrzymanej przy ich pomocy struktury.

#### E. Interpretacja fizyczna transformacji i układów współrzędnych

Wprowadzonym transformacjom warto nadać pewną interpretację schematowo-poglądową (rys. 3).



Rys. 3

Aby nie powtarzać rozumowań niech " $W^\sigma$ " oznacza prąd lub napięcie dowolnej gałęzi i przekroju (w dowolnym stanie), którego pomiar zaznaczony

jest na rys. 3 kółeczkiem (przez pomiar należy tu rozumieć podanie prądu lub napięcia na wejście bloku  $[\alpha^2]$  jak też ich ewentualny odczyt; jest to zaznaczone bardzo schematycznie bez dokładnego wyrysowania przewodów rzeczywistego układu). Współrzędne "nowego" układu są oznaczone: " $W^{\sigma'}$ ". Np. może zachodzić:  $(\sigma \in (a, b, c), \sigma' \in (0, 1, 2), \text{rys. 3})$ , tzn. mamy wtedy do czynienia z dwoma układami współrzędnych "starym" fazowym i "nowym" symetrycznym. Blok oznacza układ transformacyjny (w tym przykładzie po prostu filtr składowych symetrycznych). Zespół tego bloku wraz z podaniem wielkości  $W^{\sigma}$  na jego wejście i ewentualnym odczytem " $W^{\sigma'}$ " stanowi model przyrzędu (układu pomiarowego) realizującego "nowy" układ współrzędnych; jest tu podana zarazem idea przyrzędu (układu pomiarowego), o którym mowa w punkcie 9 wstępu. Współczynniki  $c_{\sigma'}^{\sigma}$ , transformacji odwrotnej do transformacji z rozpatrywanego przykładu:

$$W^{\sigma'} = c_{\sigma'}^{\sigma} W^{\sigma} \quad (26)$$

tworzą dobrze znaną z teorii składowych symetrycznych macierz  $S$ :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

gdzie:

$$\alpha = e^{j \frac{2\pi}{3}} \quad (28)$$

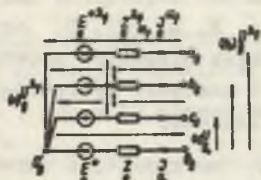
Stosując wzory (11) bądź (16), łatwo sprawdzić, że współczynniki macierzy  $\frac{1}{\sqrt{3}} S$  czynią zadość warunkom przekształcenia centryczno-unitarnego. Tym samym wyjaśniona została przynależność transformacji stosowanej w teorii składowych symetrycznych. We wzorze (27) użyliśmy macierzy; można również wprowadzone transformacje zapisywać macierzowo (patrz np. pozycja [1]), lecz okazuje się to dużo mniej wygodne i przejrzyste od metody oznaczeń stosowanej w rachunku tensorowym.

Dotychczas używaliśmy transformacji jako przekształceń ciągów liczb; można je interpretować odwrotnie: jako przekształcające punkty przyporządkowane tym ciągom ([4], cz.I, R.I). Takie postępowanie ma interpretację elektryczną, polegającą np. na "przejściu" od sieci fazowej, (która jest punktem wyjścia naszych rozważań), do sieci symetrycznej, posiadającej prąd i napięcia  $W^{\sigma'}$  odnośnie swych przewodów.

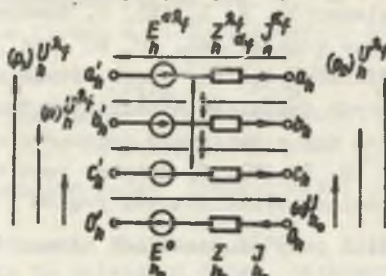
#### 4. Charakterystyka elementów sieci

##### A. Elementy proste oraz ich równania we współrzędnych fazowych

Elementy wchodzące w skład gałęzi zilustrowanych, rys. 1, 2 przedstawione są na rys. 4, 5.



Rys. 4



Rys. 5

Układ o schemacie z rys. 4 nazywamy elementem końcowym; z rys. 5 - przelotowym. Wspólna nazwa: element prosty. Równania opisujące je w fazowych układach współrzędnych (są to nasze praukłady w przestrzeniach prądowej oraz napięciowej; kwestią uzyskania równań współzmienniczych zajmijmy się później) są następujące:

$$(w)_h^{U \lambda_T} = \frac{Z^{\lambda_T}}{|h|} J^{\alpha_T} - E^{\alpha_T}, \quad (29)$$

$$(w)_{h_0}^U = \frac{Z}{|h_0|} J_{h_0} - E_{h_0}, \quad \alpha_T, \lambda_T^s (a, b, c). \quad (30)$$

$$(w)_h^{U \lambda_T} + (w)_{h_0}^U \stackrel{!}{=} (P_1)_h^{U \lambda_T} - (P_2)_h^{U \lambda_T}, \quad (31)$$

$$J_{h_0} = J_h^a + J_h^b + J_h^c, \quad (31a)$$

Gwiazdki przy oznaczeniach SEM są równoznaczne ze zgodnością orientacji jaką nadają gałęzi prąd i SEM (jeśli w rzeczywistości SEM zwyczajna będzie przeciwnie skierowana do prądu, to SEM oznaczona gwiazdką będzie się od niej różniła znakiem).

Ujęcie choćby jednego z powtarzających się wskaźników pionowymi kreskami lub nawiasami oznacza, jak we wstępie, zakres sumowania podług nich.

Uwaga: ze względów wygody sumowania, lepiej byłoby wprowadzić dla impedancji dwa wskaźniki  $g$  i  $h$  oraz deltę Kroneckera (patrz wzór (18), I). Nie zostało to uczynione dla podkreślenia braku sprzężeń między różnymi elementami prostymi.

Dla elementu końcowego będziemy mieli dodatkowo:  $((p_1)_{\mathcal{G}}^{U \cdot I} = 0)$ .

Parametry  $Z_{h \alpha_f}^{\lambda}$ ,  $Z_{h_0}$  oznaczają na ogół impedancje spowodowane obecnością elementów R, L, (M), C, dowolnie połączonych, tworzących dwójniki występujące w gałęziach aO', bO' itd., "widziane" z zacisków wyjściowych tych dwójników. Ogólnie rzecz biorąc nie chodzi nam o to, by w skład wspomnianych dwójników wchodziły wyłącznie elementy R, L, (M), C, czyli nie chodzi nam o możliwość dokonania syntezy dowolnych elementów prostych w klasie R, L, (M), C. Istotne jest to, by związki pomiędzy występującymi wartościami symbolicznymi prądów i napięć były liniowe.

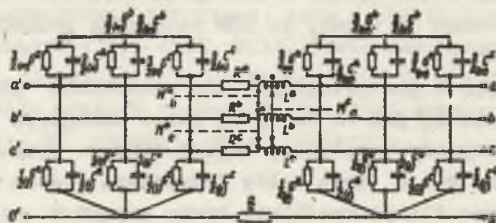
Strzałki przy oznaczeniach elementów  $Z_{h \alpha_f}^{\lambda}$ ,  $Z_{h_0}$  na rys. 4, 5 symbolizują ogólnie rozumiane sprzężenia, tzn., że prąd jednego przewodu wpływa na napięcie drugiego.

Użycie określenia dwójnik, nie jest tu zbyt właściwe, bowiem dwójnikiem należałoby raczej nazwać zbiór dwukońcówkowych elementów równoważnych, tzn. przy dowolnych jednakowych pobudzeniach dla dwu badanych elementów mają każdorazowo wystąpić jednakowe odpowiedzi. Relacja taka (zachodząca wówczas między wymienionymi elementami), jak łatwo zauważyć, posiada własności zwrotności, symetrii i przechodniości; czyli jest faktycznie równoważnością w sensie logicznym. Jej klasy abstrakcji w zbiorze elementów dwukońcówkowych tworzyłyby dwójniki. To co występuje w gałęziach można by nazwać elementem dwójnika (dla wygody opuszczamy zwykle słowo element).

Użycie elementów prostych (4 przewodowych i wzajemnie niesprzężonych) w budowie sieci jest ograniczeniem ich możliwych postaci, jednakże jest to usprawiedliwione tym, że jak wiadomo z teorii maszyn elektrycznych sporo ważnych maszyn (generatorów, silników) posiada właśnie schematy dające się zbudować ze skończonej ilości elementów prostych. Do takich urządzeń należy również 4 przewodowa linia krótka.

## B. Linia krótka

Jej schemat przedstawiony jest na rys. 6 ([15], cz.II, R.XIV).

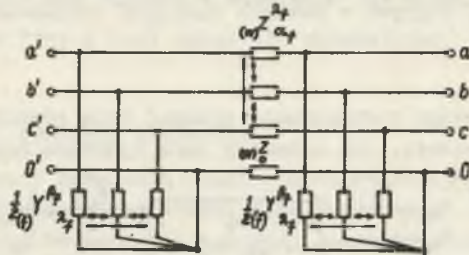


Rys. 6

(Naturalnie zakładamy, że spełnione są założenia niezbędne do tego, aby można operować pojęciem linii krótkiej). Jest to schemat linii niekoniecznie symetrycznej. Można podać inny - typu "T". Dla uproszczenia nie są podane oznaczenia napięć i prądów (podobne jak na rys. 5).

Jest rzeczą istotną, że schemat ten (jeden z wielu możliwych) podający związek pomiędzy prądami  $J_h^{\alpha_f}$  i napięciami  $(p_1)_h^{U_{\alpha_f}}$ ,  $(p_2)_h^{U_{\alpha_f}}$  (przy założeniu, że prąd przewodu  $OO'$  równy jest sumie prądów przewodów  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ ), nie daje odpowiedzi na pytanie: jakie są napięcia wzdłużne  $(w)_h^{U_{\alpha_f}}$  i  $(w)_h^{U_0}$ ? Jest to spowodowane tym, że uwzględniając indukcyjności pętli utworzonych przez przewody faz  $a, b, c$  oraz zerowy, a więc i pole elektromagnetyczne otaczające je, napięcia te zależą od drogi całkowania natężenia pola elektrycznego (czyli od usytuowania przewodów woltomierza, służącego do ich pomiaru).

Schemat linii można łatwo doprowadzić do następującej postaci (rys. 7):



Rys. 7

Sens oznaczeń admittancji  $(f) Y_{\lambda_f}^{\rho_f}$  (sprzężonych) stanie się jasny, jeśli pomnożymy obie strony równania (29) przez  $(f) Y_{\lambda_f}^{\rho_f}$  zakładając związek:

$$Y_{\lambda_f}^{\rho_f} Z_{\alpha_f}^{\lambda_f} = \delta_{\alpha_f}^{\rho_f} \quad (32)$$

oznaczający powiązanie impedancji  $Z_{\alpha_f}^{\lambda_f}$  i admittancji  $Y_{\lambda_f}^{\rho_f}$  relacją odwrotności (zakładamy, że macierz impedancji jest nieosobliwa).

Wówczas mamy:

$$J_h^{\rho_f} = Y_{\lambda_f}^{\rho_f} (w)_h^{U_{\alpha_f}} + I_h^{\rho_f} \quad (33)$$



gdzie:

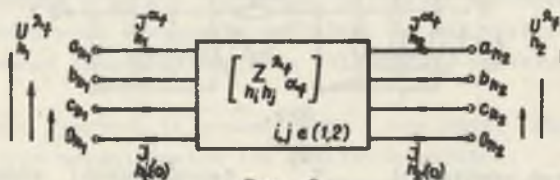
$$I_h^{\lambda_f} = \frac{Y_f^{\beta_f}}{|h|} \lambda_f E^{\lambda_f} \quad (34)$$

Znaczek  $f$  przy wskaźnikach zmiennych prądu lub napięcia oznacza ich przynależność do zbioru (a,b,c). Wzór (33) można interpretować jako dotyczący równoległego połączenia admitancji i SPM, której orientacja względem węzła jest zgodna z orientacją prądową gałęzi z tą admitancją. Tak więc schemat 4 przewodowej linii krótkiej składa się z części odnoszących się do 3 elementów prostych.

W zasadzie nie zajmujemy się tu wyprowadzeniem i komentowaniem schematów urządzeń wchodzących w skład sieci, gdyż jest to temat specjalny, należący często do teorii maszyn elektrycznych. Istotne jest jedynie to, by schematy te składały się z części dotyczących elementów prostych. Odnosnie linii uczyniliśmy częściowo wyjątek ze względu na jej specyficzny charakter i rolę jaką odgrywa w pewnych dalszych rozumowaniach.

### C. Transformator

Pewnego wyjątkowego postępowania wymagać będą również transformatory (mogą być asymetryczne). Ich schematy będą ujmowane następująco (rys. 8):



Rys. 8

Równania opisujące je:

$$U_{h_1}^{\lambda_f} = Z_{h_1}^{\lambda_f} J_{h_1}^{\alpha_f} + Z_{h_1}^{\lambda_f} J_{h_2}^{\alpha_f} \quad (35)$$

$$U_{h_2}^{\lambda_f} = Z_{h_2}^{\lambda_f} J_{h_1}^{\alpha_f} + Z_{h_2}^{\lambda_f} J_{h_2}^{\alpha_f} \quad (36)$$

$$J_{h_1(o)} = J_{h_1}^a + J_{h_1}^b + J_{h_1}^c \quad (37)$$

$$J_{h_2(o)} = J_{h_2}^a + J_{h_2}^b + J_{h_2}^c \quad (38)$$

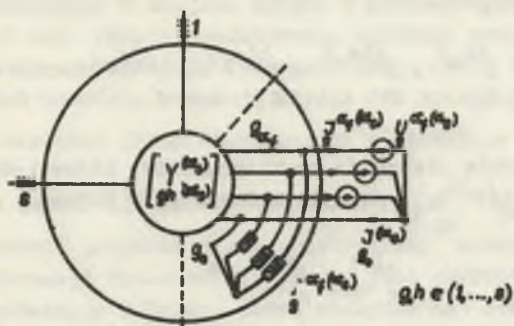
Równania (37), (38) spełnione są na skutek izolowania od siebie zer transformatora, bądź odrębnego zasilania stron pierwotnej i wtórnej lub z innego powodu, który będzie objaśniony podczas omawiania budowy sieci (wówczas również wyjaśnimy kiedy i na skutek czego spełniona jest analogiczna relacja dla linii). Podobną dyskusję przeprowadzamy dla elementów prostych. Zakładamy, że 4 macierze impedancji  $h_{ij}^{(1,2)}$  ( $i, j \in (1, 2)$ ) ze wzorów (35), (36) są nieosobliwe jak i macierz całego przekształcenia wyznaczonego przez te wzory.

Jak widać, do sformułowania schematu transformatora użyliśmy tu elementu "szerszego" niż element prosty, po to by uniknąć konieczności wprowadzania sprzężeń między nimi i rozpatrywania rozmaitych połączeń transformatora.

Można też postąpić ogólnie i do elementów prostych dołączyć tzw. elementy sprzęgające o schemacie pokazanym na rys. 8 (niekoniecznie transformatory), byle były one liniowe w omawianym już sensie. Możemy wówczas prawe strony równań (35) i (36) uzupełnić składnikami  $E_{h_1}^T$  i  $E_{h_2}^T$ .

#### D. Wielobiegunniki. Symetria elementów

Wymienione elementy spełniają często oprócz warunków symetrii topologicznej (odpowiednia ilość przewodów, końcówek) pewne warunki symetrii elektrycznej. Warunki te są wspólne pewnej szerszej klasie układów, mianowicie układom posiadającym  $4s$  ( $s \in \mathbb{N} - (0)$ , "N" - oznacza zbiór liczb naturalnych) zacisków, czyli elementom tzw.  $4s$ -biegunników (wielowników?). (Można tu w sposób oczywisty uogólnić podaną uprzednio definicję dwójnika) Schemat takiego układu (elementu wielobiegunnika) podany jest na rys. 9.



Rys. 9

Wytłumaczymy teraz na czym polega wspomniana symetria elektryczna tego układu. W tym celu wprowadzimy pewne "grupy" symetrii dla napięć, prądów i SPM zaznaczonych na rys. 9. Aby nie powtarzać rozumowań użyjemy dla tych

wielkości wspólnych oznaczeń  $W_{\Gamma}^{\alpha_{\beta}}$ , gdzie:  $(\alpha_{\beta} \in (0,1,2))$ . Będą to znane z teorii składowych symetrycznych ([3], R.V) 3 zespoły wielkości "zerowych", "zgodnych" i "przeciwnych":

$$\begin{bmatrix} W^a(0) \\ W^b(0) \\ W^c(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(0) \\ W(0) \\ W(0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} W^a(1) \\ W^b(1) \\ W^c(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(1) \\ \alpha^2 W(1) \\ \alpha W(1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} W^a(2) \\ W^b(2) \\ W^c(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(2) \\ \alpha W(2) \\ \alpha^2 W(2) \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$W_{\Gamma}^{\alpha_{\beta}} = \sum_{\beta} W^{\alpha_{\beta}}(\alpha_{\beta}). \quad (39a)$$

Dla uproszczenia pisowni pominięliśmy tu znak dotyczący numeru gałęzi (na rys. 9 są one, poza gałęzią  $g$ , oznaczone skrótkowo za pomocą 4-krotnego przekreślenia). Otóż dla omawianego układu ma zachodzić związek:

$$J_{\varepsilon}^{\alpha_{\beta}}(\alpha_{\beta}) \equiv Y_{gh}(\alpha_{\beta}) U_h^{\alpha_{\beta}}(\alpha_{\beta}) + I_g^{\alpha_{\beta}}(\alpha_{\beta}). \quad (40)$$

Użycie oznaczenia  $Y_{gh}(\alpha_{\beta})$  ma na celu podkreślenie, że wzajemne admittancje zależą wyłącznie od numeru "grupy" symetrii  $\alpha_{\beta}$ . Wskaźnik  $\alpha_{\beta}$  przy oznaczeniu napięć symbolizuje zgodność numeru fazy dla odpowiednich napięć i prądów. Wzór (40) można skomentować w następujący sposób: na dowolne pobudzenie (napięciowe) symetryczne odpowiedź (prądowa) jest również symetryczna (o tym samym rodzaju symetrii); oczywiście SPM muszą być wówczas również symetryczne. Jest to pierwszy warunek symetrii elektrycznej. Drugi polega na spełnieniu relacji:

$$J_{\varepsilon_0}(\alpha_{\beta}) = J_{\varepsilon}^a(\alpha_{\beta}) + J_{\varepsilon}^b(\alpha_{\beta}) + J_{\varepsilon}^c(\alpha_{\beta}) \quad (41)$$

w przypadkach zasilania elementów 4s-biegowników, które będą omówione poniżej. Naturalnie dla:  $(\alpha_{\beta} \in (1,2))$  relacja (41) daje:

$$J_{\varepsilon_0}(1) = J_{\varepsilon_0}(2) = 0. \quad (42)$$

Spełnienie wzoru (41) można zapewnić nie przykładając źródeł pomiędzy dowolne przewody dwu różnych gałęzi  $g, h$  (tzn. SPM są zerowe - przerwa). Wzór ten można również spełnić, żądając, by dowolne napięcia przykładane pomiędzy przewody różnych gałęzi  $g, h$  nie miały wpływu na wszystkie prą-

dy gałęziowe; np. będzie to zachodzić, gdy zastosujemy dla  $s$  gałęzi wejściowych omawianego układu idealne transformatory 3-fazowe o przekładni 1:1 separujące galwanicznie strony pierwotną i wtórną.

Omawialiśmy tu kwestię spełnienia wzoru (41) w warunkach wyodrębnienia naszego układu. W jaki sposób będzie on spełniony gdy układ pracuje w sieci - powiemy później.

Pojęcie wielobiegownika zostało tu wprowadzone po to, by ująć syntetycznie kwestię symetrii elementów prostych względnie sprzęgających (sprawa różnic w ostrzaźkowaniu prądów nie odgrywa tu roli). Konstrukcję sieci złożonej z elementów wielobiegowników traktowanych jako jej części podstawowe omówimy w dalszej kolejności. Jeśli chodzi o ich równania, to w przypadku znanej budowy wewnętrznej pewnego elementu równania jego wynikają z niej. Gdy budowa ta nie jest znana - są one aksjomatami.

Nietrudno spostrzec, że równania (40) równoważne są następującym:

$$J_g^{(\alpha_B)} = Y_{gh}^{(\alpha_B)} \cdot U_h^{(\alpha_B)} + I_g^{(\alpha_B)}. \quad (43)$$

Zakładamy ogólnie, że macierze admitancji  $Y_{gh}^{(\alpha_B)}$  dla każdego " $\alpha_B$ " są nieosobliwe (co dla elementów przelotowych odnośnie napięć poprzecznych, nie jest spełnione). Dla elementów prostych można też łatwo uzupełnić definicję symetrii ([1], [2]), (w razie potrzeby można założyć, że i same admitancje  $Y_{gh}^{(\alpha_B)}$  są różne od zera). Równania (43) stanowią podstawę do konstrukcji 3 elementów wielobiegowników niezależnych od siebie (nie-sprzężonych) o parametrach  $Y_{gh}^{(\alpha_B)}$ ,  $I_g^{(\alpha_B)}$  dla kolejnych wartości  $\alpha_B$  (układy te będą posiadały w miejscu gałęzi 4 przewodowych gałęzi 2 przewodowe [1]). Są to tzw. układy zredukowane. Operację przyporządkowania 4s-biegownikom wykazującym symetrię (równania (40), (41)) trzech 2s-biegowników zredukowanych nazwiemy redukcją ilości faz przez podobieństwo. Możemy również skonstruować jeden 4s-biegownik posiadający prądy  $J_g^{(\alpha_B)}$  i na pięcia  $U_h^{(\alpha_B)}$  na swych wejściach oraz parametry  $Y_{gh}^{(\alpha_B)}$ ,  $I_g^{(\alpha_B)}$ . Jego elementy będą stanowić przykład sieci symetrycznej wspomnianej przy komentowaniu transformacji fazowo-symetrycznej jako punktowo-punktowej. Równania (43), jak zobaczymy później, można otrzymać na drodze wspomnianej transformacji układu współrzędnych (liczbowo-liczbowej) dla wielobiegownika wykazującego omówioną symetrię.

## 5. Budowa sieci oraz jej równania we współrzędnych fazowych

### A. Ogólne założenia i ich komentarz

Czynimy następujące założenia dotyczące sieci.

1. Sieć składa się ze skończonej ilości elementów prostych wzajemnie niesprzężonych lub z elementów sprzęgających (liniowych: równania (29) - (31a) oraz (35) - (38)). Są one połączone z zachowaniem zgodności końcówek  $a, b, c, 0$  dla każdej gałęzi. Zakładamy, że każda gałąź 4-przewodowa składa się najwyżej z jednego elementu sprzęgającego oraz dwóch elementów prostych po obu jego stronach (połączonych szeregowo w sensie 4-przewodowym). Jest to założenie uczynione wyłącznie dla wygody dalszych rozważań, bowiem połączenia szeregowo wymienionych elementów nie wyprowadzają co do schematu zastępczego poza nie. Podobnie w elementach końcowych można by dopuścić występowanie elementów międzyprzewodowych, co też da się ująć schematem zastępczym zwykłego elementu końcowego (można by też, dalej uogólniając, rozpatrywać zamiast elementu końcowego - element odpowiedniego 4-biegownika liniowego).

2. Gałęzie sieci (4-przewodowe) tworzą drzewo (jest to taki zbiór gałęzi, że jeśli usuniemy z niego choćby jedną, to nie potrafimy wówczas połączyć dwóch dowolnych węzłów pozostałymi gałęziami), oprócz tego może występować w sieci pewna ilość gałęzi końcowych. Równania (37), (38) nie muszą wówczas wynikać z wewnętrznej konstrukcji elementów sprzęgających. Albo występują w sieci oczka (4-przewodowe), lecz wówczas elementy sprzęgające, dla których równania (37), (38) wynikają z ich wewnętrznej budowy są tak rozmieszczone, że jeśli usunąć z sieci gałęzie, w których one występują, to pozostałe tworzą drzewo, drzewa izolowane (z ewentualnym dodatkiem gałęzi końcowych) lub zbiór pusty.

3. Jeśli przeprowadzimy operację usuwania gałęzi opisaną w punkcie 2 i pozostaną w dalszym ciągu oczka (4-przewodowe), to zakładamy, że w gałęziach tych oczek nie ma już więcej elementów sprzęgających. W dalszym ciągu zakładamy wówczas, że wszystkie elementy sieci (w jej stanie pierwotnym) wzięte z osobna są symetryczne (równania (40), (41)). Zbiór gałęzi tworzących oczka (po wspomnianej operacji usuwania) podzielimy na minimalne podzbiory tworzące oczka (nie zmniejszając ich ogólnej ilości). W ten sposób każdy taki podzbiór łączy się wówczas z innym przy pomocy pewnego podzbioru gałęzi tworzących drzewo wraz z ewentualnymi gałęziami końcowymi (lub łączy się węzłem), albo jest izolowany. Dla wszystkich gałęzi (1)g, tworzących oczka l-tego podzbioru, zachodzi dla składowej zerowej warunek:

$$\frac{z^{(0)}(0)}{(1)g_0} = \frac{3 E^{(0)}}{E_0} = (1)^P, (1)^P \neq C, (1)^P \neq 0. \quad (44)$$

(W warunku (44) można dopuszczać pewne stosunki impedancji oraz SEM typu  $\frac{0}{0}$ , byle równania całości sieci pozostały nieosobliwe).

Jeśli sieć rozpada się na części izolowane galwanicznie oraz niepowiązane elementami sprzęgającymi, wówczas nasze trzy założenia obowiązują dla każdej z nich.

Sens założenia pierwszego nie wymaga już specjalnych komentarzy.

Założenie drugie skonstruowane jest w ten sposób, aby z budowy sieci każdorazowo wynikała relacja:

$$J_{\varepsilon_0} = J_{\varepsilon}^a + J_{\varepsilon}^b + J_{\varepsilon}^c, \quad (45)$$

spełniona dla wszystkich gałęzi (strzałkowanie prądów jak na rys. 4, 5, 8, 9). Jest to zapewnione bądź obecnością elementów sprzęgających, dla których relacje (37), (38) wynikają z ich budowy wewnętrznej (np. wspomniane izolowanie galwaniczne obwodów pierwotnego i wtórnego transformatora); bądź tym, że sieć tworzy drzewo. Wówczas można dla każdej gałęzi (4-przewodowej) skonstruować taką zamkniętą powierzchnię, która przecina wyłącznie ją i to tylko jeden raz. Dla takiej powierzchni równanie (45) wynika następnie z prawa zachowania ładunku elektrycznego dla objętości, którą ogranicza.

Spełnienie równania (45) pozwala na zbudowanie elementu prostego o przewodzie zerowym bez impedancji i źródeł, który posiada w przewodach a, b, c impedancje  $Z_h^a + Z_h^b + Z_h^c$  oraz SEM  $E_h^a + E_h^b + E_h^c$ . Element ten równoważny jest prostemu opisanemu rys. 4 lub 5 jeśli chodzi o prądy gałęzi a, b, c, 0 oraz napięcia poprzeczne  $(P_1)_h^U, (P_2)_h^U$ . Wprowadzenie takich elementów będzie konieczne dla kowariantnego formułowania II prawa Kirchhoffa.

Podobną rolę jeśli chodzi o spełnienie równania (45) odgrywa założenie 3, w przypadku, gdy po opisanej operacji usuwania gałęzi, dla których relacja (45) spełniona jest z innego omówionego już powodu, pozostają oczka. Wówczas nie można zbudować, jak poprzednio, powierzchni zapewniającej spełnienie tego równania.

Ale jeśli sieć łożni zadość założeniom p. 3 wówczas, jak można wykazać ([2]), relacja (45) zachodzi dla wszystkich gałęzi sieci oraz sieć ta zachowuje symetrię pracy elementów, (które poprzednio opisywane były jako odosobnione), co wyraża się dodatkowo utrzymaniem relacji (40).

Czyli wówczas możemy też wprowadzić gałęzie o przewodzie zerowym "idealnym" w wyjaśnionym poprzednio sensie. Należy tu zaznaczyć, że wówczas przewody zerowe tworzą oczka zbudowane z gałęzi "idealnych" i nie można znaleźć w nich jednoznacznego rozkładu prądów. Tym samym przewody zerowe zostały sprowadzone do roli punktu odniesienia przy wprowadzeniu napięć poprzecznych. Obliczać trzeba wielkości prądów i napięć jedynie dla prze-

wodów  $a, b, c$ . Można wykazać, że obliczone w ten sposób prądy i napięcia poprzeczne równe są odpowiednim wielkościom w sieci o oryginalnych przewodach zerowych (przy założeniu niesobliwości równań obu sieci, z wyłączeniem tych, które dotyczą "idealnych" przewodów zerowych).

Przypomnijmy, że jeśli w skład gałęzi, których impedancje figurują we wzorze (44) wchodzi elementy przelotowe symetrycznych linii krótkich, to z jednej strony pamiętamy, że ich schematy z rys. 6 są tylko jednymi z możliwych jeśli chodzi o kwestię rozmieszczenia elementów  $L, (M)$ ; z drugiej zaś w tym wzorze mają występować jednoznacznie określone impedancje  $Z^{(0)}$  i  $Z$  przy pracy linii dla składowej zerowej. Analizując dowód wspomnianego twierdzenia o prądzie przewodu zerowego ([2]) oraz pracę symetrycznej linii krótkiej dla składowej zerowej można stwierdzić, że impedancja  $Z^{(0)}$  powinna być wówczas równa:  $[R + j\omega(2M - \frac{L}{2})]$ , a impedancja  $Z$ :  $[R + j\omega\frac{L}{2}]$  ("L" oznacza współczynnik indukcyjności własnej pętli złożonej z przewodów fazowego oraz zerowego, "M" - współczynnik indukcyjności wzajemnej dwu takich różnych pętli). Trzeba wówczas uczynić dodatkowo założenia, że długość linii krótkiej oraz jej odległość od innych linii i elementów elektrycznych powinny być znacznie większe od odległości między jej przewodami (a ta z kolei ma być znacznie większa od średnicy przewodów). Nie podajemy tutaj dowodów tych twierdzeń ze względu na ograniczoną objętość niniejszej pracy.

Porównując założenia p. 2 i p. 3 stwierdzamy, że w p. 2 dopuszczone były elementy asymetryczne, w p. 3 - tylko symetryczne. Jest to niewątpliwie znaczne zawężenie możliwej budowy sieci. Lecz trzeba zwrócić uwagę że warunki p. 3 są wystarczające do spełnienia wzoru (45), ale nie konieczne. Warunki konieczne byłyby prawdopodobnie bardzo nieprzejrzystej budowy. W związku z tym wzór (45) może być spełniony w wielu innych przypadkach i możliwe będzie wówczas wprowadzenie "idealnego" przewodu zerowego.

## B. Prawa Kirchhoffa we współrzędnych fazowych i obliczanie sieci przy ich użyciu

Jesteśmy już w posiadaniu równań elementów sieci w fazowym układzie współrzędnych. Będziemy teraz chcieli podać w tym układzie równania wyrażające oba prawa Kirchhoffa. W tym celu należy omówić dla jakich węzłów i oczek ułożymy je. Zrobimy to najpierw dla sieci bez elementów sprzęgających i nie rozpadającej się na podsieci izolowane galwanicznie.

Aby uzyskać niezależne równania wyrażające I prawo Kirchhoffa (dla sieci z "idealnymi" przewodami zerowymi) uwzględniamy wszystkie węzły sieci 3-przewodowej (w przypadku, gdy istnieje choćby jedna gałąź końcowa). Gałęzie końcowe w takim modelu sieci (jak łatwo spostrzec) możemy uważać za kontaktujące z jednym dodatkowym wspólnym węzłem (3-krotnym), dla którego już nie trzeba wypisywać omawianego równania (węzeł trzeba tu traktować jako końcówkę nawet jednej gałęzi - ([3], R.II)). Jeśli nie ma gałęzi koń-

cowych pomijamy jeden (dowolny) z węzłów. W ten sposób nasza sieć topologicznie podobna jest do zwykłej - tylko 3-krotnie powielona (z pominięciem "idealnych" przewodów zerowych). Dowód niezależności otrzymanych równań można przeprowadzić podobnie jak w podręczniku [15], cz.I, R.I.

II prawo Kirchhoffa będziemy formułowali dla oczek utworzonych w następujący sposób. Wprowadzamy jak poprzednio dodatkowy węzeł dla gałęzi końcowych i operując gałęziami 3-przewodowymi (napięciowo uprawnia nas do tego "idealny" przewód zerowy) tworzymy drzewo. Następnie budujemy oczka uzupełniając każdorazowo gałęzie drzewa jedną, która do niego nie należy. Jak nietrudno zauważyć, zapewnia to niezależność otrzymanych równań. Ponieważ węzłów "niezależnych" jest tyle ile gałęzi drzewa, więc w sumie otrzymujemy tyle niezależnych równań wyrażających oba prawa Kirchhoffa ile jest gałęzi. Należałoby jeszcze wykazać, że nie można ułożyć więcej równań niezależnych dla innych oczek. Dowód ten pominiemy (jest on związany z topologią sieci, a nam chodzi o stronę tensorową zagadnienia). Nie ilustrujemy też rysunkami (z braku miejsca) rozważań topologicznych dotyczących sieci.

Jeśli sieć dzieli się na części izolowane galwanicznie - powielamy przeprowadzane rozumowania, dotyczące praw Kirchhoffa, dla każdej z nich.

Gdy występują w niej elementy sprzęgające - stosujemy do ich wejść, zgodnie z zasadą wyodrębnienia (przyjmujemy, że są spełnione założenia jej stosowalności), po 3 SEM równe aktualnie występującym tam napięciom (pomiędzy przewodem zerowym i przewodami a, b, c) oraz rozważamy sieć jak poprzednio, traktując otrzymane gałęzie jako końcowe i wprowadzając dla nich wspólny węzeł (węzły). Mamy dodatkowo w tych gałęziach niewiadome napięcia  $U_{h_1}^{\lambda_f}$ ,  $U_{h_2}^{\lambda_f}$  (rys. 4, 5, 8) (równe napięciom kompensującym i traktowane jako wzdłużne), lecz przybywają po dwa równania (35), (36).

Łącznie z równaniami (29) dla elementów prostych (z "idealnym" przewodem zerowym) otrzymujemy komplet równań sieci:

$${}^{(w)}U_{g(1)}^{\lambda_f} = Z_{g(1)}^{\lambda_f} J_{g(1)}^{\alpha_f} - E_{g(1)}^{\lambda_f}, \quad (46)$$

$${}^{(t)}U_{g(1)}^{\lambda_f} = Z_{g(1)}^{\lambda_f} \frac{\alpha_f}{|g(1)|} + Z_{g(1)}^{\lambda_f} \frac{\alpha_f}{|g(2)|} + {}^{(t)}E_{g(1)}^{\lambda_f}, \quad (47)$$

$${}^{(t)}U_{g(2)}^{\lambda_f} = Z_{g(2)}^{\lambda_f} \frac{\alpha_f}{|g(1)|} + Z_{g(2)}^{\lambda_f} \frac{\alpha_f}{|g(2)|} + {}^{(t)}E_{g(2)}^{\lambda_f}, \quad (48)$$

$${}^{(t)}U_{g(n)}^{\lambda_f} = 0, \quad (48a)$$



$$a \quad j^{\alpha_f} = 0, \quad (49)$$

$$g_{(1)}^u g_{(1)}$$

$$b \quad (w)_{g_{(1)}}^{u \lambda_f} + (t)_{g_{(1)}}^{u \lambda_f} = 0, \quad (50)$$

$$i \in (n, 1, 2).$$

Oznaczenia  $g_{(1)}$  ( $g_{(n)}$ ,  $g_{(1)}$ ,  $g_{(2)}$ ) gałęzi wprowadzone są w następujący sposób: jeśli w gałęzi nie ma SEM kompensujących pochodzących od elementu sprzęgającego - oznaczamy ją " $g_{(n)}$ "; jeśli są SEM kompensujące strony pierwotnej lub wtórnej tego elementu - odpowiednio " $g_{(1)}$ " lub " $g_{(2)}$ ". Sumowanie we wzorach (49), (50) występuje podług wszystkich wskaźników  $g_{(n)}$ ,  $g_{(1)}$ ,  $g_{(2)}$ . Oczywiście w gałęziach o wskaźnikach  $g_{(n)}$  napięcia kompensujące równe są zeru, co wyraża wzór (48a).

Znaczek  $t$  we wzorach (47), (48), (48a), (50) jest związany z elementem sprzęgającym (np. z transformatorem).

"  $a$  " oznacza znany symbol orientacji prądowej gałęzi  $g_{(1)}$  względem węzła  $u$ ; "  $b$  " - symbol orientacji prądowej gałęzi  $g_{(1)}$  względem oczka  $k$  (gałęzie  $g_{(1)}\alpha_f$  są jednakowo zorientowane odpowiednio względem węzłów  $u_{\alpha_f}$  i oczek  $k_{\alpha_f}$ ; rozumiane jest to w ten sposób, że za pomocą homeomorfizmu można "posklejać" odpowiednie gałęzie  $g_{(1)}\alpha_f$  i węzły  $u_{\alpha_f}$  zachowując wspólną orientację gałęzi względem węzłów i oczek). Należy zauważyć, że napięcia  $(w)_{g_{(1)}}^{u \lambda_f}$ ,  $(t)_{g_{(1)}}^{u \lambda_f}$  orientują gałąź przeciwnie do jej prądu (rys. 4, 5, 8), wobec tego nie wprowadzamy symboli orientacji napięciowej gałęzi.

Uwaga: istnieje możliwość uogólnienia równań (46) tak, by obejmowały one przypadek sprzężeń między gałęziami. Opis tych sprzężeń i związana z tym zmiana warunku (44) zbytnio jednak komplikowałyby i tak już złożone rozważania dotyczące sieci.

Równania (46) - (50) są liniowe i zawierają niewiadome:  $j^{\alpha_f}$ ,  $(w)_{g_{(1)}}^{u \lambda_f}$ ,  $(t)_{g_{(1)}}^{u \lambda_f}$ . Łatwo zauważyć, że ilość tych niewiadomych równa jest ilości równań. Oprócz wszystkich założeń uczynionych dotychczas, a dotyczących niezależności pewnych ich fragmentów, zakładamy teraz, że całość posiada wyznacznik charakterystyczny różny od zera.

Do tej pory milcząco przyjmowaliśmy, że impedancje, o których mowa we wzorach (46), (47), (48) są skończone. Jeśli tak nie jest operujemy admittancjami, wyrażając w podobnych wzorach prądy za pomocą napięć. Lecz mogą

zajść przypadki, w których np. dla danego elementu prostego pewne impedancje i jednocześnie admitancje są równe zeru a układ posiada rozwiązanie. Ilustracją są najprostsze układy zawierające zwarcie i przerwę. Należałoby wówczas operować np. zamiast wzorem (46) - wzorem uzależniającym od siebie trójki mieszanych wielkości prądowo-napięciowych. W równaniach (49), (50) występować muszą jednak trójki prądów względnie napięć. Ponieważ równania (46) - (50) stanowią podstawę do uzyskania zapisu kowariantnego, sytuacja taka jest z tego względu niedopuszczalna. Wobec tego żądanie współzmienniczości równań sieci będzie ograniczać możliwość rozpatrywania pewnych osobliwości.

Poza tym trzeba zaznaczyć, że podobnych "osobliwości" jest więcej. Do nich może doprowadzić rozpatrywanie sieci z pewnymi (czy też wszystkimi) gałęziami bez przewodu zerowego. W tym przypadku (dla wprowadzonych transformacji układów współrzędnych) również nie można będzie uzyskać współzmienniczości wszystkich równań sieci. Tymi przypadkami marginesowymi z punktu widzenia ogólnej teorii, ale często ważnymi praktycznie, nie będziemy się tu zajmować.

Uwaga: jeśli po rozwiązaniu równań (46) - (50) będziemy chcieli "obliczyć" sieć z rzeczywistymi przewodami zerowymi znajdując napięcia wzdłużne i poprzeczne, to wprowadzamy do gałęzi 4-przewodowych pierwotne impedancje i napięcia te obliczamy znając prądy gałęziowe oraz stosując równania wyrażające II prawo Kirchhoffa lub opisujące elementy sprzęgające z wykorzystaniem choćby jednej gałęzi końcowej, czy też wejścia takiego elementu. Czynimy to dla każdej ze wspomnianych w założeniu nr 3 części sieci. Gdy nie ma żadnej gałęzi końcowej ani elementu sprzęgającego w danej części napięcia poprzeczne wyznaczone być mogą jedynie z dokładnością do dowolnie założonej trójki. (Do obliczenia samych napięć poprzecznych nie jest konieczne przywracanie pierwotnych impedancji gałęziom 4-przewodowym). Należy też pamiętać o uwadze uczynionej o napięciach wzdłużnych linii krótkiej (jeśli linie takie występują).

Konieczna jest tu pewna uwaga o sieci składającej się wyłącznie z elementów symetrycznych. W celu jej "obliczenia" wygodnie stosować następującą procedurę. Rozłożyć napięcia i prądy źródeł na "grupy" symetrii. Zastosować do każdej z nich wspomniane już twierdzenie o redukcji ilości faz przez podobieństwo, pamiętając o wprowadzeniu "idealnego" przewodu zerowego i obliczyć następnie prądy i napięcia symetryczne powracając ewentualnie do wielkości fazowych poprzez zastosowanie wzorów (39), (39a). Później droga ta okaże się w pewnym sensie równoważna z zastosowaniem równań sieci wyrażonych w symetrycznym układzie współrzędnych. (Obszerniejsze uwagi na ten temat można znaleźć w artykułach [1], [2].)

## 6. Współzmienniczość równań sieci

### A. Charakter geometryczny przedstawienia prądów i napięć

Prądy i napięcia opisywaliśmy dotychczas za pomocą współrzędnych odpowiednich przestrzeni punktowych. Zastanówmy się jeszcze nad innym aspektem charakteru geometrycznego tych wielkości. Mianowicie operując strukturą zespoloną (oraz sprzężoną) można wprowadzić 4 rodzaje wektorów ([4], cz.II, R.VIII) o następujących regułach transformacji ich współrzędnych:

$$v^{\sigma'} = A_{\sigma}^{\sigma'} v^{\sigma} \quad (\text{kontrawariantne 1 rodzaju}), \quad (51)$$

$$v^{\bar{\sigma}'} = \bar{A}_{\sigma}^{\bar{\sigma}'} v^{\bar{\sigma}} \quad ( \quad " \quad 2 \quad " \quad ), \quad (52)$$

$$v_{\sigma'} = A_{\sigma'}^{\sigma} v_{\sigma} \quad (\text{kowariantne 1 rodzaju}), \quad (53)$$

$$v_{\bar{\sigma}'} = \bar{A}_{\bar{\sigma}'}^{\bar{\sigma}} v_{\bar{\sigma}} \quad ( \quad " \quad 2 \quad \text{rodzaju}), \quad (54)$$

gdzie:

$$A_{\sigma}^{\sigma'} = \frac{\partial W^{\sigma'}}{\partial W^{\sigma}} (W^{\sigma}), \quad (55)$$

$$\bar{A}_{\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}'} = \frac{\partial W^{\bar{\sigma}'}}{\partial W^{\bar{\sigma}}} (W^{\bar{\sigma}}), \quad (56)$$

$$A_{\sigma'}^{\sigma} = \frac{\partial W^{\sigma}}{\partial W^{\sigma'}} (W^{\sigma'}), \quad (57)$$

$$\bar{A}_{\bar{\sigma}'}^{\bar{\sigma}} = \frac{\partial W^{\bar{\sigma}}}{\partial W^{\bar{\sigma}'}} (W^{\bar{\sigma}'}). \quad (58)$$

(Naturalnie zakładamy, że pochodne te istnieją w pewnych otoczeniach rozpatrywanego punktu  $\left\{ \underset{\circ}{W}^{\sigma} \right\}$  ( $\left\{ \underset{\circ}{W}^{\bar{\sigma}} \right\}$ )). Aby na razie nie mówić osobno o współrzędnych prądowych i napięciowych użyte zostało (jak poprzednio w takim przypadku) oznaczenie  $W^{\sigma}$ . Współrzędne sprzężone oznaczone są w dalszym ciągu poziomą kreską nad wskaźnikiem.

Można wykazać, że współrzędne-wektorów o tych regułach transformacyjnych spełniają równanie fundamentalne i warunek identyczności ([4], cz.I, R.II) lub: ([6], cz.II, R.I), czyli że wektory te są faktycznie pewnymi obiektami geometrycznymi (specjalnymi, czysto różniczkowymi klasy 1). Do-

wód wyniku natychmiast z definicji pochodnej cząstkowej oraz ze wzoru na pochodną cząstkową funkcji złożonej (analitycznej).

Jeśli teraz nasze transformacje należą do grupy centroafinicznej  $G_C$ :

$$W^{\sigma'} = c_{\sigma}^{\sigma'} W^{\sigma}, \quad c_{\sigma}^{\sigma'} \in G, \quad \det [c_{\sigma}^{\sigma'}] \neq 0, \quad (59)$$

$$W^{\delta'} = \bar{c}_{\delta}^{\delta'} W^{\delta}, \quad (60)$$

to zachodzi:

$$A_{\sigma}^{\sigma'} = c_{\sigma}^{\sigma'} \quad (61)$$

i reguły transformacyjne wektorów kontrawariantnych ((51), (52)) są następujące:

$$v^{\sigma'} = c_{\sigma}^{\sigma'} v^{\sigma}, \quad (62)$$

$$v^{\delta'} = \bar{c}_{\delta}^{\delta'} v^{\delta}. \quad (63)$$

Jak widać, zanika wówczas różnica pomiędzy odpowiednimi obiektami geometrycznymi (specjalnymi nieróżniczkowymi) jaki tworzą współrzędne punktu (czy też ich wartości sprzężone), ([6], cz.II, R.III), a wektorami kontrawariantnymi 1 (2) rodzaju.

Ponieważ dla transformacji należących do grupy  $G_C$  odpowiednie pochodne cząstkowe są jednakowe we wszystkich punktach przestrzeni  $C^3$ , więc zamiast mówić o obiektach geometrycznych specjalnych czysto różniczkowych klasy 1 w jakimś punkcie, można stworzyć pojęcie odpowiedniego obiektu swobodnego ([4], cz.I, R.II, IV). Mianowicie trzeba wtedy "przeszczepić" ten obiekt na całą przestrzeń (punktową), zakładając te same jego współrzędne w każdym jej punkcie (w danym układzie współrzędnych). Jak łatwo zauważyć, operacja ta jest dla grupy  $G_C$  współzmiennicza. Następnie konstruujemy klasy abstrakcji relacji równości takich obiektów w rozmaitych punktach przestrzeni wśród wymienionych obiektów o tej samej regule transformacyjnej i klasy te nazywamy obiektami geometrycznymi swobodnymi (specjalnymi czysto różniczkowymi klasy 1).

W dalszym ciągu można utworzyć, czy to dla omawianych obiektów zdefiniowanych w punkcie, czy dla analogicznych swobodnych, obiekt abstrakcyjny ([6], cz.II, R.I).

Powracając zatem do naszej przestrzeni prądowej opartej o grupę  $G_C$ , stwierdzamy, że prąd gałęzi można opisywać za pomocą jej współrzędnej, bądź współrzędnej wektora kontrawariantnego (1 rodzaju) w jakimś punkcie, bądź gra ona rolę współrzędnej reprezentanta odpowiedniej klasy abstrakcji dla wektora kontrawariantnego swobodnego. Podobne uwagi można powtó-

rzyć odnośnie współrzędnych prądowych sprzężonych i wektorów kontrawariantnych 2 rodzaju. Następnie analogicznie rozumiemy dla przestrzeni napięciowej opartej o grupę  $G_c$  i napięcie poprzecznych. Napięcia wzdłużne jako różnice odpowiednich napięć poprzecznych (przy wprowadzeniu "idealnego" przewodu zerowego) opisywane są tak samo jak poprzeczne (tzn. przy pomocy tych samych obiektów geometrycznych). Wobec tego regułami transformacyjnymi wymienionych wielkości są nadal wzory (3), (18), (23) oraz odpowiednik wzoru (23) dla wartości sprzężonych napięć.

## B. Współzmiennicze wyrażenie praw Kirchhoffa

Korzystając z tych reguł dowodzimy natychmiast, że prawa Kirchhoffa wyrażone wzorami (49), (50) obowiązują nie tylko dla współrzędnych fazowych ale są przedstawione kowariantnie względem całych struktur wyznaczonych przez grupę  $G_c$  dla przestrzeni prądowej i napięciowej. Mają więc one postać:

$$a \quad J^\alpha = 0, \quad (64)$$

$$g_{(1)u} g_{(1)}$$

$$b \quad ({}^w U^\lambda + ({}^t) U^\lambda) = 0, \quad (65)$$

$$g_{(1)k} g_{(1)}$$

$$i \in (n, 1, 2).$$

Widać, że jeśli chodzi o I prawo Kirchhoffa, to już rozszerzenie grupy transformacji do afinicznej  $G_a$  (z wyrazami wolnymi różnymi na ogół od zera) spowodowałoby, że ogólnie rzecz biorąc, nie dla każdego węzła prawo to miałoby postać współzmienniczą (wchodziłoby wówczas w grę współrzędne prądowe punktu a nie wektora). Wprawdzie dla napięć wzdłużnych, będących różnicami odpowiednich napięć poprzecznych i posiadających dzięki temu wektorową regułę transformacji, również dla grupy  $G_a$  można uzyskać współzmienniczość równań (65), lecz rezygnujemy z tego dla symetrii rozważań w porównaniu z przestrzenią prądową i dlatego, aby pojęcie zwarcia (poprzecznego) miało sens kowariantny.

Uwaga: współczynniki orientacji gałęzi  $a$ ,  $b$  mają sens współzmienniczych skalarów (można dla danej gałęzi  $g_{(1)u}$ ,  $g_{(1)k}$  operować odpowiednimi polami skalarnymi w przestrzeni prądowej, o takich samych współrzędnych w każdym punkcie oraz utworzyć obiekty swobodne). Ściśle rzecz biorąc, należy wówczas interpretować lewą stronę we wzorze (65) jako współrzędne obiektu geometrycznego iloczynowego ([6], cz.II, R.I) względem struktur przestrzeni prądowej i napięciowej (łatwo spostrzec, że równanie fundamentalne i warunek identyczności są spełnione). Aby tego uniknąć można wprowadzić współczynniki orientacji napięciowej gałęzi względem oczek.

C. Współzmiennicze wyrażenie równań elementów sieci  
oraz pewne uwagi dotyczące całości jej równań

Zajmiemy się teraz kowariantnym sformułowaniem równań (46)-(48), (48a)  
W tym celu wyjaśnić trzeba sens geometryczny opisu impedancji zaznaczo-  
nych w tych wzorach. Otóż zażądamy, by reguła transformacyjna przybierała  
dla nich postać:

$$Z^{\lambda}_{\alpha} = b_{\lambda}^{\alpha} Z^{\lambda} \alpha a_{\alpha}^{\alpha}. \quad (66)$$

Czyli " $Z^{\lambda}_{\alpha}$ " oznacza współrzędne pewnego obiektu geometrycznego iloczynowego specjalnego, czysto różniczkowego klasy 1 ze względu na obie struk-  
tury (można tu też mówić o obiektach zdefiniowanych w punkcie i swobod-  
nych). Równanie fundamentalne dla tego obiektu geometrycznego (można go  
nazwać wektorem iloczynowym mieszanym, kontrawariantnym 1 rodzaju wzglę-  
dem struktury napięciowej i kowariantnym 1 rodzaju względem struktury prą-  
dowej) jest spełnione, co wynika ze wzoru:

$$Z^{\lambda}_{\alpha} \alpha = b_{\lambda}^{\alpha} b_{\lambda}^{\alpha} Z^{\lambda} \alpha a_{\alpha}^{\alpha} a_{\alpha}^{\alpha} = b_{\lambda}^{\alpha} Z^{\lambda} \alpha a_{\alpha}^{\alpha}, \quad (67)$$

gdzie zastosowano wzór (7) oraz wzór analogiczny dla transformacji napię-  
ciowej. Spełnienie warunku identyczności wynika wprost ze wzoru (66).

Nietrudno przedyskutować analogiczną regułę transformacyjną dla admi-  
tancji:

$$Y^{\beta}_{\lambda} = a_{\beta}^{\lambda} Y^{\beta} \lambda b_{\lambda}^{\lambda}. \quad (68)$$

Łatwo również wykazać, że jeśli między współrzędnymi impedancji i admitan-  
cji zachodzi relacja odwrotności, to jest ona współzmiennicza.

Jeśli teraz przyjmiemy dodatkowo, że współrzędne SEM  $E^{\lambda}$  i  $(t)E^{\lambda}$  ma-  
ją wektorową regułę transformacji (wektorów kontrawariantnych 1 rodzaju),  
(podobne założenie można uczynić dla ewentualnych SPM odnośnie przestrze-  
ni prądowej) oraz zauważymy, że nasunięcie  $Z^{\lambda}_{\alpha} J^{\alpha}$  doprowadza do współ-  
rzędnych wektora kontrawariantnego 1 rodzaju w przestrzeni napięciowej, to  
dowodzimy od razu współzmienniczość wzorów (46)-(48), (48a). Mają one  
więc postać:

$${}^{(w)}U^{\lambda}_{\mathcal{E}(1)} = \frac{Z^{\lambda}_{\alpha} J^{\alpha}}{|\mathcal{E}(1)| \mathcal{E}(1)} - \frac{E^{\lambda}}{\mathcal{E}(1)}, \quad (69)$$

$${}^{(t)}U^{\lambda}_{\mathcal{E}(1)} = \frac{Z^{\lambda}_{\alpha} J^{\alpha}}{\mathcal{E}(1) |\mathcal{E}(1)| \mathcal{E}(1)} + \frac{Z^{\lambda}_{\alpha} J^{\alpha}}{\mathcal{E}(1) |\mathcal{E}(2)| \mathcal{E}(2)} + {}^{(t)}\frac{E^{\lambda}}{\mathcal{E}(1)}, \quad (70)$$

$${}^{(t)}\mathcal{E}_{(2)} U^\lambda = \mathcal{Z}_{(2)}^\lambda \mathcal{E}_{(1)} J^\alpha + \mathcal{Z}_{(2)}^\lambda \mathcal{E}_{(2)} J^\alpha + {}^{(t)}\mathcal{E}_{(2)} E^\lambda, \quad (71)$$

$${}^{(t)}\mathcal{E}_{(n)} U^\lambda = 0, \quad (71a)$$

ważną w dowolnych układach współrzędnych spośród struktur w przestrzeniach prądowej i napięciowej.

Uwaga: kowariantne ujęcie całosci równań sieci odnosi się do przypadku gdy sieć 3-przewodowa uzyskana była za pomocą "idealizacji" przewodu zerowego przeprowadzonej w fazowym układzie współrzędnych. Można by również uzyskać współzmienniczość równań sieci zaopatrzonej w oryginalne przewody zerowe i tym samym proces "idealizacji" przewodu zerowego (w przypadku, gdy prądy spełniają równanie (45)) uczynić kowariantnym. Lecz do tego konieczne byłoby zacieśnienie grupy transformacji  $G_c$  do pewnych podgrup w przestrzeniach prądowej i napięciowej. Są one jednak zbyt ubogie dla potrzeb praktycznych (tym bardziej, gdyby zażądać dodatkowo spełnienia warunków unitarności). Np. macierz  $S$  określona wzorem (27) (lub " $\frac{1}{\sqrt{3}} S$ ") nie byłaby macierzą transformacji należącej do jednej z nich. Powodem występowania ww. trudności jest desymetryzująca rola przewodu zerowego w rozpatrywanej sieci.

Możemy założyć, że w układach współrzędnych (prądowych i napięciowych) w których wypisane zostały równania (64), (65), (69)-(71), (71a), mają one wyznaczniki charakterystyczne różne od zera. Można też wykazać, że jeśli w jednym z układów prądowo-napięciowych wyznacznik ten jest różny od zera (np. w fazowym), to w innym związanym z nim transformacją nieosobliwą jest on również różny od zera. Dowód z braku miejsca pomijamy.

Wówczas wspomniany układ równań opisujących naszą sieć posiada jednoznaczne rozwiązanie. Można interpretować go przy pomocy pewnego zbioru punktów w przestrzeniach prądowej i napięciowej, pokrywających się z pewnymi punktami "układu odniesienia", który tworzą przestrzenie prądowa i napięciowa (interpretacja ta jest podobna do podanej we wstępie).

#### D. Równania oczkowe

Posiadając omawiane równania sieci, można w sposób podobny do zwykle praktykowanego, uzyskać dla niej równania oczkowe. Zakładamy:

$$\mathcal{E}_{(i)} J^\alpha = b \mathcal{E}_{(i)} I^\alpha, \quad (72)$$

wprowadzając w ten sposób prądy oczkowe  $I_{1}^{\alpha}$ ; " $I_{1}^{\alpha}$ " - spełniają tożsamościowo równania (64) (patrz wzór (3), I). Następnie definiujemy oczkowe SEM  $E_{k}^{\lambda}$

$$E_{k}^{\lambda} = b_{k} E_{g(1)k}^{\lambda} \quad (73)$$

oraz oczkowe impedancje (własne ( $k = 1$ ) i wzajemne ( $k \neq 1$ )):

$$Z_{kl}^{\lambda} = b_{k} Z_{g(1)k}^{\lambda} c_{l} b_{l} \quad (74)$$

(Rozszerzamy tu regułę sumacyjną na trzy wskaźniki). Po podstawieniu wzorów (69), (72) do wzoru (65) i zastosowaniu definicji (73), (74) mamy:

$$Z_{kl}^{\lambda} \alpha_{1} I_{1}^{\alpha} + b_{k} (t)_{g(1)k} U_{k}^{\lambda} = E_{k}^{\lambda} \quad (75)$$

Są to poszukiwane równania oczkowe o niewiadomych  $I_{1}^{\alpha}$ ;  $(t)_{g(1)}$   $U_{k}^{\lambda}$ . Do nich należy dołączyć równania (71a) oraz równania (70), (71) z podstawionymi tam związkami (72). Łatwo zauważyć, że mają one postać współzmienniczą w poprzednio wyjaśnionym sensie (oczywiście współrzędne  $I_{1}^{\alpha}$  mają charakter transformacji taki sam jak " $J_{g(1)}^{\alpha}$ "). Gdy nie ma elementów sprzęgających równania (75) przybierają postać klasyczną.

#### E. Równania węzłowe

Podobnie otrzymujemy współzmiennicze równania węzłowe. Wprowadzamy potencjały węzłowe  $V_{v}^{\lambda}$ :

$$(c)_{g(1)} U_{g(1)}^{\lambda} = - a_{g(1)v} V_{v}^{\lambda} \quad (76)$$

gdzie:

$$(c)_{g(1)} U_{g(1)}^{\lambda} = (w)_{g(1)} U_{g(1)}^{\lambda} + (t)_{g(1)} U_{g(1)}^{\lambda} \quad (77)$$

Związki (76), (77) spełniają tożsamościowo równanie (65) (patrz wzór (3), I). Definiujemy teraz węzłowe SPM  $I_{u}^{\alpha}$ :

$$I_{u}^{\alpha} = a_{g(1)u} I_{g(1)}^{\alpha} \quad (78)$$



" $I^{\alpha\alpha}$ " występują w kowariantnym odpowiedniku równań (33):  
 $\mathcal{E}(1)$

$$J^{\alpha} = \frac{Y^{\alpha}_{\lambda}}{|\mathcal{E}(1)|} (w) U^{\lambda} + I^{\alpha\alpha} \quad (79)$$

W dalszym ciągu definiujemy admitancje węzłowe (własne ( $u = v$ ) i wzajemne ( $u \neq v$ )):

$$\frac{Y^{\alpha}_{\lambda}}{uv} = \frac{a}{\mathcal{E}(1)^u} \frac{Y^{\alpha}_{\lambda}}{\mathcal{E}(1)} \frac{a}{\mathcal{E}(1)^v} \quad (80)$$

Teraz korzystając ze wzorów (76), (77), (79) mamy:

$$J^{\alpha} = - \frac{Y^{\alpha}_{\lambda}}{|\mathcal{E}(1)|} \left( \frac{a}{\mathcal{E}(1)^v} V^{\lambda} + (t) \frac{U^{\lambda}}{\mathcal{E}(1)} \right) + I^{\alpha\alpha} \quad (81)$$

Podstawiamy równanie (81) do równania (64) stosując definicje (78), (80):

$$\frac{Y^{\alpha}_{\lambda}}{uv} V^{\lambda} + \frac{a}{\mathcal{E}(1)^u} \frac{Y^{\alpha}_{\lambda}}{\mathcal{E}(1)} (t) \frac{U^{\lambda}}{\mathcal{E}(1)} = I^{\alpha\alpha} \quad (82)$$

Są to równania węzłowe o niewiadomych  $V^{\lambda}$ ,  $(t) \frac{U^{\lambda}}{\mathcal{E}(1)}$ . Dołączamy tu równania (71a) oraz równania (70), (71) z podstawionymi związkami (81). Podobnie jak równania oczkowe stają się one prostsze gdy nie ma elementów sprzęgających.

## F. Wspólne struktury prądowo-napięciowe

Zastosowane współzmiennicze ujęcie równań sieci opierało się na układach współrzędnych, które otrzymywaliśmy transformując niezależnie współrzędne prądowe i napięciowe praukładów. Jak to było już wspomniane, można stosować jednocześnie dla obu przestrzeni prądowej i napięciowej te same transformacje otrzymując wspólne struktury zwykłą lub sprzężoną. Można wówczas używać wskaźników  $\varrho$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$  tej samej kategorii dla prądów i napięć. Spostrzegamy, że wówczas obiekty geometryczne iloczynowe stają się pewnymi obiektami; "zwykłymi" (tzn. rozpatrywanymi względem tych wspólnych struktur). I tak np. impedancja opisywana jest wtedy za pomocą współrzędnych  $Z^{\alpha}_{\alpha}$  tensora jednokrotnie kontrawariantnego 1 rodzaju i jednokrotnie kowariantnego 1 rodzaju. Podobna uwaga dotyczy admitancji. W ten sposób poprowadzony jest wykład równań sieci w artykule [1]. Tam też omawiane są bardziej szczegółowe transformacje wiążące układy współrzędnych fazowy i symetryczny.

### G. Zacieśnienie grupy transformacji. Subobiekty

Do tej pory, nasze przestrzenie prądowa i napięciowa, oparte były na grupie  $G_c$ . Jeśli zacieśnić ją do jej podgrupy  $G_{out}$ , wówczas trzeba po- czynić pewne uwagi odnośnie użytych obiektów geometrycznych. Gdy dla roz- patrywanych obiektów geometrycznych abstrakcyjnych zrealizować takie "za- cieśnienie" pozostają one nadal pewnymi obiektami geometrycznymi abstrak- cyjnymi (tzn. spełniają wówczas równanie fundamentalne i warunek identycz- ności). Nazywa się je wtedy subobiektami poprzednich ([6], cz.II, R.I). Stosując do wzorów (51)-(58) wzór (16) stwierdzamy, że przy grupie  $G_{out}$  zanika różnica pomiędzy wektorami kontrawariantnymi 1 rodzaju i kowariant- nymi 2 rodzaju oraz kowariantnymi 1 rodzaju oraz kontrawariantnymi 2. Czy- li zachodzą współzmiennicze związki:

$$v^{\delta} = v_{\delta}, \quad (83)$$

$$v_{\delta} = v^{\delta}. \quad (84)$$

Odnoszą się one oczywiście do prądów i napięć. W podobny sposób otrzymu- jemy dla impedancji:

$$Z_{\alpha}^{\lambda} = Z_{\lambda\alpha} = Z^{\lambda\bar{\alpha}} = Z_{\lambda}^{\bar{\alpha}}. \quad (85)$$

Analogiczne uwagi odnoszą się do admitancji.

Współczynniki orientacji opisywane są oczywiście nadal skalarami.

Ze wzorów (83)-(85) wynika dobrze znana własność "redukcji" listy o- biektyw geometrycznych przy zacieśnieniu grupy przekształceń układów współ- rzędnych.

Rzecz jasna (jeśli trzeba) nadal można stosować cytowane uwagi o współ- nych strukturach prądowo-napięciowych. Stanowi to też zacieśnienie grupy transformacji złożonej z uporządkowanych czwórek, o których mowa w punkcie 3 D, II i doprowadza do pojęcia subobektu dla impedancji i admitancji. Można też wprowadzać zacieśnienie grupy transformacji dla jednej tylko przestrzeni prądowej lub napięciowej.

Uwaga: rozpatrując z osobna obiekty geometryczne abstrakcyjne dla ba- danych wielkości elektrycznych jest rzeczą obojętną ilu stanów sieci do- tyczą one, co decyduje w pewien sposób o ilości obiektów szczególnych skła- dających się na dany abstrakcyjny. (Opierając się o ten fakt można ilu- strować pojęcie podobiektu ([6], cz.II, R.I). Mówiąc jednak o współzmienn- niczości równań sieci mamy na myśli za każdym razem jeden stan (opisany obiektem szczególnym), dla konkretnych wartości SEM (SPM) oraz impedancji przedstawiony w dopuszczalnych układach współrzędnych. Aby zająć się do- kładniej tym problemem, jak również "na raz" wszystkimi możliwymi jej sta- nami dla rozmaitych pobudzeń i impedancji trzeba by wprowadzić pojęcie o- biektu złożonego dla wszystkich poszukiwanych wielkości elektrycznych któ-

ry były komitantną obiektu złożonego opisującego te pobudzenia oraz impedancje. Następnie badać jak powiązane są włókna, czy też włókna tranzytywne (np. dla jednego stanu sieci) wymienionych obiektów. Jest to procedura bardzo uciążliwa - to też ją pominiemy. Definicje wprowadzonych pojęć można znaleźć w pozycji (6), cz.II, R.I, II; ściśle rzecz biorąc należałoby je uogólnić na przypadek występowania obiektów iloczynowych.

#### H. Uwagi o sieci n-przewodowej

Równania (64), (65), (69)-(71), (71a), jak też i cała przedstawiona w niniejszym rozdziale teoria dotyczą sieci 3-przewodowych (pierwotnie 4-przewodowych). Widać jednak, że będą one analogiczne dla sieci n-przewodowych ( $n \in \mathbb{N} - (0)$ ), (pierwotnie  $(n+1)$  - przewodowych). Zmieni się po prostu liczebność zbiorów, do których przynależą wskaźniki współrzędnych przestrzeni prądowej i napięciowej oraz pozostałych rozważanych wielkości. Jedynie istotnemu uogólnieniu należy wówczas poddać definicję symetrii elementów sieci oraz te momenty, w których ona interweniuje (np. warunek wystarczający do spełnienia relacji (45)). Można tego dokonać w oparciu o transformację wiążącą współrzędne fazowe i symetryczne sieci n-przewodowej podaną w pozycji [3], R.V. Teoria nasza została sformułowana dla sieci 3-przewodowych ze względów tradycyjnych oraz z powodu ich praktycznej doniosłości.

### 7. Moc. Zasady zachowania

#### A. Definicje mocy i charakter geometryczny ich przedstawienia

Zajmując się z tensorowego punktu widzenia mocami, należy w pierwszym rzędzie podać przy pomocy jakich obiektów geometrycznych będą one opisywane.

Najważniejsza jest moc symboliczna. Będziemy nią operować, podobnie jak współzmienniczymi równaniami sieci, dla elementów sieci 3-przewodowej otrzymanej za pomocą "idealizacji" przewodu zerowego i wprowadzenia wspólnych węzłów dla gałęzi końcowych (punkty 5A, B, II). Jest ona, jak wiadomo, opisana w fazowym układzie współrzędnych wyrażeniem  $U^{\vec{p}} J^{\vec{q}}$ . Widać od razu (wzory (83), (84)), że aby na jego podobieństwo stworzyć współzmiennicze wyrażenie skalarne  $U^{\vec{q}} J^{\vec{p}}$  wystarczy przestrzenie prądową i napięciową oprzeć o grupę  $G_{cut}$  oraz stosować dla nich wspólne struktury zwykłą i sprzężoną. (Należy pamiętać tu o współzmienniczym związku:  $J^{\vec{q}} = J^{\vec{q}}$ .) Wówczas zachodzi:

$$S = U^{\vec{q}} J^{\vec{p}} = A_{\vec{q}\vec{p}} U^{\vec{q}} J^{\vec{p}} = \Lambda_{\vec{q}\vec{p}} J^{\vec{p}} U^{\vec{q}} = U^{\vec{p}} J^{\vec{q}} = J_{\vec{q}} U^{\vec{p}} \quad (86)$$

oraz:

$$A_{\rho\bar{\sigma}} = A\bar{\sigma}_{\rho} = A_{\rho}^{\bar{\sigma}} = \delta_{\rho}^{\bar{\sigma}}. \quad (87)$$

Jak widać ze wzoru (86) moc symboliczna  $S$  rzeczywiście opisana jest skalarom ("S" stanowi hermitowski iloczyn skalarny " $U^{\rho}$ " oraz " $J^{\sigma}$ "). Współrzędne tensora Hermite'a  $A_{\rho\bar{\sigma}}$ ,  $A\bar{\sigma}_{\rho}$  spełniają tu rolę współrzędnych tensora metrycznego oraz dla wymienionych warunków wzory (86), (87) są kowariantne.

W dalszym ciągu wprowadzamy długości wektorów zwykłego i sprzężonego napięcia i prądu dla omawianego elementu stosując wspólne oznaczenie  $W$ .

$$W^2 = W^{\rho} W^{\bar{\rho}} = A_{\rho\bar{\sigma}} W^{\rho} W^{\bar{\sigma}} = A\bar{\sigma}_{\rho} W^{\bar{\sigma}} W^{\rho} = W_{\rho} W^{\bar{\rho}} = W_{\rho} W^{\rho}. \quad (88)$$

Dla napięcia " $W^2$ " oznacza kwadrat tzw. napięcia modułowego ( $U^2$ ), dla prądu - prądu modułowego ( $J^2$ ) ([10]). Napięcia te i prądy opisane są oczywiście też skalarami.

Na mocy nierówności Schwarz'a ([5], R.III) mamy:

$$|S|^2 \leq U^2 J^2 = ({}_{(m)}P)^2. \quad (89)$$

Nierówność (89) jest podstawą do zdefiniowania mocy asymetrii  $K$  jako uzupełnienia jej lewej strony ( $K^2$ ) do wartości  $({}_{(m)}P)^2$  (" $({}_{(m)}P$ " oznacza moc modułową). Oryginalnie jest ona zdefiniowana dla elementów końcowych w inny sposób ([10]). Z braku miejsca nie będziemy tu transponowali tej definicji na przypadek elementów przelotowych. Moce  $|S|$ ,  $K$ ,  $({}_{(m)}P)$  są więc opisane skalarami (względem wprowadzonych struktur).

## B. Norma. Metryka

Zauważmy teraz, że wprowadziliśmy w przestrzeni prądowo-napięciowej o wspólnych strukturach otrzymanych przy pomocy grupy transformacji  $G_{cut}$  pole tensora metrycznego o współrzędnych  $A_{\rho\bar{\sigma}}$  (lub  $A\bar{\sigma}_{\rho}$ ), można naszą przestrzeń punktową uważać za metryczną (obserwując wzory (86), (88) zauważamy, że można również nie wprowadzać w tym celu wyżej wymienionego tensora metrycznego). Mianowicie wielkość  $W$  występująca we wzorze (88) traktujemy jako normę tej przestrzeni (jeśli " $W^{\rho}$ " oraz " $W^{\bar{\rho}}$ " interpretować jako współrzędne jej punktów). Spełnia ona 3 aksjomaty normy ([5], R.II), czego dowód obowiązujący w ogólniejszym przypadku można znaleźć w tejże pozycji [5], R.III.

Następnie tworząc definicję odległości  $\rho(P, P)$  dwu punktów  $W, \bar{W}, (P)$ ;  $W, \bar{W}, (P)$  o współrzędnych  $W^{\rho}, W^{\bar{\rho}}$  oraz  $W^{\rho}, W^{\bar{\rho}}$  (oznaczenia  $P$  dotyczą przestrzeni punktowej, " $W$ " - punktu rozumianego jako obiekt geometryczny):

$$\varphi^2 \begin{pmatrix} P, & P \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A_{\varphi\delta} \begin{pmatrix} W^{\varphi} & & & \\ & W^{\varphi} & & \\ & & W^{\delta} & & \\ & & & W^{\delta} & \\ & & & & W^{\delta} \end{pmatrix} = A_{\delta\varphi} \begin{pmatrix} W^{\delta} & & & \\ & W^{\delta} & & \\ & & W^{\varphi} & & \\ & & & W^{\varphi} & \\ & & & & W^{\varphi} \end{pmatrix}, \quad (90)$$

tak jak jest ona wprowadzona w przestrzeni unormowanej, stwierdzamy, że spełnia ona 3 aksjomaty przestrzeni metrycznych ([5], R.I, II). Odległość ta jest przykładem 2-punktowego pola skalarnego (względem rozpatrywanych struktur).

Wspomniemy tu jeszcze tylko, że pojęcia przestrzeni punktowej prądowo-napięciowej (lub też np. przestrzeni, której elementami są wektory kontrawariantne 1 rodzaju) pozwalają na interpretowanie ich, w oparciu o grupę  $G_{cut}$  (1 tensor metryczny), jako przestrzeni liniowych, unitarnych i Hilberta ([5], R.I, II, III). Ze względu na rozwlekłość tej interpretacji nie będziemy przeprowadzać efektywnych rozumowań.

### C. Zasady zachowania mocy

Zasadę zachowania mocy symbolicznej wyprowadzamy jako wniosek z równań sieci. Na równanie (65) nasuwamy "I<sup>φ</sup>" (stosując w nim również wskaźnik  $\dot{q}$ , czego przyczyną była już wyjaśniona). Następnie wykorzystując równania (72) oraz (69) otrzymujemy:

$$\sum_{\xi(1)} Z_{\xi\sigma} \begin{pmatrix} J^{\xi} & J^{\delta} \\ \xi(1) & \xi(1) \end{pmatrix} + \sum_{\xi(1)} U_{\xi} \begin{pmatrix} J^{\xi} \\ \xi(1) \end{pmatrix} = \sum_{\xi(1)} E_{\xi}^* \begin{pmatrix} J^{\xi} \\ \xi(1) \end{pmatrix}. \quad (91)$$

To samo można uzyskać nasuwając na sprzężone równanie (64) "V<sub>u</sub><sup>φ</sup>".

Lewa strona równania (91) oznacza moc pobraną przez impedancje elementów przelotowych rozpatrywanej sieci 3-przewodowej oraz przez SEM kompensacji elementów sprzęgających (strzałkowanie odbiornikowe - rys. 8); prawa natomiast - moc wydaną przez źródła. Czyli równanie to wyraża poszukiwaną zasadę zachowania mocy symbolicznej dla naszej sieci.

Wiadomo ([10]), że dla mocy |S|, K, (m)<sup>P</sup> zasady zachowania na ogół nie są spełnione.

## 8. Uwagi dotyczące współzmienniczości równań wielobiegunników

### A. 4s-biegunniki

Przypuśćmy, że jest podany wielobiegunnik (rys. 9), niekoniecznie symetryczny. Dla jego s (s ∈ N - (0)) gałęzi (4-przewodowych) wprowadzonych na zewnątrz operacje wprowadzenia przestrzeni prądowej, napięciowej, praukładów współrzędnych, zbioru dopuszczalnych układów współrzędnych (dla ww. operacji potrzebny jest pewien zbiór wielobiegunników) przebiegają identycznie jak dla gałęzi 4-przewodowych rozważanej poprzednio sieci. Zakładamy, że zachodzą warunki zapewniające spełnienie relacji (45) dla wszystkich jego gałęzi (4-przewodowych).

Równania wielobiegownika we współrzędnych fazowych powstają przez uogólnienie równań (47), (48) - ich postać współzmiennicza jest uogólnieniem równań (70), (71):

$$J^{\alpha} = \underset{r}{Y}_{gh}^{\alpha} U^{\lambda} + \underset{r}{I}_{g}^{\alpha}, \quad g, h \in G_u, \quad (92)$$

$$r \in (p, q).$$

Zmienne  $g$  i  $h$  służą jak zwykle do oznaczania numerów gałęzi. Złótych numerów  $u$ -tego wielobiegownika został oznaczony za pomocą " $G_u$ ". Wskaźnik  $p$  oznacza ostrzażkowanie prądów gałęzi elementu wielobiegownika w kierunku od niego, " $q$ " - do niego (dotyczy to jej przewodów  $a, b, c$ ).

Zakładamy tu, jak zwykle, nieosobliwość macierzy admitancji  $\underset{r}{Y}_{gh}^{\alpha}$  oraz całego przekształcenia (92).

Przypominamy też tutaj komentarz dotyczący "pochodzenia" równań (92). Albo traktujemy je jako wyprowadzone na podstawie znajomości budowy wewnętrznej jakiegoś elementu wielobiegownika albo jako aksjomaty charakteryzujące go.

Przy okazji można też podać pewną analityczną definicję wielobiegownika. Jest to funkcja przyporządkowująca obiektom szczególnym złożonym, uzyskanym z wektorów kontrawariantnych i rodzaju napięć, obiekty szczególne złożone, uzyskane z wektorów kontrawariantnych i rodzaju prądów. O rodzaju tego przyporządkowania decydują odpowiednie obiekty geometryczne szczególne dla admitancji i SPM charakterystyczne dla danego wielobiegownika (wzór (92)).

## B. Sieć złożona z elementów 4s-biegowników

O sieci tej będziemy zakładali, że składa się ze skończonej ilości elementów wielobiegowników oraz tworzy drzewo (jeśli te elementy traktowane są jak węzły (punkty) połączone gałęziami (bokami)). Celowość tego założenia, z punktu widzenia spełnienia relacji (45), nie wymaga już komentarzy. Jak łatwo spostrzec, można wtedy zadośćuczynić regule orientacji prądowej gałęzi przyjętej we wzorze (92). (Jeśli zaoptimizację gałęzi wejściowe omawianych elementów w transformatory separujące (punkt 4B, II), można wówczas pominąć założenie o drzewie zmieniając jednocześnie wspomnianą regułę orientacji).

Aby rozwiązać taką sieć (względem interesujących nas jedynie prądów i napięć gałęzi łączących elementy wielobiegowników) stosujemy do każdego z nich zasadę wyodrębnienia wpinając po 3 SEM między przewód zerowy i przewody  $a, b, c$ . Wówczas każdy z tych elementów opisany jest dla danych numerów  $u$  oraz  $r$  pewnym spośród równań (92). Równanie całości można również przedstawić w podobnej postaci, jedynie należy założyć teraz dla ca-

zej sieci, że:  $(g, h \in G = \sum_U G_U)$ . Z założeniem tym wiąże się umowa: jeśli "g" i "h" oznaczają numery gałęzi elementów różnych wielobiegowników to zachodzi:  $(\sum_{gh} Y_{gh}^\alpha = 0)$ .

Przyjmujemy jednocześnie, że całość równań sieci ma wyznacznik charakterystyczny różny od zera.

Nieco obszerniejsze uwagi na temat rozwiązywania sieci złożonych z elementów wielobiegowników (niektóre z nich są symetryczne) przy użyciu współrzędnych fazowych lub symetrycznych można znaleźć w pozycji [2].

Wprowadzając tego rodzaju sieci uwalniamy się od kłopotliwego założenia symetrii topologicznej polegającej na tym, że są one 4-przewodowe (tu tylko gałęzie wyprowadzone na zewnątrz są takie) oraz od tego, że w skład gałęzi wchodzi elementy proste (wzajemnie niesprzężone) względnie elementy sprzęgające.

### C. (n+1)-biegunniki

Jeśli sieć złożona z elementów 4s-biegunników nie tworzy drzewa i nie posiada transformatorów separujących, czy też gałęzie zewnętrzne nie są 4-przewodowe, możemy dla interesujących nas gałęzi operować dwoma układami połączonymi (n+1) przewodami ( $n \in \mathbb{N} - (0)$ ) (lub też jednym układem pracującym w stanach biegu jałowego względnie zwarcia; omówimy tu pierwszy przypadek - drugi można rozpatryć podobnie). Po zastosowaniu zasady wyodrębnienia (względem (n+1)-przewodu) każdy z nich będzie stanowił element (n+1)-biegunnika.

Po opisany już postępowaniu otrzymujemy ich równania:

$$J^\alpha = \sum_{\lambda} Y_{\lambda}^\alpha U^\lambda + \sum_{r} I_r^\alpha, \quad (93)$$

$$\alpha, \lambda \in (1, \dots, h.), \quad r \in (p, q).$$

Kwestia charakteru geometrycznego występujących tu wielkości oraz współzależności równań (93) rozwiązana jest zupełnie analogicznie jak poprzednio - inna jest jedynie ilość współrzędnych występujących tu obiektów geometrycznych.

Czynimy tu podobne jak poprzednio założenie o wyznacznikach charakterystycznych równań obu (n+1)-biegunników oraz całości równań.

Pewne uwagi na temat takiej sieci zamieszczone są również w pozycji [2].

## 9. Zakończenie

### A. O możliwościach dalszych zastosowań rachunku tensorowego do teorii sieci elektrycznych

We wstępie postawiliśmy sobie za zadanie, tensorowe uogólnienie teorii składowych symetrycznych. Cel ten został osiągnięty kolejno przez wprowadzenie przestrzeni punktowych prądowej i napięciowej, przestrzeni analitycznej  $C^3$ , praukładu współrzędnych, grupy transformacji współrzędnych oraz struktury F. Kleina. Następnie w przestrzeni opartej o daną grupę formułowane były kowariantnie prawa opisujące pracę układów o stopniowo coraz to bardziej złożonej topologii. Wszystkie wielkości dotyczące układu były reprezentowane za pomocą pewnych obiektów geometrycznych (z wyjątkiem przewodów zerowych). W ten sposób zapoczątkowany we wstępie program geometryzacji teorii sieci o dowolnej budowie topologicznej i "przebiegach" w znacznej mierze dowolnych (klasy  $C_3$ ) był kontynuowany dla sieci symetrycznych o przebiegach sinusoidalnych.

Wydaje się, że na tym jednak nie kończą się możliwości wspomnianej geometryzacji. Oto bardzo pobieżnie przedstawione idee kilku dalszych przykładów.

Sieci symetryczne (w rozważanym poprzednio sensie) z przebiegami odkształconymi. Można wówczas stosować podaną teorię do każdej harmonicznej z osobna. Wynik odnośnie przebiegów czasowych otrzymujemy drogą superpozycji. Trudności jakie pojawiają się są natury zupełnie nietensorowej. Dla nieskończonej liczby harmonicznych albo trzeba wprowadzać dość rygorystyczne ograniczenia odnośnie elementów sieci, albo korzystać z pojęcia dystrybucji.

Podobne rezultaty są do osiągnięcia dla przebiegów nieustalonych z zastosowaniem całek Fouriera lub Laplace'a. We wszystkich tych przypadkach zmienne dotyczące harmonicznych  $h, \omega, p$  (w przeciwieństwie np. do " $\alpha$ ", " $\lambda$ ", " $\epsilon$ ") odgrywają w transformacjach współrzędnych rolę parametrów. Zmiana tego stanowiska prowadziłaby do teorii znacznie ciekawszej, lecz wiązałoby się to z przeniesieniem przynajmniej niektórych podstaw rachunku tensorowego do pewnych nieskończone wymiarowych przestrzeni Hilberta.

Wreszcie innym polem zastosowania rachunku tensorowego może być linia długa o równaniach różniczkowych liniowych,  $(3+1)$ -przewodowa lub ogólniej  $(n+1)$ -przewodowa, dla przebiegów sinusoidalnych. Jeśli wprowadzić dla stanów ustalonych metodę symboliczną i zastosować transformację współrzędnych o współczynnikach niezależnych od zmiennej  $x$  (oznaczenie odległości rozpatrywanego przekroju linii od jej początku lub końca) - to uogólnienie teorii przedstawionej w rozdziale drugim jest dość oczywiste. Przebiegi prądowe i napięciowe będą wówczas obrazowane w przestrzeniach punktowych prądowej i napięciowej lub w przestrzeni  $C^3$  jako pewne trajektorie względem " $x$ " (podobnie jak stan układu opisanego we wstępie jest



interpretowany jako trajektoria w przestrzeni konfiguracyjnej względem "t"). W dalszym ciągu można łączyć zagadnienie linii dżugiej z przebiegami odkształconymi lub nieustalonymi w naszkicowanym kontekście.

## B. O stosunku przedstawionej teorii do eksperymentu

Najpierw należy przynajmniej w ogólnym zarysie scharakteryzować powyższy stosunek dla dowolnych teorii o wzorach formułowanych kowariantnie przy pomocy współrzędnych pewnych obiektów geometrycznych. Nie będziemy tego robić wyczerpująco, bowiem należałoby dokładnie określić kategorie pojęć pierwotnych występujących w takich teoriach oraz pewien typ ich aksjomatów, co wymaga precyzyjnego operowania pojęciami logiki i nie jest łatwe (tym bardziej, że wspomniane teorie mogą być bardzo różnorodne). W każdym razie należy przede wszystkim uwierzytelnić na drodze eksperymentu reguły transformacyjne występujących obiektów geometrycznych (łącznie ze współrzędnymi) oraz w jednym układzie współrzędnych (np. w praukładzie, czy też w atlasie pierwotnym) wzory, w których mamy do czynienia ze współrzędnymi tych obiektów, a które stanowią pewne aksjomaty teorii. Oprócz tego należy sprawdzić przyporządkowanie współrzędnych niektórych zadanych obiektów w praukładzie (jak też sam praukład) oraz czy przestrzeń punktowa jest przestrzenią Hausdorffa.

Sprawdzenie eksperymentalne równań wyrażających uogólnione prawo Ohma dla impedancji oraz równań Kirchhoffa w praukładzie fazowym zostało dawno dokonane. Sprawdzenie wspomnianych reguł transformacyjnych odbywa się za pomocą układów przekształcających tego typu co przedstawiony rys. 3. Jeśli teraz będziemy uważali je za z góry zadane "czarne skrzynki" - wówczas potrzebny jest eksperyment do określenia czy rzeczywiście powodują one przekształcenia opisane jako reguły transformacyjne rozpatrywanych obiektów geometrycznych. Jeśli przyjmiemy, że są one skonstruowane w sposób wiadomy eksperymentującemu, to wymienione doświadczenia nie są potrzebne. Trudno jednak oprzeć się wrażeniu, że alternatywa "czarnych skrzynek" jest w tym przypadku raczej formalnym wybiegiem i tu też zaznacza się zasadnicza różnica pomiędzy stosunkiem do eksperymentu teorii sieci symetrycznych oraz takich teorii jak względności czy pola elektromagnetycznego. W tych ostatnich bloki przekształcające zilustrowane podobnie jak na rys. 3 są właściwie w znacznej mierze dziełem samej natury. Mimo tych różnic walory kowariantnego formułowania teorii przedstawione w p. 9 wstępu zachowują nadal odnośnie sieci symetrycznych swą wagę i sens.

## C. Pewne uwagi odnośnie konstrukcji przedstawionej teorii

W pracy tej zastosowany został styl nieco różniący się od tego, jaki można spotkać np. w podręcznikach matematyki, a charakteryzujący się występowaniem cyklu: aksjomaty - dowód - twierdzenie. Styl ten najściślej - a najbardziej elegancki jest trudny do utrzymania gdy nie chodzi wy-

kącznie o wyłożenie danej teorii, ale również o podanie jej alternatyw, objaśnienie dlaczego właśnie taka a nie inna została obrana oraz przedstawienie fizykalnych komentarzy. Formalizowanie tych alternatyw oraz konsekwentnie przestrzeganie schematów dowodzenia wydłużyłoby niezmiernie i tak już rozwlekłą pracę.

#### LITERATURA

- [1] Brodzki M.: O współzmienniczości równań opisujących sieci złożone o pewnych symetriach. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Elektryka" z. 24. Gliwice 1969.
- [2] Brodzki M.: O metodach rozwiązywania sieci złożonych zawierających części symetryczne. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Elektryka" z. 24. Gliwice 1969.
- [3] Cholewicki T.: Macierzowa analiza obwodów elektrycznych. PWN Warszawa-Wrocław 1958.
- [4] Gołąb S.: Rachunek tensorowy. PWN Warszawa 1966.
- [5] Kołodziej W.: Wybrane rozdziały analizy matematycznej. PWN Warszawa 1970.
- [6] Kucharzewski M.: Elementy teorii obiektów geometrycznych. Katowice 1969. Wydawnictwa Uniwersytetu Śląskiego.
- [7] Leja F.: Funkcje zespolone. PWN Warszawa 1967.
- [8] Leja F.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN Warszawa 1969.
- [9] Nowomiejski Z.: Dynamika układu cząstek nasiektryzowanych oraz obwodów liniowych wieloczkowych. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. "Elektryka" z. 14. Gliwice 1963.
- [10] Nowomiejski Z.: Moc i energia elektryczna w układach elektrycznych o dowolnych ustalonych przebiegach. Zeszyty Naukowe Pol.Śl. "Elektryka" z. 15. Gliwice 1963.
- [11] Raszewski P.K.: Geometria Riemanna i analiza tensorowa. PWN Warszawa 1958.
- [12] Rubinowicz W., Królikowski W.: Mechanika teoretyczna. PWN Warszawa 1955.
- [13] Synge J.L., Schild A.: Rachunek tensorowy. PWN Warszawa 1964.
- [14] Tatarzkiewicz K.: Rachunek tensorowy a mechanika teoretyczna (artykuł zamieszczony w książce: Metody geometryczne w fizyce i technice). Wydawnictwa Naukowo-Techniczne Warszawa 1968.
- [15] Zeweke G.W., Jonkin P.A.: Podstawy teorii obwodów elektrycznych. Państwowe Wydawnictwa Techniczne Warszawa 1958.

О КОВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИИ И МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ С НЕКОТОРЫМИ СИММЕТРИЯМИ

Р е з ю м е

В работе обсуждены проблемы ковариантной формулировки уравнений 4-проводных сетей с линейными элементами, которые имеют установившееся состояние, а протекание токов и напряжений — синусоидальные.

Рассмотрены проблемы связанные с пространством, в которых обрабатывается теория вышеназванных сетей а также проблемы геометрического характера изображения разных её величин (проблемы связанные с топологией сети разработаны более поверхностно).

Основной работе предшествует вступление, в котором в общих чертах представлены основы тензорной теории электромеханических систем.

SUR LA COVARIANCE DES ÉQUATIONS DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES  
AYANT QUELQUES SYMÉTRIES ET SUR LES MÉTHODES DE LEURS CALCULS

R e s u m é

Dans ce travail on considère surtout les équations des circuits linéaires à quatre conducteurs ayant les courants et les tensions sinusoidaux. On précise spécialement les problèmes des espaces où est présentée la théorie des circuits et du caractère géométrique de leurs différentes grandeurs. (Les problèmes topologiques des circuits sont traités d'une manière plus superficielle.)

On commence ce travail de la présentation des fondements de la théorie tensorielle des systèmes électromécaniques.



## ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

ukazują się w następujących seriach:

- A. AUTOMATYKA
- B. BUDOWNICTWO
- Ch. CHEMIA
- E. ELEKTRYKA
- En. ENERGETYKA
- G. GÓRNICTWO
- H. HUTNICTWO
- IS. INŻYNIERIA SANITARNA
- JO. JĘZYKI OBCE
- MF. MATEMATYKA-FIZYKA
- M. MECHANIKA
- NS. NAUKI SPOŁECZNE

Dotychczas ukazały się zeszyty  
serii E.

- Elektryka z. 1, 1954 r., s. 76, zł 9,10
- Elektryka z. 2, 1956 r., s. 82, zł 11,—
- Elektryka z. 3, 1956 r., s. 102, zł 14,50
- Elektryka z. 4, 1957 r., s. 113, zł 21,75
- Elektryka z. 5, 1959 r., s. 152, zł 20,—
- Elektryka z. 6, 1960 r., s. 131, zł 23,45
- Elektryka z. 7, 1961 r., s. 42, zł 3,40
- Elektryka z. 8, 1961 r., s. 147, zł 11,30
- Elektryka z. 9, 1961 r., s. 128, zł 26,25
- Elektryka z. 10, 1961 r., s. 52, zł 3,90
- Elektryka z. 11, 1961 r., s. 128, zł 22,80
- Elektryka z. 12, 1962 r., s. 162, zł 12,20
- Elektryka z. 13, 1962 r., s. 127, zł 9,80
- Elektryka z. 14, 1963 r., s. 157, zł 9,40
- Elektryka z. 15, 1963 r., s. 58, zł 3,50
- Elektryka z. 16, 1963 r., s. 219, zł 11,40
- Elektryka z. 17, 1964 r., s. 272, zł 15,60
- Elektryka z. 18, 1964 r., s. 161, zł 8,30
- Elektryka z. 19, 1964 r., s. 119, zł 6,50
- Elektryka z. 20, 1966 r., s. 184, zł 13,—
- Elektryka z. 21, 1966 r., s. 263, zł 16,—
- Elektryka z. 22, 1967 r., s. 114, zł 7,—
- Elektryka z. 23, 1968 r., s. 113, zł 7,—
- Elektryka z. 24, 1969 r., s. 184, zł 10,—
- Elektryka z. 25, 1969 r., s. 134, zł 8,—
- Elektryka z. 26, 1969 r., s. 82, zł 5,—
- Elektryka z. 27, 1970 r., s. 341, zł 19,—
- Elektryka z. 28, 1970 r., s. 303, zł 16,50
- Elektryka z. 29, 1971 r., s. 150, zł 8,50
- Elektryka z. 30, 1971 r., s. 110, zł 7,50
- Elektryka z. 31, 1971 r., s. 380, zł 23,50
- Elektryka z. 32, 1972 r., s. 111, zł 8,—
- Elektryka z. 33, 1972 r., s. 146, zł 10 —

BIBLIOTEKA GŁÓWNA  
Politechniki Śląskiej

P 3347 | 72