ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: AUTOMATYKA z. 73 Nr kol. 798

Reginald KRZYŻANOWSKI

DYNAMIKA WYBRANYCH UKŁADÓW O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH

Streszczenie. W artykule przedstawiono procedurę wyznaczania własności dynamicznych wybranej klasy układów o parametrach rozłożonych. Taką klasą równań opisane są niektóre obiekty przemysłowe z przepływami substancji, kiedy można pominąć dyfuzję wzdłużną i traktować je jako obiekty liniowe. Niniejszy artykuł jest skróconą wersją referatu wygłoszonego na Seminarium Instytutu Automatyki.

1. WSTĘP

W przemysłowych procesach produkcyjnych niektóre aparaty technologiczne charakteryzuję się ciągłą zmianą jakiejś cechy strumienia przepływającego materiału na długości aparatu. Strumień materiałowy zmienia swoje własności (np. określoną cechę) na skutek oddziaływania drugiego strumienia materiałowego przez ściankę lub warstwę graniczną. Taka sytuacja występuje np. w przeponowych, rurowych wymiennikach ciepła, w wymiennikach masy (np. w absorberach), w wymiennikach jonów.

W omawianych aparatach występuje: w wymiennikach ciepła - wymiana ciepła (stąd zmiana temperatur strumieni materiałowych), w wymiennikach masy - wymiana masy (stąd zmiana stężeń poszczególnych strumieni materiałowych), w wymiennikach jonów - wymiana jonów (co powoduje zmiany stężenia jonów). W technologii przemysłowej większość tych aparatów charakteryzuje się wymuszonymi przepływami strumieni materiałowych.

Dla zapewnienia intensywnej wymiany w aparatach takich mamy zwykle duży stosunek wymiaru podłużnego do poprzecznego, a przepływy są najczęściej silnie burzliwe. W takich aparatach, w określonym strumieniu substancji, interesująca nas cecha (wielkość skalarna), np. temperatura ϑ, może być z wystarczającą praktycznie dokładnością przyjmowana jako jednakowa w całym poprzecznym przekroju strumienia płynu (zmiana temperatury występuje na bardzo cienkiej warstewce przyściennej). Natomiast istotna zmiana tej wielkości występuje oczywiście wzdłuż aparatu. Dla przepływu o dobrze rozwiniętej burzliwości i dla dużego stosunku wymiaru podłużnego do poprzecznego jako strumień masy danego składnika lub strumień entalpii może być przyjmowana tylko składowa konwekcyjna (proporcjonalna do prędkości średniej), a składowa dyfuzyjna (ściślej dyfuzji burzliwej, wzdłużnej) jest praktycznie do pominięcia.

Taki charakter przepływu w inżynierii chemicznej nosi nazwę "przepływu tłokowego". Niektóre rozważania ilościowe dla najprostszego przypadku pojedynczej rury można znaleźć w [1]. Dla poprzednio wymienionych aparatów, a także dla takich układów transportowych, jak rurociągi z przepływem burzliwym, taśmociągi, a w niektórych przypadkach nawet rurowe reaktory chemiczne, mogą być przyjmowane liniowe zależności wynikające z bilansu masy określonego składnika lub bilansów energii, opisujące odchyłki od stanu ustalonego.

2. OGÓLNA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ

Liniowy układ równań różniczkowych dla przyrostów w postaci (1) jest typowy dla szerokiej klasy różnorodnych obiektów, których własności dynamiczne mają duże znaczenie w automatyce przemysłowej

$$R \frac{\partial \Phi}{\partial t} + D \frac{\partial \Phi}{\partial x} = N\Phi + \Gamma w \qquad (1)$$

gdzie:

- R - macierz diagonalna stopnia (n+k) x (n+k), której wszystkie elementy r_{ii} są liczbami rzeczywistymi dodatnimi,
- D - macierz diagonalna stopnia (n+k) x (n+k), w której n pierwszych elementów jest równych +1 lub -1, natomiast k pozostałych elementów na przekątnej jest zerowych,
- N - macierz kwadratowa stopnia (n+k) x (n+k) o elementach rzeczywistych,
- Γ - macierz prostokątna stopnia (n+k) x m o elementach będących liczbami rzeczywistymi lub funkcjami x,
- Φ - wektor kolumnowy (n+k) wymiarowy, którego składowe są funkcjami dwóch wielkości skalarnych: x oraz t. Składowymi tego wektora są w konkretnych przypadkach przyrosty wielkości skalarnych (np. temperatur poszczególnych strumieni materiałowych),
- w - wektor m wymiarowy, którego składowe są funkcjami t,
- x - wielkość skalarna, która jest unormowaną lub względną odległością od umownego początku w stosunku do długości aparatu, stąd:

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

- t - wielkość skalarna, którą jest unormowany czas (tzn. odniesiony do czasu przelotu przez cały aparat l-tego strumienia)

$$t = \frac{\tau}{T_L} \qquad \tau - \text{czas [s]} \qquad T_L = \frac{L}{w_L}$$

- L - całkowita długość aparatu [m]
- w_L - średnia prędkość l-tego strumienia [m/s].

Równanie macierzowe (1) obowiązuje dla:

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{i dla} \quad t \geqslant 0$$

W aparatach technologicznych, jakie omawiano we wstępie, te składowe wektora ϑ będą obrazowały pewną cechę płynącego strumienia płynu (lub materiału sypkiego na taśmie), które są w pierwszych n wierszach, tzn. w tych w których macierz $\mathbf{D}$ ma niezerowe elementy na przekątnej. Pozostałe składowe wektora ϑ będą przedstawiały taką cechę nieruchomej ścianki (lub złoża) w aparacie. W typowych aparatach technologicznych zwykle n jest niewielkie rzędu kilku, natomiast k może być dowolne.

Dla znalezienia transmitancji dla małych przyrostów obiektu automatyzowanego przy zerowych warunkach początkowych

$$\Delta\vartheta_1(x,o) \equiv 0 \quad \text{tzn.} \quad \vartheta(x,o) \equiv 0$$

możemy macierze $\mathbf{R}, \mathbf{D}, \mathbf{N}, \Gamma$ oraz wektory ϑ, $\mathbf{W}$ (macierze kolumnowe) podzielić na podmacierze w sposób jak niżej:

$$\mathbf{R} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_1 & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{R}_2 \end{array}\right]}_{n \quad k} \begin{array}{l} \}\, n \\ \}\, k \end{array} \qquad \mathbf{D} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{D}_1 & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{array}\right]}_{n \quad k} \begin{array}{l} \}\, n \\ \}\, k \end{array} \qquad \mathbf{N} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \hline \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} \end{array}\right]}_{n \quad k} \begin{array}{l} \}\, n \\ \}\, k \end{array}$$

$$\Gamma_{(x)} = \underbrace{\left[\begin{array}{c} \Gamma_1(x) \\ \hline \Gamma_2(x) \end{array}\right]}_{m} \begin{array}{l} \}\, n \\ \}\, k \end{array} \qquad \vartheta = \underbrace{\left[\begin{array}{c} \vartheta_1 \\ \hline \vartheta_2 \end{array}\right]}_{1} \begin{array}{l} \}\, n \\ \}\, k \end{array} \qquad \mathbf{W} = \underbrace{\left[\begin{array}{c} \mathbf{W} \end{array}\right]}_{1} \Big\}\, m$$

Po przeprowadzeniu transformacji Laplace'a-Carsona (względem unormowanego czasu t), tzn.

$$\tilde{F}(p) = p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$$

zamiast równania macierzowego (1) otrzymamy dwa równania macierzowe (2), (3) (dla zerowych warunków początkowych). Wektory w dziedzinie transformat "p" oznaczymy wężykiem (pojedynczym)

$$\mathbf{R}_1 p \tilde{\vartheta}_1(x,p) + \underbrace{\cancel{\mathbf{O} p \tilde{\vartheta}_2(x,p)}}_{=0} + \mathbf{D}_1 \frac{\partial \tilde{\vartheta}_1(x,p)}{\partial x} + \underbrace{\cancel{\mathbf{O} \cdot \frac{\partial \tilde{\vartheta}_2(x,p)}{\partial x}}}_{=0} =$$

$$= \mathbf{N}_{11} \tilde{\vartheta}_1(x,p) + \mathbf{N}_{12} \tilde{\vartheta}_2(x,p) + \Gamma_1(x) \tilde{\mathbf{W}}(p) \qquad (2)$$

$$\underbrace{\cancel{D_p\vartheta_1(x,p)}}_{=0} + R_2p\vartheta_2(x,p) + \underbrace{\cancel{D\frac{\partial\vartheta_1(x,p)}{\partial x}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{D\cdot\frac{\partial\vartheta_2(x,p)}{\partial x}}}_{=0} =$$

$$= N_{21}\vartheta_1(x,p) + N_{22}\vartheta_2(x,p) + \Gamma_2(x)\tilde{W}(p) \tag{3}$$

Z (3) otrzymuje się:

$$\vartheta_2(x,p) = [R_2p-N_{22}]^{-1} N_{21}\vartheta_1(x,p) + [R_2p-N_{22}]^{-1} \Gamma_2(x)\tilde{W}(p) \tag{4}$$

wstawiając (4) do (2) otrzymuje się:

$$\frac{\partial\vartheta_1(x,p)}{\partial x} = A(p)\vartheta_1(x,p) + B(x,p)\tilde{W}(p), \tag{5}$$

gdzie:

$$A(p) = -D_1^{-1}\left\{R_1p - N_{11} - N_{12}\,[R_2p - N_{22}]^{-1} N_{21}\right\} \tag{6}$$

jest to macierz kwadratowa stopnia $n \times n$, której elementami są wielkości operatorowe.

$$B(x,p) = D_1^{-1}\left\{\Gamma_1(x) + N_{12}[R_2p - N_{22}]^{-1}\Gamma_2(x)\right\} \tag{7}$$

jest macierzą prostokątną (ogólnie) stopnia $n \times m$, której elementami są (ogólnie) funkcje operatora p i współrzędnej x, tzn.

$$b_{ij}(x,p)$$

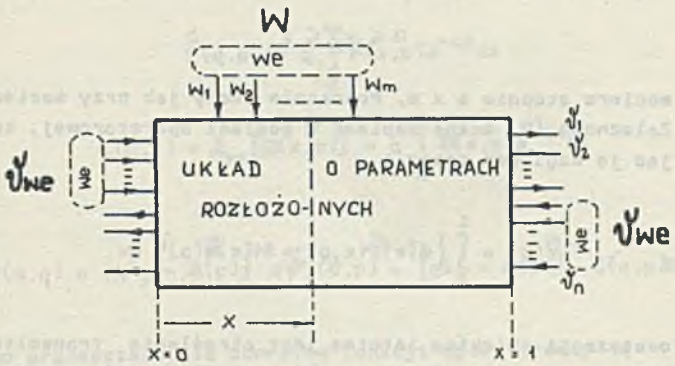
$\vartheta_1(x,p)$ - wektor n wymiarowy.

Zauważmy, że dla k skończonego elementy macierzy A, B są funkcjami wymiernymi p. Jeśli przyjąć rozkład parametrów również w kierunkach prostopadłych do x w ściankach, to dla ścian można uzyskać równanie różniczkowe cząstkowe, które przy odpowiednich warunkach brzegowych prowadziłyby do A, B o elementach, które byłyby funkcjami niewymiernymi względem p. Można również podzielić ścianę poprzecznie do -x, dobierając jednak odpowiednio dużą liczbę warstw.

3. WARUNKI BRZEGOWE I POSTAĆ WYJŚĆ

Aby rozwiązać układ równań (1) oprócz W i warunków początkowych należy jeszcze przyjąć n warunków brzegowych. Warunki te wynikają z możliwych do

narzucenia wielkości sterujących. Dla układu równań (1) będą określone te składowe wektora ϑ dla początku, tzn. x = 0, które odpowiadają elementom równym "+1" macierzy diagonalnej **D** oraz składowe dla końca, tzn. x = 1, które odpowiadają elementom macierzy **D** równym "-1". Jeśli tak określimy warunki brzegowe, to rozwiązanie (1) będzie od tych warunków zależne i realizowalne technicznie.



Rys. 1. Schemat ideowy układu o parametrach rozłożonych

Dla aparatu jak na rysunku 1 można określić wyjście istotne dla automatyzacji, charakteryzujące zmianę (przyrost) jakiejś wielkości. W układach jednowymiarowych jest ona najczęściej bezpośrednio w procesie automatyzowanym mierzona (np. czujnikiem pomiarowym), w procesach wielowymiarowych (wieloparametrowych) wyjście jest zbiorem kilku wielkości mierzonych, a w bardziej złożonych układach wektor wyjścia może być wyliczany z zależności:

$$Y(t) = \int_0^1 \left\{ G(x)\vartheta(x,t) + H(x)W(t) \right\} dx \qquad (8)$$

Postać zależności jest dość ogólna dla takich przypadków jak omawiane we wstępie, przy czym:

- $Y(t)$ - wektor s-wymiarowy, którego składowymi są przyrosty określonych wielkości w układzie, będące funkcjami wielkości skalarnej t (unormowanego czasu),
- $G(x)$ - macierz stopnia s x (n+k), której elementami są wielkości rzeczywiste (stałe) lub funkcje wielkości skalarnej x. W szczególnym przypadku elementami macierzy $G(x)$ mogą być funkcje Diraca np. $g_{ij}(x) = \delta(x-x_1)$, wtedy jako składową wielkości $Y(t)$ otrzymujemy $\vartheta_j(x_1,t)$, bo

$$\int_0^1 \delta(x-x_1)\vartheta_j(x,t)dx = \vartheta_j(x_1,t),$$

jeśli $0 < x_1 < 1$, czyli wartość ϑ_j w punkcie o współrzędnej $x = x_1$. Jeśli przyjmiemy, że w zapisie (8) całkować będziemy od "0^-", tzn. z włączeniem wartości 0, do "1^+", tzn. z włączeniem wartości 1, wówczas można przyjąć, że:

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 1$$

$H(x)$ - macierz stopnia s x m. Pozostałe cechy jak przy macierzy $G(x)$. Zależność (8) można zapisać w postaci operatorowej, transformując ją względem czasu t

$$\tilde{Y}(p) = \int_0^1 \left\{ G(x)\tilde{\vartheta}(x,p) + H(x)\tilde{W}(p) \right\} dx \tag{9}$$

Dla automatyzacji obiektów istotne jest określenie transmitancji operatorowej pomiędzy danym wejściem a wyjściem. Dla wyjść opisanych zależnością (9) można wyznaczyć dwie macierze transmitancji $F_\vartheta(p)$ i $F_w(p)$, gdzie: $F_\vartheta(p)$ macierz stopnia s x n, której elementami są funkcje p, $F_w(p)$ - macierz stopnia s x m, której elementami też są funkcje operatorowe. Obowiązuje więc następujące równanie macierzowe:

$$\tilde{Y}(p) = F_\vartheta(p)\tilde{\vartheta}_{1wm}(p) + F_w(p)\tilde{W}(p) \tag{10}$$

Jeśli w miejsce p wstawić $j\omega$

ω - pulsacja bezwymiarowa ($\Omega T_L = \omega$),
Ω - pulsacja [rd/s],

otrzymamy macierze charakterystyk amplitudowo-fazowych.
Takie charakterystyki byłyby nieprzydatne do wykorzystania przy projektowaniu układów automatycznej regulacji, jeśli nie wiedzielibyśmy czy układ ma (i ewentualnie ile) bieguny w prawej półpłaszczyźnie p. Dlatego też należy:

1. Określić czy są (a jeśli tak, to ile) bieguny w prawej półpłaszczyźnie p. Dla większości aparatów omawianych poprzednio (z wyjątkiem reaktorów chemicznych) z innych przesłanek, np. energetycznych wynika, że układ nie ma biegunów w prawej półpłaszczyźnie.
2. Wyznaczyć w oparciu o wzór (10) charakterystyki amplitudowo-fazowe. Zależności F są zwykle dość złożone i praktycznie mogą być wyznaczane numerycznie.

4. PROCEDURA WYZNACZENIA $\mathbf{F}_v$ I $\mathbf{F}_w$

Jeśli dokonać transformacji Laplace'a-Carsona względem x równania macierzowego (5), wprowadzając q jako operator zmiennej x otrzymamy:

$$q\tilde{\tilde{\vartheta}}_1(q,p) - q\tilde{\vartheta}_1(0,p) = \mathbf{A}(p)\tilde{\tilde{\vartheta}}_1(q,p) + \mathbf{C}(q,p)\tilde{\tilde{\mathbf{W}}}(p),$$

gdzie:

$$\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}(q,p) = q\int_0^\infty \tilde{\mathbf{F}}(x,p)e^{-qx}dx$$

$$\mathbf{C}(q,p) = \mathcal{L}_{cx}[\mathbf{B}(x,p)] = q\int_0^\infty \mathbf{B}(x,p)e^{-qx}dx$$

Stąd:

$$\tilde{\tilde{\vartheta}}_1(q,p) = [q\mathbf{1}_n - \mathbf{A}(p)]^{-1}q\tilde{\vartheta}_1(0,p) + [q\mathbf{1}_n - \mathbf{A}(p)]^{-1}\mathbf{C}(q,p)\tilde{\tilde{\mathbf{W}}}(p) \qquad (11)$$

A stosując przekształcenie odwrotne funkcji operatorowej q

$$\tilde{\vartheta}_1(x,p) = \Phi(x,p)\tilde{\vartheta}_1(0,p) + \Psi(x,p)\tilde{\tilde{\mathbf{W}}}(p) \qquad (12)$$

Przy czym:

$$\Phi(x,p) = \mathcal{L}_{cx}^{-1}\left\{[q\mathbf{1}_n - \mathbf{A}(p)]^{-1}q\right\} \quad \text{- macierz stopnia } n \times n$$

$$\Psi(x,p) = \mathcal{L}_{cx}^{-1}\left\{[q\mathbf{1}_n - \mathbf{A}(p)]^{-1}\mathbf{C}(q,p)\right\} \quad \text{- macierz stopnia } n \times m$$

Jeśli w macierzy $\Phi(x,p)$ podstawimy $x = 0$, w elementach tych jej wierszy, dla których jest w macierzy $\mathbf{D}_1$ wyraz równy "+1", a $x = 1$ w elementach tych wierszy macierzy $\Phi(x,p)$, dla których jest w macierzy $\mathbf{D}_1$ wyraz "-1", otrzymamy $\Phi_a(p)$. Podobnie powstaje $\Psi_a(p)$. Z warunku brzegowego otrzymamy:

$$\tilde{\vartheta}_{1wo}(p) = \Phi_a(p)\tilde{\vartheta}_1(0,p) + \Psi_a(p)\tilde{\tilde{\mathbf{W}}}(p)$$

Stąd wyznaczamy warunki na początku aparatu (warunki brzegowe zmodyfikowane)

$$\tilde{\vartheta}_1(0,p) = \Phi_a^{-1}(p)\tilde{\vartheta}_{1wo}(p) - \Phi_a^{-1}(p)\Psi_a(p)\tilde{\tilde{\mathbf{W}}}(p)$$

wstawiając ostanią zależność do (12) otrzymuje się ostatecznie

$$\tilde{\vartheta}_1(x,p) = \Phi(x,p)\,\Phi_a^{-1}(p)\tilde{\vartheta}_{1w0}(p) + \left[\Psi(x,p) - \Phi(x,p)\,\Phi_a^{-1}(p)\,\Psi_a(p)\right]\tilde{W}(p) \tag{13}$$

Podstawiając (13) do (9), korzystając z (4) otrzymuje się:

$$F_{\vartheta}(p) = \int_0^1 G(x)Q(p)\Phi(x,p)\,\Phi_a^{-1}(p)dx, \tag{14}$$

gdzie:

$$Q(p) = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_1 \\ \hline Q_2 \end{bmatrix}}_{n}\begin{matrix}\}\,n \\ \}\,k\end{matrix} \qquad Q_1 = 1_n$$

$$Q_2 = \left[R_2 p - N_{22}\right]^{-1} N_{21}$$

$$\tilde{\vartheta}(x,p) = Q(p)\tilde{\vartheta}_1(x,p) + S(p,x)\tilde{W}(p)$$

$$S(x,p) = \underbrace{\begin{bmatrix} S_1 \\ \hline S_2 \end{bmatrix}}_{m}\begin{matrix}\}\,n \\ \}\,k\end{matrix} \qquad S_1 = 0_{n\times m}$$

$$S_2(x,p) = \left[R_2 p - N_{22}\right]^{-1}\Gamma_2(x)$$

$$F_w(p) = \int_0^1 \Big(G(x)\Big\{Q(p)\left[\Psi(x,p) - \Phi(x,p)\,\Phi_a^{-1}(p)\,\Psi_a(p)\right] + S(x,p)\Big\} + H(x)\Big)dx \tag{15}$$

Jak wykazano wyznaczenie transmitancji (macierzowej) przy danym równaniu (1) i określeniu wyjść w postaci (9) jest możliwe i macierze transmitancji dane są równaniami (14) i (15). (Odwracane macierze dla interesujących nas przypadków są nieosobliwe).

Szczególnie często spotykamy aparaty dla $n = 2$.

I. Dla $n = 2$ jest możliwe określenie poszczególnych transmitancji w postaci analitycznej.

II. Dla $n = 3$ istnieje również możliwość wyznaczenia transmitancji w postaci analitycznej. Pierwiastki równania charakterystycznego można

wyznaczyć w oparciu o wzór Cardana. Zależności nie są już tak przejrzyste.

III. Dla $n = 4$ istnieje jeszcze możliwość wzorów ogólnych (wzory Gaussa dla pierwiastków równania algebraicznego 4 stopnia), jednak jest to praktycznie nieopłacalne.

IV. Dla $n > 4$ charakterystyki można wyznaczyć numerycznie, bez wzorów ogólnych, iteracyjnie wyznaczając pierwiastki równania charakterystycznego (w tym przypadku można przypuszczać, że wygodniej jest iteracyjnie rozwiązywać cały układ równań).

Warto tu przytoczyć jedną ważną uwagę praktyczną: już dla $n \geq 2$ w transmitancjach operatorowych występować mogą człony typu

$$e^{\sqrt{f_1(p)}}.$$

Dla $n = 2$ przy różnych pierwiastkach równania charakterystycznego ogólną postacią rozwiązania jest:

$$C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

gdzie k_1, k_2 - pierwiastki równania charakterystycznego.
Jeśli równanie charakterystyczne ma postać:

$$a_0(p) + a_1(p)q + a_2(p)q^2 = 0,$$

to

$$k_{1,2} = q_{1,2} = \frac{-a_1(p) \pm \sqrt{[a_1(p)]^2 - 4a_0(p)a_2(p)}}{2\,a_2(p)}$$

Jeśli uświadomimy sobie, że podstawiając $p = j\omega$ powstaje problem: który z pierwiastków wstawić do danej zależności (poszczególne maszyny cyfrowe ze swoimi programami standardowymi mogą w różnych zakresach różnie traktować pierwiastki), to najwygodniej starać się tak przekształcić zależności, aby występowały w postaci kombinacji funkcji <u>parzystych względem tego parametru pierwiastkowego</u>, np.

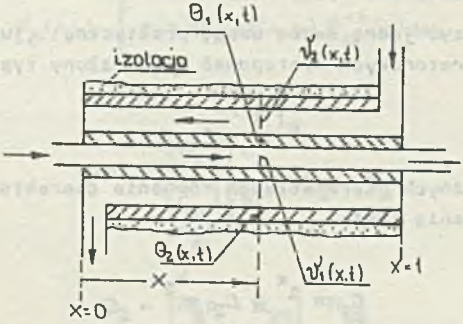
$$u = \frac{\mathrm{sh}\sqrt{f_1(p)}}{\sqrt{f_1(p)}} \quad \text{lub} \quad u = \mathrm{ch}\sqrt{f_1(p)} \quad \text{itp.}$$

Wtedy sprowadzając do programu "u" nie ma obaw o niewłaściwe potraktowanie przez program maszynowy obliczenia danego punktu charakterystyki amplitudowo-fazowej.

5. PRZYKŁADY

Przykład 1

Dla wymiennika ciepła rurowego jak na rysunku 2(przeciwprądowego) dość powszechnie przyjmuje się model w postaci układu równań (16). Pierwszy taki zapis wprowadził Y. Takahashi [6] w 1952 r.



Rys. 2. Schemat ideowy przeciwprądowego rurowego wymiennika ciepła

W pracach [4], [5] uwzględniono jeszcze zmiany przepływu. Aby nie komplikować zbytnio, w tym przykładzie uwzględnia się tylko zmiany temperatur wlotowych jako jedyne wielkości wejściowe. Otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\vartheta_1}{\partial t}+\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x}+a_1(\vartheta_1-\theta_1)=0\\
&r\frac{\partial\vartheta_2}{\partial t}-\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}+a_2(\vartheta_2-\theta_1)+a_3(\vartheta_2-\theta_2)=0\\
&\frac{\partial\theta_1}{\partial t}+b_1(\theta_1-\vartheta_1)+b_2(\theta_1-\vartheta_2)=0\\
&\frac{\partial\theta_2}{\partial t}+b_3(\theta_2-\vartheta_2)=0
\end{aligned}\right\}\qquad(16$$

gdzie: a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, r - wielkości bezwymiarowe (liczby kryterialne podobieństwa wymienników).

Równania (16) powstają z równań bilansowych energii dla elementarnego wycinka "dx" [4], [5]. Jest to układ równań o postaci (1)

$$R=\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&r&0&0\\\hline 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}R_1&0\\\hline 0&R_2\end{array}\right],\qquad D=\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\\hline 0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}D_1&0\\\hline 0&0\end{array}\right]$$

$$N = \left[\begin{array}{cc|cc} -a_1 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & -(a_2+a_3) & a_2 & a_3 \\ \hline b_1 & b_2 & -(b_1+b_2) & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & -b_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} N_{11} & N_{12} \\ \hline N_{21} & N_{22} \end{array}\right]$$

Jeśli pominąć zmiany w

$$W = 0; \quad \Gamma(x) = 0$$

$$\vartheta = \left[\begin{array}{c} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \hline \theta_1 \\ \theta_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \vartheta_1 \\ \hline \vartheta_2 \end{array}\right]$$

Jeśli interesowałyby nas temperatury wylotowe, to:

$$\tilde{Y}(p) = \begin{bmatrix} \vartheta_1(1,p) \\ \vartheta_2(0,p) \end{bmatrix} \qquad H = 0; \quad G(x) = \begin{bmatrix} \delta(x-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta(x-0) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jeśli:

$$\tilde{\vartheta}_{1we}(p) = \begin{bmatrix} \vartheta_{1we}(p) \\ \vartheta_{2we}(p) \end{bmatrix},$$

to otrzymuje się [5]:

$$F_v(p) = \begin{bmatrix} \frac{e^A}{M_1} & \frac{a_{12}}{M_2} \\ -\frac{a_{21}}{M_2} & \frac{e^{-A}}{M_1} \end{bmatrix}$$

$$B = \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}a_{21}}$$

$$a_{12} = \frac{a_1 b_2}{p + b_1 + b_2}; \quad a_{21} = -\frac{a_2 b_1}{p + b_1 + b_2};$$

gdzie:

$$A = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}$$

$$M_1 = (A-a_{11})\frac{shB}{B} + chB$$

$$M_2 = (A-a_{11}) + B\,cth\,B$$

$$a_{11} = -(p + a_1 - \frac{a_1 b_1}{p+b_1+b_2})$$

$$a_{22} = rp + a_2 - \frac{a_2 b_2}{p+b_1+b_2} + a_3 - \frac{a_3 b_3}{p+b_3}$$

Przykład 2

Dla przykładu 1, jeśli interesowałaby nas np. całkowita ilość ciepła przepływająca z rury wewnętrznej do czynnika 1 (o temperaturze ϑ_1), to macierz

$$G(x) = [?]$$

można określić na podstawie zależności:

$$Q^* = \int_0^L \frac{\alpha_1 F_1}{L}(\theta_1 - \vartheta_1)d\xi = \int_0^1 \alpha_1 F_1(\theta_1 - \vartheta_1)dx,$$

zatem:

$$H(x) = 0$$

$$G(x) = [-\alpha_1 F_1 \quad 0 \quad \alpha_1 F_1 \quad 0]$$

$G(x)$ - macierz wierszowa (1x4),

α_1 - współczynnik wnikania ciepła między czynnikiem 1 a rurą wewnętrzną $\left[\frac{J}{m^2 eK}\right]$,

F_1 - całkowita powierzchnia wymiany ciepła między rurą wewnętrzną a czynnikiem 1 $[m^2]$:

$$F_1 = \pi d_1 L$$

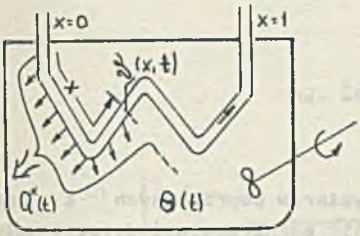
d_1 - średnica wewnętrzna rury [m],

L - długość wymiennika [m].

Warto również zauważyć, że transmitancje z przykładu 1 są parzystymi funkcjami argumentu B.

Przykład 3

Niekiedy wymiennik ciepła stanowi fragment bardziej rozbudowanego układu technologicznego, np. reaktora chemicznego z doskonałym mieszaniem. Taki problem jest rozpatrywany w pracy [7].



Rys. 3. Schemat ideowy wężownicy grzewczej reaktora

Jeśli pominąć pojemność cieplną rury, to dla wężownicy grzejnej dla takiego aparatu wynika następujące równanie:

$$\frac{\partial\vartheta(\xi,\tau)}{\partial\tau} + w_L\frac{\partial\vartheta(\xi,\tau)}{\partial\xi} + \frac{k\cdot F}{S\varrho c L}\left[\vartheta(\xi,\tau) - \Theta(\tau)\right] = 0, \tag{17}$$

gdzie τ - czas [s], w_L - prędkość w rurze [m/s], ξ - współrzędna wzdłuż rury [m], k - współczynnik przechodzenia ciepła pomiędzy czynnikiem grzewczym a wsadem reaktora $\left[\frac{J}{sm^2K}\right]$. Wprowadzając nowe zmienne jak poprzednio otrzyma się równanie:

$$\frac{\partial\vartheta(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial\vartheta(x,t)}{\partial x} + a\left[\vartheta(x,t) - \Theta(t)\right] = 0$$

$$x = \frac{\xi}{L}, \quad t = \frac{\tau}{T_L}; \quad T_L = \frac{L}{w_L}; \quad S = \frac{\pi d^2}{4}$$

przy czym:

d - średnica rury [m],

ϱ - gęstość czynnika grzewczego (kg/m^3),

c - ciepło właściwe $\left[\frac{J}{kgK}\right]$.

$$a = \frac{k\cdot F}{S\varrho c w_L} = \frac{kF}{M^* c}$$

$$F = \pi d L \quad [m^2]$$

$$M^* = S\varrho w_L$$

L - długość wężownicy [m],

M^* - przepływ masowy $\left[\frac{kg}{s}\right]$.

Równanie jest jednowymiarowe

$$R = 1 \quad D = 1 \quad N = -a \quad \Gamma(x) = a \quad w = \Theta(t) \quad \Phi = \vartheta(x,t)$$

Jako wyjście tego fragmentu przyjmujemy

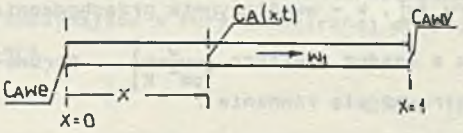
$$Q^*(t) = \int_0^1 kF\left[\vartheta(x,t) - \theta(t)\right] dx,$$

więc:

$$G(x) = kF \qquad H(x) = -kF$$

Przykład 4

Dla rury o dużym stosunku długości do wymiarów poprzecznych i przy przepływie silnie turbulentnym ($Re > 10^5$) [1] można pominąć dyfuzję wzdłużną. Z bilansu masy A dla elementarnego wycinka otrzymuje się równanie (przy stałej prędkości W_1):



$$\frac{\partial \Delta CA(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \Delta CA(x,t)}{\partial x} = 0 \qquad (18)$$

Rys. 4. Rurociąg z przepływem o zmiennym stężeniu składnika A

gdzie:

L - całkowita długość rury [m],

W_1 - prędkość średnia [m/s],

$x = \frac{\xi}{L}$ [/],

ξ - współrzędna długości [m],

$\Delta CA(x,t)$ - przyrost stężenia składnika A $\left[\frac{kgA}{m^3}\right]$.

Jest to równanie typu (1) jednowymiarowe.

Rozpatrzmy 2 przypadki wielkości wyjściowej:

I. Chcemy określić funkcję przejścia $F_1(p)$ zmian stężenia $\Delta CA(1,p)$ na końcu od zmian stężenia na wlocie $\Delta\tilde{C}_{Awe}(p)$.

II. Chcemy określić funkcję przejścia $F_2(p)$ - zmian zasobu masy składnika A w całej rurze $\Delta\tilde{M}_{AC}(p)$ od zmian stężenia: $\Delta\tilde{C}_{Awe}(p)$. Można obie te funkcje przejścia ująć w jednej funkcji macierzowej (macierz kolumnowa)

$$F_V(p) = \begin{bmatrix} F_1(p) \\ F_2(p) \end{bmatrix}$$

Dla tego przypadku

$$G(x) = \begin{bmatrix} \delta(x-1) \\ V \end{bmatrix}$$

gdzie

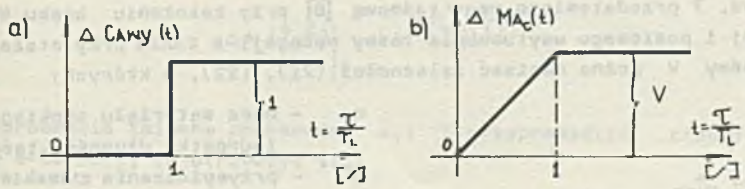
$$V = \frac{\pi d^2}{4} L$$

d - średnica wewnętrzna rury [m],
V - objętość cieczy w rurze [m^3].

Otrzymuje się:

$$F_1(p) = e^{-p} \tag{19}$$

$$F_2(p) = \frac{V}{p}\,(1 - e^{-p}) \tag{20}$$

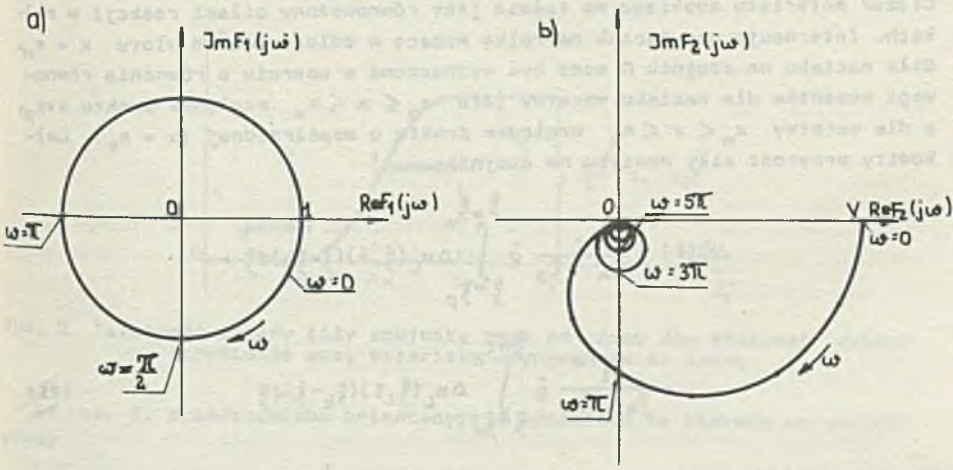


Rys. 5.

a) Zmiana stężenia na końcu rury, b) Zmiana masy składnika A w rurze

Na rys. 5 przedstawiono odpowiedzi na skokową zmianę stężenia na wlocie: a) stężenia na wylocie, b) przyrostu masy składnika A w całej rurze.

Na rys. 6 przedstawiono orientacyjne kształty charakterystyk amplitudowo-fazowych $F_1(j\omega)$ i $F_2(j\omega)$.



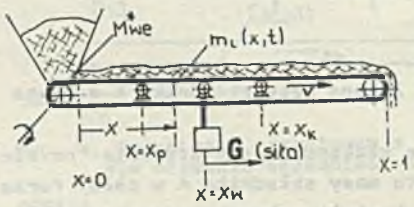
Rys. 6.

a) charakterystyka amplitudowo-fazowa zmian stężenia składnika A na wylocie od zmian stężenia na wlocie, b) charakterystyka amplitudowo-fazowa zmian masy składnika A w rurze od zmian stężenia na wlocie

Warto zauważyć, że występujące w postaci jawnej p w mianowniku funkcji przejścia $F_2(p)$ nie jest biegunem. Można powiedzieć, że jest to biegun pozorny, gdyż dla dowolnych parametrów układu zawsze wystąpi identyczna "zero" w liczniku. Układ opisany funkcją przejścia $F_2(p)$ nie jest zatem układem astatycznym (widać to zarówno na rys. 5b jak i 6b). W tym przypadku pojawienie się w funkcji przejścia p w mianowniku jest wynikiem całkowania w skończonych granicach (od x=o do x=1) wyrażenia operatorowego i zależnego od x.

Przykład 5

Na rys. 7 przedstawiono wagę taśmową [8] przy założeniu braku dyfuzji wzdłużnej i poziomego usytuowania taśmy ważącej, a także przy stałej prędkości taśmy V można napisać zależności (21), (22), w których:



Rys. 7. Schemat ideowy wagi taśmowej

m_L - masa materiału sypkiego na jednostkę długości taśmy $\left[\frac{kg}{m}\right]$,

$\bar{g}$ - przyspieszenie ziemskie $[m/s^2]$

v - prędkość taśmy $[m/s]$,

ΔM^*_{we} - przyrost strumienia masy na wlocie (x=0) $[kg/s]$,

L_c - całkowita długość taśmy $[m]$,

$x = \frac{\xi}{L_c}$; $t = \frac{\tau}{T_L}$; $T_L = \frac{L_c}{v}$ $[s]$,

ξ - współrzędna długości $[m]$,

τ - czas $[s]$.

Ciężar materiału sypkiego na taśmie jest równoważony siłami reakcji w rolkach. Interesuje nas nacisk na rolkę ważącą w odległości od wlotu $x = x_w$. Siła nacisku na czujnik G może być wyznaczona w oparciu o równanie równowagi momentów dla nacisku warstwy (dla $x_p \leqslant x \leqslant x_w$ względem punktu $x=x_p$, a dla warstwy $x_w \leqslant x \leqslant x_k$ względem punktu o współrzędnej $(x = x_k)$. Całkowity przyrost siły nacisku na czujnik:

$$\Delta G(\tau) = \frac{1}{\xi_w - \xi_p}\,\bar{g}\int_{\xi=\xi_p}^{\xi=\xi_w} \Delta m_L(\xi,\tau)(\xi-\xi_p)d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\xi_k - \xi_w}\,\bar{g}\int_{\xi=\xi_w}^{\xi=\xi_k} \Delta m_L(\xi,\tau)(\xi_k-\xi)d\xi \qquad (21)$$

Dla taśmy z bilansu masy na taśmie otrzymamy:

$$v\frac{\partial\Delta m_L(\xi,\tau)}{\partial\xi} + \frac{\partial\Delta m_L(\xi,\tau)}{\partial\tau} = 0 \qquad (22)$$

dla $\tau = 0$

$$\Delta m_L(\xi, 0) = 0$$

gdzie:

$\Delta m_L(\xi, \tau)$ - przyrost ponad stan początkowy masy na jednostkę długości taśmy [kg/m],

dla $\xi = 0$ zachodzi

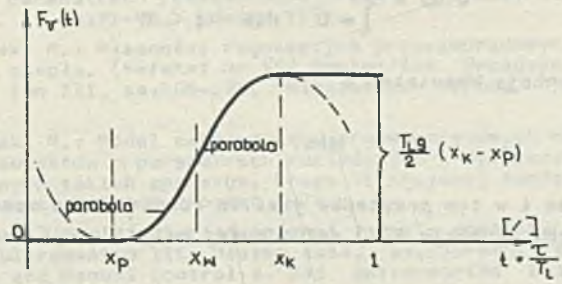
$$\Delta m_L(\xi, \tau)\Big|_{\xi=0} = \frac{\Delta M^*_{we}(\tau)}{v}$$

Jeśli wprowadzić zmienne unormowane x,t i przeprowadzić transformację Laplace'a-Carsona, to otrzymuje się:

$$\frac{\Delta\tilde{G}(p)}{\Delta\tilde{M}^*_{we}(p)} = \frac{L_e\bar{g}}{v}\left[\frac{1}{x_w - x_p}\int_{x_p}^{x_w} e^{-px}(x - x_p)dx + \frac{1}{x_k - x_w}\int_{x_w}^{x_k} e^{-px}(x_k - x)dx\right]$$

$$F_v(p) = \frac{\Delta\tilde{G}(p)}{\Delta\tilde{M}^*_{we}(p)} = \frac{T_L\bar{g}}{p^2}\left[\frac{e^{-px_p} - e^{-px_w}}{x_w - x_p} - \frac{e^{-px_w} - e^{-px_k}}{x_k - x_w}\right], \qquad (23)$$

gdzie: p - operator transformacji α-C bezwymiarowego (unormowanego) czasu



Rys. 8. Zależność zmiany siły czujnika wagi od czasu dla skokowej zmiany strumienia masy materiału wsypywanego na taśmę

Na rys. 8. przedstawiono orientacyjnie odpowiedź na skokową zmianę dopływu

$$\Delta M^*_{we}(t) = 1(t) = U(t)$$

Warto zwrócić uwagę, że również występujący w mianowniku funkcji przejścia (23) człon (operator) p^2 nie jest biegunem (podwójnym) dla p=0, gdyż dla dowolnych zmian parametrów układu (np. x_w, x_k itp.) w liczniku jest zawsze odpowiadające mu (podwójne) "zero". Układ zatem nie jest układem astatycznym. Zależność (1) w tym przypadku stanowi układ jednowymiarowy

$$R = 1 \qquad D = 1 \qquad N = 0 \qquad \Gamma = 0 \qquad \Psi = \Delta m_L(x,t)$$

$$\Psi_{WG} = \frac{\Delta M^*_{we}(t)}{v} \qquad W = 0$$

Jeśli przyjęć: $Y(t) = \Delta G(t)$ i ogólną postać

$$Y(t) = \int_0^1 [G(x)\Psi(x,t) + H(x)W(t)]\,dx,$$

to otrzymuje się:

$$G(x) = L_c \bar{g} \left\{ \frac{x-x_p}{x_w-x_p} [U(x-x_p) - U(x-x_w)] + \right.$$

$$\left. + \frac{x_k-x}{x_k-x_w} [U(x-x_w) - U(x-x_k)] \right\}$$

gdzie

$$U(\alpha) = \begin{cases} = 1 & \text{dla } \alpha > 0 \\ = 0 & \text{dla } \alpha < 0 \end{cases}$$

jest to tzw. funkcja Heaviside'a

$$H(x) = 0.$$

Widzimy więc, że i w tym przypadku jest to również taka sama klasa układów dynamicznych. (Funkcja G(x) pełni tutaj rolę funkcji wagowej pod całkę względem x).

6. ZAKOŃCZENIE I WNIOSKI

Jak widać chociażby z przytoczonych przykładów różnorodne obiekty mogą być w podobny sposób traktowane i można podobnie wyznaczać ich własności dynamiczne.

W naszym ośrodku badania dynamiki takich układów o parametrach rozłożonych, zapoczątkowane pracami Z. Trybalskiego [9], [10] dla wymienników

ciepła i kontynuowane i rozwijane przez R. Krzyżanowskiego [11] dla przegrzewacza pary i pracami uogólniającymi [12], [13], [5], [3], [7] na pewne klasy aparatów wymiany ciepła, stwarzają dalsze możliwości zastosowania podobnego podejścia w niektórych innych aparatach. (Na przykład prace [14], [15], [16] J. Kuźnika i R. Krzyżanowskiego dotyczące badania dynamiki aparatów wymiany masy (kolumn rektyfikacyjnych, destylacyjnych) lub [17] M. Metzgera dla pewnych specyficznych wymienników, jak piec obrotowy i rusztowy chłodnik są tego najlepszym dowodem. Wydaje się, że największe możliwości ciekawej i płodnej problematyki badawczej kryją się w analizie dynamiki konkretnych typów przemysłowych aparatów technologicznych,w których to aparatach ich fragmenty będą mogły być traktowane jak układy opisane równaniem (1). Poznanie warunków, przy spełnieniu których dany aparat technologiczny może być fragmentami opisany takimi równaniami,oparte o zależności fizyczne i potwierdzone pomiarami, a także zakończone przygotowaniem programów do obliczeniowego wyznaczania całości dynamiki takich aparatów może mieć duże znaczenie praktyczne.

7. LITERATURA

[1] Krzyżanowski R.: Aproksymacja własności dynamicznych rurociągu przy zmianach stężenia. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. "Automatyka", z.16, Gliwice 1970, ss.51-68.

[2] Krzyżanowski R.: Uwagi o niektórych układach o parametrach rozłożonych. Referat Nr 116 Seminarium Urządzeń i Układów Automatyki, Gliwice 1974.

[3] Krzyżanowski R.: Transformacja $F = \exp(1-f^{-1})$ jako związek między transmitancjami układów o parametrach skupionych a transmitancjami układów o parametrach rozłożonych. Prace V Krajowej Konferencji Automatyki, t. 1, ss.91-98, Gdańsk 1971.

[4] Krzyżanowski R.: Własności regulacyjne przeciwprądowych rurowych wymienników ciepła. (Referat Nr 35) Seminarium Urządzeń i Układów Automatyki, tom III, ss.105-125, Biblioteka Główna Pol. Śl. Gliwice 1971.

[5] Krzyżanowski R.: Model matematyczny przeciwprądowych wymienników ciepła jako obiektów o parametrach rozłożonych i wyznaczanie własności regulacyjnych takich aparatów. Prace VI Krajowej Konferencji Automatyki t. I, ss.326-340, Poznań 1974.

[6] Takahashi Y.: Analiz pieriedatocznej funkcji processa tiepłoobmiena. Awtom Regulirowanije IIL. Moskwa 1954, ss.230-240, tłumaczenie z: Automatic and Manual Control s. 235 Butterworths Scientific Publishers London 1952.

[7] Krzyżanowski R.: Analiza dynamiki pewnych typów obiektów o parametrach rozłożonych. Prace VII Krajowej Konferencji Automatyki t.I,ss. 253-260, Rzeszów 1977.

[8] Krzyżanowski R.: Dynamika procesu ważenia przy użyciu wagi taśmowej. Referat Nr 277 Seminarium Urządzeń i Układów Automatyki(wygł. 24.V. 1980). Gliwice 1980.

[9] Trybalski Z.: Studium nad własnościami regulacyjnymi przeciwprądowego wymiennika ciepła ze zmianą przepływu jednego z mediów.Praca doktorska.Politechnika Śląska, Gliwice 1960.

[10] Trybalski Z.: Zarys ogólnej metody doboru regulacyjnie optymalnego aparatu wymiany ciepła oraz jego zastępczej uproszczonej funkcji przejścia. Praca habilitacyjna. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., z. 2, Gliwice 1962.

[11] Krzyżanowski R.: Metoda wyznaczenia własności dynamicznych grubościennych przegrzewaczy pary. Praca doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice 1965.

[12] Krzyżanowski R.: Metoda wyznaczania charakterystyk amplitudowo-fazowych pewnego typu obiektów o parametrach rozłożonych. Prace IV Krajowej Konferencji Automatyki t. 1, ss.215-232, Kraków 1967.

[13] Krzyżanowski R.: Transformacja $F-\exp(1-f^{-1})$ i jej zastosowanie do wyznaczania własności dynamicznych obiektów cieplnych o parametrach rozłożonych. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., Ser. "Automatyka", z. 14, ss. 157-178, Gliwice 1969.

[14] Kuźnik J., Krzyżanowski R.: Obliczeniowe wyznaczanie własności dynamicznych uproszczonych modeli kolumn rektyfikacyjnych. Inż. i Apar. Chem. R. 13 (1974) Nr 1, ss.12-16.

[15] Kuźnik J., Krzyżanowski R.: Numeryczne wyznaczenie własności dynamicznych kolumny rektyfikacyjnej i próba pomiarowej weryfikacji modelu kolumny. Inż. i Apar. Chem. R. 14 (1975) nr 5, ss.23-28.

[16] Krzyżanowski R.: Wyznaczanie własności dynamicznych dla niektórych przypadków kolumn destylacyjnych. "Seminarium Urządzeń i Układów Automatyki" Ref. nr 90 t. VII Biblioteka Główna Pol. Śl. ss.141-172, Gliwice 1973.

[17] Metzger M.: Analiza własności dynamicznych procesu wypalania klinkieru. Praca doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice 1977.

Recenzent: Doc. dr inż. Maria Jastrzębska

Wpłynęło do Redakcji: lipiec 1983 r.

ДИНАМИКА НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Р е з ю м е

В статье приводится алгоритм определения динамических свойств некоторого класса систем с распределёнными параметрами. Этот класс описывается специфическими дифференциальными уравнениями. К нему относятся некоторые промышленные объекты с протоком материальной струи, когда можно пренебречь продольной диффузией и считать их как линейные системы.

DYNAMIC PROPERTIES OF A CLASS OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS

S u m m a r y

In this paper a procedure for assesment of dynamic properties of the chosen class of distributed parameter systems is described. Such a class of equations describes some industrial plants with mass flow when the axial diffusion may be neglected and they are treated as linear plants.