ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: AUTOMATYKA z. 73 Nr kol. 798

Franciszek MARECKI

BALANSOWANIE LINII MONTAŻOWEJ Z ENKLAWAMI OPERACJI

Streszczenie. W pracy przedstawiono model linii montażowej z enklawami operacji. Wyróżniono enklawy podzielne oraz niepodzielne. Ponadto przedyskutowano grupowanie operacji należących i nienależących do enklawy. Sformułowany problem balansowania linii montażowej rozwiązano algorytmem podziału i ograniczeń. Opisano reguły wyboru i reguły eliminacji stanów.

1. WPROWADZENIE

Problem balansowania linii montażowej został sformułowany przez Salvesona [16, 17]. Istota tego problemu polega na wyznaczeniu minimalnej liczby stanowisk pracy na linii, przy założeniu że dane są: zbiór operacji, czasy operacji i ograniczenia kolejnościowe ich wykonania, a ponadto wymuszony jest cykl. Cykl procesu montażu jest czasem, po którym z linii montażowej schodzi kolejny obiekt. Opis montażu przedstawiony w [16, 17] zawiera liczne ograniczenia czasowe, przestrzenne i logiczne. Jednakże z uwagi na trudności obliczeniowe rozważano jedynie uproszczony model.

Liczne prace z dziedziny balansowania linii montażowej można podzielić na dwie grupy. Do pierwszej należą publikacje przedstawiające produkcyjne linie montażowe z różnorodnymi ograniczeniami. Niektóre z tych prac [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 16, 17, 19] dotyczą modeli linii z ograniczeniami grupowania operacji na stanowiskach pracy. Do rozwiązania problemu balansowania w tych złożonych modelach wykorzystywane są algorytmy heurystyczne. Druga grupa publikacji przedstawia różne algorytmy optymalnego rozwiązania abstrakcyjnego problemu balansowania linii montażowej [15, 18]. W problemie takim uwzględnia się tylko ograniczenia kolejnościowe.

W niniejszej pracy zostanie rozważony model linii montażowej z podzielnymi oraz niepodzielnymi enklawami operacji. Dla optymalnego rozwiązania problemu balansowania zostanie przedstawiony algorytm podziału i ograniczeń [9, 12, 13].

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

W problemie balansowania linii montażowej zakłada się zwykle, że dany jest zbiór operacji, w którym nie wyróżnia się żadnych podzbiorów. Obecnie rozważymy przypadek występowania enklaw operacji. Enklawa jest podzbiorem zbioru operacji. Operacje należące do enklawy muszą być wykonane w sekwencji, która nie zawiera innych operacji.

Na liniach montażowych występują dwa typy enklaw: podzielne oraz niepodzielne. Operacje należące do enklawy podzielnej mogą być wykonane przez różnych monterów na kolejnych stanowiskach. W przypadku enklawy niepodzielnej wszystkie należące do niej operacje są wykonywane przez jednego montera. A więc nie wyróżniamy podzbiorów operacji w ramach enklawy. Jeżeli suma czasów operacji należących do enklawy niepodzielnej jest większa od cyklu, to monter pracuje na kilku kolejnych stanowiskach pracy. W balansowaniu linii montażowej enklawa niepodzielna jest traktowana jako jedna operacja, której czas może być większy od cyklu. Jeżeli czas enklawy niepodzielnej jest większy niż cykl, to monter pracuje na kilku kolejnych stanowiskach podstawowych, zwanych stacjami montażowymi. Powstaje wówczas tzw. wielokrotne stanowisko pracy, czyli wielokrotność stacji montażowej. Liczba monterów pracujących na wielokrotnym stanowisku pracy jest równa wielokrotności tego stanowiska (liczbie zajmowanych stacji montażowych). Również cykl na takim stanowisku jest wielokrotnością cyklu podstawowego.

Organizacja montażu na stanowisku wielokrotnym polega na obsługiwaniu przez montera tylko niektórych (krotnych) obiektów. Wyróżnienie operacji w enklawie niepodzielnej wynika z odmiennych typów detali i narzędzi potrzebnych do wykonania tych operacji. W przypadku enklawy podzielnej operacje są wykonywane na podstawowych stanowiskach pracy przez różnych monterów. Inaczej mówiąc na każdym stanowisku znajduje się jeden monter, który obsługuje każdy kolejny obiekt.

Wprowadzenie enklaw w procesie montażu jest uzasadnione względami technicznymi (koniecznością kontroli wykonania układu funkcjonalnego przez konkretnego montera, konstrukcją linii dostosowaną dla wykonania pewnych operacji itp.). Z uwagi na ograniczenia grupowania operacji można wyróżnić następujące przypadki:

- na pewnych stacjach są realizowane wyłącznie enklawy,
- enklawy mogą być poprzedzane innymi operacjami na swych stacjach,
- po enklawach (na ich stacjach) następują inne operacje.

W dalszym ciągu uwzględnimy wyszczególnione wyżej przypadki dla enklaw podzielnych oraz niepodzielnych.

2.1. Model matematyczny

Załóżmy, że dany jest zbiór operacji montażowych:

$$\Omega = \{\omega_n\}, \qquad (1)$$

$$n = 1,\dots,N$$

gdzie:

ω_n - n-ta operacja,

N - liczba operacji.

W zbiorze Ω wyróżniamy podzbiory E_r, $(r = 1,\dots,R)$ zwane enklawami. Zakładamy, że enklawy spełniają następujące warunki:

$$E_{r_1} \cap E_{r_2} = 0 \qquad r_1 \neq r_2 \tag{2}$$

$$\bigcup_{r=1}^{r=R} E_r \subset \Omega \tag{3}$$

gdzie: R - liczba enklaw.

Przynależność operacji do neklaw jest dana wektorem:

$$U = \left[u_n\right] \qquad n = 1,\dots,N. \tag{4}$$

Elementy tego wektora mają następujące znaczenia:

$$u_n = \begin{cases} r: \text{ jeśli operacja } \omega_n \text{ należy do enklawy } E_r \\ 0: \text{ w przypadku przeciwnym} \end{cases}$$

Założymy, że ograniczenia kolejnościowe wykonywania operacji dane są macierzą:

$$\Gamma = \left[\gamma_{\vartheta,n}\right] \qquad \vartheta = 1,\dots,N \quad n = 1,\dots,N \tag{5}$$

Elementy tej macierzy definiujemy następująco:

$$\gamma_{\vartheta,n} = \begin{cases} 1: \text{ jeśli } \omega_\vartheta \text{ jest bezpośrednim poprzednikiem } \omega_n \\ 0: \text{ w przypadku przeciwnym} \end{cases}$$

Niech czasy wykonania operacji będą dane wektorem:

$$\Theta = \left[\vartheta_n\right] \qquad n = 1,\dots,N, \tag{6}$$

gdzie:

ϑ_n - czas wykonania operacji ω_n.

Zakładając, że dany jest cykl c procesu montażu, należy wyznaczyć przydział operacji na stanowiska pracy. Przydział ten będzie optymalny, jeśli liczba stanowisk pracy będzie najmniejsza z możliwych.

Dla zapisu kryterium optymalizacji oznaczymy przez t_n chwilę zakończenia montażu operacji ω_n na linii (określony od chwili wejścia montowanego obiektu na linię). Stąd liczbę stanowisk pracy minimalizujemy za pomocą kryterium:

$$Q^{*} = \max_{1 \leq n \leq N} \left[\frac{1}{c} t_n\right]^{+} \longrightarrow \min \tag{7}$$

gdzie:

$[\cdot]^{+}$ - najmniejsza liczba naturalna nie mniejsza niż wyrażenie w nawiasie kwadratowym.

Ten sam efekt uzyskujemy, stosując prostsze w obliczeniach kryterium:

$$Q = \max_{1 \leq n \leq N} t_n \longrightarrow \min \tag{8}$$

Ponadto kryterium (8) wybiera - spośród rozwiązań o tej samej liczbie stanowisk pracy - rozwiązanie o najmniejszym czasie montażu obiektu na linii.

Dopuszczalny balans linii (a zatem również balans optymalny) musi spełniać następujące ograniczenia:

- kolejnościowe:

$$\forall_{\vartheta} \forall_{n} (\gamma_{\vartheta,n} = 1) \Longrightarrow (t_{\vartheta} \leq t_n - \vartheta_n) \tag{9}$$

- niepodzielności enklawy E_r:

$$\exists_n (u_n = r) \Longrightarrow \left\{ m_r^p = \left[\frac{1}{c}(t_n - \vartheta_n)\right]^{+} \right\} \wedge \left\{ m_r^k = \left[\frac{1}{c} t_n\right]^{+} \right\} \tag{10}$$

gdzie:

m_r^p - numer początkowej stacji, na której jest wykonywana niepodzielna enklawa E_r,

m_r^k - numer końcowej stacji, na której jest wykonywana niepodzielna enklawa E_r.

- niepodzielności operacji ω_n:

$$\forall_n (u_n \neq r) \Rightarrow \left\{ m_n = \left[\frac{1}{c} t_n\right]^{+} = \left[\frac{1}{c}(t_n - \vartheta_n)\right]^{+} \right\} \tag{11}$$

gdzie:

m_n - numer stacji, do której przydzielono operację ω_n.

- sekwencji operacji podzielnej enklawy E_ϱ:

$$\forall_{\varrho}(u_\varrho \neq \varrho) \Rightarrow \left\{ \left\{ \left[\frac{1}{c} t_\varrho\right]^+ \leqslant m_\varrho^p \right\} \vee \left\{ \left[\frac{1}{c} t_\varrho\right]^+ \geqslant m_\varrho^k \right\} \right\} \quad (12)$$

przy tym:

$$m_\varrho^p = \min_{\omega_n \in E_\varrho} \left[\frac{1}{c} t_n\right]^+ \quad (13a)$$

$$m_\varrho^k = \max_{\omega_n \in E_\varrho} \left[\frac{1}{c} t_n^-\right]^+ \quad (13b)$$

Jeżeli na stanowiskach o numerach m spełniających warunek:

$$m_\varrho^p < m < m_\varrho^k \quad (14)$$

są wykonywane wyłącznie operacje $\omega_n \in E_\varrho$, to w (12) odpowiednie nierówności są ostre.

Analogiczny warunek można przytoczyć dla niepodzielnej enklawy E_r:

$$\forall_{\varrho}(u_\varrho \neq r) \Rightarrow \left\{ \left\{ \left[\frac{1}{c} t_\varrho\right]^+ \leqslant m_r^p \right\} \vee \left\{ \left[\frac{1}{c} t_\varrho\right]^+ \geqslant m_r^k \right\} \right\} \quad (15)$$

Jednakże w tym przypadku nie chodzi o sekwencję operacji, ponieważ enklawa E_r jest traktowana jako jedna operacja. Jeżeli żadna operacja nie może poprzedzać enklawy E_r lub następować po E_r na jej stacjach, to odpowiednie nierówności w (15) są ostre.

W sformułowanym modelu matematycznym, problemu balansowania linii montażowej z enklawami, występuje N niewiadomych, którymi są momenty t_n zakończenia montażu operacji ω_n.

3. ALGORYTM

Do rozwiązania sformułowanego problemu przedstawimy algorytm oparty na metodzie podziału i ograniczeń. Idea tego algorytmu polega na określeniu stanu procesu decyzyjnego, wartości stanu oraz procedur generowania i eliminowania stanów. Uwzględnimy reguły wyboru (FIFO: pierwszy wchodzi - pierwszy wychodzi, LIFO: ostatni wchodzi - pierwszy wychodzi, LLB: najmniejsze dolne ograniczenie, DF/LLB: zgłębienie najmniejszego dolnego ograniczenia oraz reguły eliminacji stanów (sondowania i dominacji) [8].

W rozważanym problemie balansowania linii montażowej stan procesu decyzyjnego zdefiniujemy następująco:

DEF.1: Stan jest wektorem

$$P = [p_n] \qquad n = 1,\dots,N \quad (16)$$

Elementy tego wektora

$$p_n = \begin{cases} t_n: & \text{jeśli operacja } \omega_n \text{ została przydzielona do realizacji} \\ 0: & \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases}$$

Tak więc stan początkowy jest wektorem zerowym, natomiast stany końcowe są wektorami o dodatnich elementach.
Wartość stanu P oznaczamy przez V i definiujemy następująco:

DEF.2: Wartość stanu jest liczbą określoną z formuły:

$$V = \max_{1 \leqslant n \leqslant N} p_n \tag{17}$$

Tak więc optymalny stan końcowy, zgodnie z (8) i (17), jest stanem o minimalnej wartości.

Przydział kolejnych operacji na stanowisku pracy może być traktowany jako N-etapowy proces decyzyjny. Na każdym η-tym etapie (η=0,...,N) podejmowana jest decyzja o przydzieleniu jednej operacji na stanowisko pracy. Ciąg decyzji nazwiemy strategią. Po podjęciu każdej decyzji zmienia się stan procesu przydziału operacji. Ciąg stanów nazwiemy trajektorią. Każda trajektoria wychodzi ze stanu początkowego, który jest wektorem zerowym. Każdy stan N-etapowego procesu decyzyjnego reprezentuje dopuszczalne rozwiązanie problemu. Stan końcowy o najmniejszej wartości jest stanem optymalnym.

W trakcie obliczeń niektóre stany można wyeliminować jeżeli nie prowadzą do rozwiązania optymalnego. W rozważanym problemie do eliminacji stanów zastosujemy reguły sondowania i dominacji. Koncepcja reguły sondowania jest określona następująco:

- Załóżmy, że dany jest aktualnie najlepszy stan końcowy oraz stan wygenerowany. Jeżeli dolne ograniczenie dla wygenerowanego stanu jest większe niż wartość aktualnie najlepszego stanu końcowego, to wygenerowany stan pomijamy w dalszych obliczeniach.

Z kolei idea dominacji jest zawarta w stwierdzeniu:

- Załóżmy, że dane są dwa stany. Jeżeli najlepsze rozwiązanie jakie można otrzymać z pierwszego stanu jest lepsze niż najlepsze rozwiązanie jakie można otrzymać z drugiego stanu, to drugi stan pomijamy w dalszych obliczeniach.

Reguły sondowania i dominacji zostaną podane dalej w postaci szczegółowych twierdzeń.

3.1. Lista stanów aktywnych

W algorytmie podziału i ograniczeń istotne znaczenie (ze względu na czas obliczeń i zajętość pamięci komputera) ma sposób generowania trajekrii stanów. W rozważanym problemie dla wygenerowania stanu η-ego etapu potrzebny jest stan etapu η-1-go (stany wcześniejszych etapów nie są potrzebne). Do generowania stanów wykorzystamy tzw. listę stanów aktywnych (uporządkowany zbiór stanów). Jako stan aktywny przyjmiemy taki, który pozwala wygenerować dalsze stany. Z tego względu stany N-tego etapu nie są aktywne.

Lista stanów aktywnych stanowi bazę dla generowania stanów w rozważanym algorytmie. Na liście tej umieszcza się wygenerowane stany aktywne. Z kolei dla generowania stanów należy wybrać z listy odpowiedni stan. Do tego celu wykorzystujemy reguły wyboru (np. FIFO, LIFO, LLB, DF/LLB). Cechą charakterystyczną tych reguł jest jednokrotny wybór każdego stanu z listy. Wybrane stany są usuwane z listy i więcej na nią nie powracają. Aby zachować przy tym możliwość wygenerowania wszystkich trajektorii, a z każdego wybranego stanu generowane są wszystkie dopuszczalne stany kolejnego etapu. Ze względu na kolejne usuwanie stanów wybranych i kolejne wprowadzanie na listę stanów wygenerowanych - FIFO, LIFO, LLB, DF/LLB, są regułami wyboru sekwencyjnego. Jeżeli wybrany stan powraca na listę, a ponadto nie generuje się z niego wszystkich dopuszczalnych stanów, to reguła wyboru ma charakter kombinacyjny. Reguł wyboru kombinacyjnego nie będziemy stosować.

Przedstawiona organizacja listy stanów aktywnych umożliwia proste generowanie trajektorii. Przy tym zapamiętywany jest aktualnie ostatni stan trajektorii. Stosując regułę FIFO wybiera się pierwszy stan z listy stanów aktywnych. Reguła LIFO określa wybór ostatniego stanu z tej listy. Aby stosować regułę LLB, trzeba wyznaczyć dolne ograniczenia dla każdego stanu aktywnego (wybieramy stan o najmniejszym dolnym ograniczeniu). Z kolei reguła DF/LLB wymaga określenia dolnego ograniczenia tylko dla stanów aktualnie ostatniego (np. η-1-go) etapu. Wyznaczenie stanów należących do tego etapu wynika z liczby przydzielonych operacji.

Interpretacja generowania stanów przy różnych regułach wyboru jest odmienna. Stosując regułę FIFO generujemy stany etapami, tzn. na podstawie wszystkich stanów etapu η-1-go generowane są wszystkie stany etapu η-go. W ten sposób otrzymujemy algorytm podziału i ograniczeń bez powrotów (algorytm programowania wieloetapowego). Algorytm taki wymaga obszernej listy stanów aktywnych (czyli pamięci komputera).

Dla pozostałych reguł wyboru otrzymujemy algorytmy podziału i ograniczeń z powrotami. Oznacza to, że wytenerowane trajektorie (reprezentowane przez aktualnie ostatnie stany) mają różną długość. Po wygenerowaniu pewnej trajektorii (dojściu do stanu końcowego) następuje powrót do trajektorii wygenerowanych częściowo. Reguły wyboru stanów przy powrotach nie ulegają zmianie. Algorytmy podziału i ograniczeń z powrotami wymagają mniejszej listy stanów aktywnych. Ponadto w trakcie obliczeń znane jest aktualnie najlepsze rozwiązanie dopuszczalne.

Generowanie stanów za pomocą listy stanów aktywnych polega na usuwaniu stanów wybranych i wprowadzaniu na listę stanów wygenerowanych. Po każdym takim kroku zmienia się zawartość listy stanów aktywnych. W ogólnym przypadku zmiana w k-tym kroku może dotyczyć usunięcia stanu i zmiany numerów pozostałych stanów lub dopisania stanu. Usuwane są stany wybrane do generowania dalszych stanów lub stany wyeliminowane.

Załóżmy, że pozycje stanów na liście (ich numery) zmieniają się wg następującego schematu. Oznaczmy przez l_k pozycję jaką zajmuje pewien stan na liście, po k-tym kroku, ($l_k = 1,\dots,L_k$; gdzie L_k - liczba stanów na liście po k-tym kroku). Przez λ_k - oznaczamy numer stanu wybranego do dalszego generowania, a przez λ'_k - numer stanu wyeliminowanego. Załóżmy, że dana jest lista stanów po k-1-szym kroku oraz numer λ_{k-1} wybranego stanu. Stan, który na liście tej miał numer l_{k-1} będzie miał numer l_k na kolejnej liście, zgodnie z regułą:

$$l_k = \begin{cases} l_{k-1} & : \text{dla } l_{k-1} < \lambda_{k-1} \\ l_{k-1} - 1 & : \text{dla } \lambda_{k-1} < l_{k-1} \leqslant L_{k-1} \end{cases} \tag{18}$$

czyli

$$L_k = L_{k-1} - 1 \tag{18a}$$

Niechaj z kolei z wybranego stanu będzie wygenerowany perspektywiczny stan (nie wyeliminowany). Stan ten zostanie wpisany na listę. Jeżeli nie dominuje on żadnego stanu z listy, to:

$$l_{k+1} = \begin{cases} l_k & : \text{dla } l_k \leqslant L_k \\ L_k + 1 & : \text{dla nowego stanu} \end{cases} \tag{19}$$

czyli

$$L_{k+1} = L_k + 1 \tag{19a}$$

W przypadku gdy wygenerowany stan wyeliminował stan o numerze λ'_k z listy, to otrzymamy:

$$l_{k+1} = \begin{cases} l_k & : \text{dla } l_k < \lambda'_k \\ l_k - 1 & : \lambda'_k < l_k \leqslant L_k \\ L_k & : \text{dla nowego stanu} \end{cases} \tag{20}$$

Jeżeli eliminacja stanu o numerze λ'_k nastąpiła przez dominację, to zgodnie z (20) liczba stanów na liście nie ulega zmianie. Eliminacja stanu przez sondowanie oznacza, że wyznaczony stan końcowy ma wartość mniejszą niż dolne ograniczenie stanu o numerze λ'_k (takich stanów może być wiele). A zatem w tym przypadku formuła (20) może być użyta wielokrotnie,przy tym żaden stan nie wchodzi na listę (ponieważ stan końcowy nie jest aktywny).

Obliczenia są prowadzone analogicznie na każdym k-tym kroku. Warto zauważyć, że stany N-1-szego etapu wybrane z listy pozwalają generować kolejne stany końcowe, które nie są aktywne. W ten sposób liczba stanów na liście maleje. Obliczenia są zakończone, jeżeli na liście nie ma stanów aktywnych.

W dalszym ciągu rozważań dla oznaczenia stanów znajdujących się na liście stanów aktywnych przyjmiemy dwa indeksy: k - krok oraz l - numer stanu. Tak więc stan będziemy oznaczali $P^{l,k}$ (stan wybrany $P^{\lambda,k}$, stan zdominowany $P^{\lambda',k}$), a jego wartość: $V^{l,k}$.

4. ENKLAWY PODZIELNE

W procesie montażu z enklawami podzielnymi cykl spełnia warunek:

$$\max_{1\leqslant n\leqslant N} \vartheta_n < c < \sum_{n=1}^{n=N} \vartheta_n \tag{21}$$

Załóżmy, że na stacjach wyodrębnionych dla enklawy podzielnej' nie mogą się znajdować operacje nie należące do enklawy.

Dla wyznaczenia rozwiązania optymalnego należy wygenerować wszystkie trajektorie stanów, wychodząc ze stanu $P^{1,0}$. Generowanie stanów można przeprowadzić wg następujących procedur:

1. Jeżeli ostatnią operacją przydzieloną w wybranym stanie $P^{\lambda,k-1}$ jest ω_μ, która nie należy do żadnej enklawy, to jako następną można przydzielić operację, która należy lub nie należy do enklawy:

$$\forall_n \forall_\vartheta \left(\max_{1\leqslant n\leqslant N} p_i^{\lambda,k-1} = p_\mu^{\lambda,k-1}\right) \wedge (u_\mu = 0) \wedge (p_n^{\lambda,k-1} = 0)\wedge$$

$$\wedge \left[(\gamma_{\vartheta,n} = 1) \Rightarrow (p_\vartheta^{\lambda,k-1} > 0)\right] \Rightarrow (P = P^{\lambda,k-1} + \Delta P) \tag{22}$$

W (22) przez P oznaczono wygenerowany stan. Jeżeli stan ten nie zostanie wyeliminowany (przez sondowanie lub dominację), to należy go umieścić na liście stanów aktywnych. Zgodnie z (22) wychodząc z $P^{\lambda,k-1}$ można wygenerować wiele stanów.

Elementy wektora ΔP mają następujące znaczenia:

$$\Delta p_i = \begin{cases} t_n & : \text{dla } i = n \\ 0 & : \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases} \tag{23}$$

przy tym:

$$t_n = \begin{cases} v^{\lambda,k-1} + \vartheta_n : \text{ jeśli } (u_n = 0) \wedge \left\{ \left[\frac{1}{c} v^{\lambda,k-1}\right]^+ = \left[\frac{1}{c}(v^{\lambda,k-1} + \vartheta_n)\right]^+ \right\} \\ \left[\frac{1}{c} v^{\lambda,k-1}\right]^+ c + \vartheta_n : \text{ w przypadku przeciwnym} \end{cases} \tag{24}$$

2. Jeżeli ostatnią operacją przydzieloną w wybranym stanie $P^{\lambda,k-1}$ jest ω_μ, która należy do ϱ-tej enklawy, to jako następną przydzielamy operację ω_n, która należy do ϱ-tej enklawy (jeżeli istnieje). W przypadku przeciwnym przydzielamy operację dowolną. Ogólna procedura generowania stanów ma w tym przypadku następującą postać:

$$\forall_n \forall_\varrho \forall_j \left(\max_{1 \leq i \leq N} p_i^{\lambda,k-1} = p_\mu^{\lambda,k-1} \right) \wedge (u_\mu = \varrho) \wedge (p_n^{\lambda,k-1} = 0) \wedge$$

$$\wedge \left[(u_n = \varrho) \vee (u_j = \varrho) \Rightarrow (p_j^{\lambda,k-1} > 0) \right] \wedge$$

$$\wedge \left[(\gamma_{\vartheta,n} = 1) \Rightarrow (p^{\lambda,k-1} > 0) \right] \Rightarrow (P = P^{\lambda,k-1} + \Delta P) \tag{25}$$

Elementy wektora ΔP są określone jak w (23), przy czym:

$$t_n = \begin{cases} v^{\lambda,k-1} + \vartheta_n : \text{ jeśli } (u_n = \varrho) \wedge \left\{ \left[\frac{1}{c} v^{\lambda,k-1}\right]^+ = \left[\frac{1}{c}(v^{\lambda,k-1} + \vartheta_n)\right]^+ \right\} \\ \left[\frac{1}{c} v^{\lambda,k-1}\right]^+ c + \vartheta_n : \text{ w przypadku przeciwnym} \end{cases} \tag{26}$$

Jeżeli $u_n = \varrho$, to procedurę (25) stosujemy tylko do operacji ϱ-tej enklawy.

Za pomocą przedstawionych procedur można wygenerować wszystkie trajektorie wychodzące ze stanu początkowego $P^{1,0}$. Z każdego stanu końcowego P^* odczytujemy wprost dopuszczalny balans linii, bowiem:

$$m_n = \left[\frac{1}{c} p_n^*\right]^+ \tag{27}$$

Jeżeli na stanowiskach pracy wyodrębnionych dla enklaw mogą się znajdować operacje nie należące do enklawy, to zmieniają się jedynie formuły (24) i (26). Pomijając w (24) warunek $u_n = 0$, otrzymujemy przypadek poprzedzania enklawy przez operacje, które do niej nie należą. Pomijając z kolei w (26) $u_n = \varrho$ otrzymujemy możliwość grupowania operacji należących do ϱ-tej enklawy z operacjami nie należącymi do niej - na ostatnim stanowisku pracy tej enklawy.

W trakcie generowania stanu P wyznaczamy równocześnie jego wartość V, bowiem skoro ω_n jest ostatnią operacją przydzieloną do realizacji w stanie P, to:

$$V = t_n \tag{28}$$

Jeżeli stany $P^{\lambda,k-1}$ są wybierane zgodnie z regułą FIFO, to $\lambda=1$, a dla reguły LIFO $\lambda=L_{k-1}$. Wybór stanu wg reguły LLB lub DF/LLB wymaga wyznaczenia najmniejszego dolnego ograniczenia. Oznaczmy przez $b^{l,k-1}$ dolne ograniczenie dla stanu $P^{l,k-1}$, a zatem możemy napisać:

$$b^{\lambda,k-1} = \min_{1\leqslant l\leqslant L_{k-1}} b^{l,k-1} \tag{29}$$

Dolne ograniczenia wyznaczamy z formuły:

$$b^{l,k-1} = \left[\frac{1}{c}\left(V^{l,k-1} + \sum_{n\in\alpha_{l,k-1}} \vartheta_n\right)\right]^+ \tag{30}$$

przy tym:

$$\forall_n \left(p_n^{l,k-1} = 0\right) \Rightarrow \left(n\in\alpha^{l,k-1}\right) \tag{31}$$

Stosując regułę DF/LLB stan $P^{\,,k-1}$ wyznaczamy z warunku:

$$b^{\lambda,k-1} = \underset{l\in\beta^{k-1}}{\quad} b^{k,k-1} \tag{32}$$

przy tym:

$$\forall_{1\leqslant l\leqslant L_{k-1}} \left(\left|\alpha^{l,k-1}\right| = \left|\alpha^{L_{k-1},k-1}\right|\right) \Rightarrow \left(l\in\beta^{k-1}\right) \tag{33}$$

Jeżeli reguły LLB lub DF/LLB nie dają jednoznacznego wyboru, to dodatkowo stosujemy regułę FIFO lub LIFO.

Wygenerowane stany, które nie prowadzą do rozwiązania optymalnego są eliminowane. Stan P jest eliminowany, jeżeli spełnia warunki sondowania lub dominacji. Reguła sondowania jest oparta na twierdzeniu:

Tw.1.: Jeżeli wygenerowany stan P spełnia warunek:

$$V^* \leqslant b, \tag{34}$$

gdzie:

- V^* - wartość aktualnie najlepszego stanu końcowego P^*,
- b - dolne ograniczenie wygenerowanego stanu P,

to można go w obliczeniach pominąć.

Ponieważ wartość V' każdego stanu końcowego P', który można uzyskać ze stanu P spełnia warunek $b\leqslant V'$, zatem również $V^*\leqslant V'$. Tak więc stan P można pominąć w obliczeniach,ponieważ nie można z niego uzyskać lepszego stanu końcowego niż P^*.

Reguła dominacji jest oparta na następującym twierdzeniu:

Tw. 2.: Stan $P^{l,k}$ dominuje nad stanem P, jeżeli jest spełniony warunek:

$$(\alpha^{l,k} = \alpha) \wedge (V^{l,k} \leqslant V) \quad (u_\mu^{l,k} = u_\mu), \tag{35}$$

gdzie:

u_μ - kod przynależności operacji ω_μ do enklawy.

Operacja ω_μ jest ostatnią operację przydzieloną w stanie P (analogicznie $\omega_\mu^{l,k}$ jest ostatnią operację przydzieloną w stanie $P^{l,k}$ i należącą do enklawy $u_\mu^{l,k}$).

Dowód tego twierdzenia polega na wykazaniu, że optymalny fragment trajektorii ze stanu P jest realizowalny również od stanu $P^{l,k}$. Ponieważ wychodząc z każdego ze stanów P lub $P^{l,k}$ należy przydzielić ten sam podzbiór operacji $(\alpha^{l,k} = \alpha)$ przy tej samej rozpatrywanej enklawie $(u_\mu^{l,k} = u_\mu)$ - zatem logiczne warunki przydziału są jednakowe. Ponadto $V^{l,k} \leqslant V$, przeto optymalny stan końcowy uzyskany ze stanu P nie może być lepszy od optymalnego stanu uzyskanego z $P^{l,k}$. Stąd stan P w dalszych obliczeniach pomijamy.

Jeżeli w (35) jedynie $V < V^{l,k}$, a pozostałe warunki są spełnione, to stan P dominuje nad stanem $P^{l,k}$.

5. ENKLAWY NIEPODZIELNE

Sformułowanie problemu balansowania linii montażowej z enklawami niepodzielnymi jest analogiczne jak dla enklaw podzielnych. Jedynie warunek (21) nie musi być spełniony. Enklawę niepodzielną E_r traktujemy jak jedną operację, a zatem czas tej operacji może przekraczać cykl.

Załóżmy, że na stacjach montażowych wyodrębnionych dla enklawy E_r nie mogą być wykonywane inne operacje. Dla rozwiązania problemu blanasowania linii z enklawami niepodzielnymi wykorzystamy algorytm podziału i ograniczeń przedstawiony wyżej. W algorytmie tym ulegają zmianie jedynie procedura generowania i reguła dominacji stanów.

Procedura generowania stanów ma postać:

$$\forall_n \forall_\vartheta (p_n^{\lambda,k-1} = 0) \wedge \left[(\gamma_{\vartheta,n} = 1) \Rightarrow (p^{\lambda,k-1} > 0)\right] \Rightarrow (P = P^{\lambda,k-1} + \Delta P) \tag{36}$$

Elementy wektora ΔP są określone przez (23), przy tym:

$$t_n = \begin{cases} V^{\lambda,k-1} + \vartheta_n : \text{ jeśli } (u_\mu \neq r) \wedge (u_n \neq r) \wedge \left\{ \left[\frac{1}{c} V^{\lambda,k-1}\right]^+ = \left[\frac{1}{c}(V^{\lambda,k-1} + \vartheta_n)\right]^+ \right\} \\ \left[\frac{1}{c} V^{\lambda,k-1}\right]^+ c + \vartheta_n : \text{ w przypadku przeciwnym} \end{cases} \tag{37}$$

Stacje, na których są wykonywane enklawy wyznaczamy na podstawie formuły (10). Jeżeli w (37) pominiemy warunek $u_{\mu} \neq r$, to otrzymamy przypadek, w którym po enklasie E_r mogą być wykonywane inne operacje (na tej samej stacji). W przypadku gdy w (37) pominiemy warunek $u_n \neq r$, to otrzymamy sytuację, gdy przed enklawą można na tę samą stację przydzielić inne operacje.

Reguła dominacji stanów jest oparta na następującym twierdzeniu.

Tw. 3: Stan $P^{l,k}$ dominuje nad stanem P, jeżeli jest spełniony warunek:

$$(\alpha^{l,k} = \alpha) \wedge (v^{l,k} < v) \wedge \left[(u_{\mu}^{l,k} \neq 0) \Longleftrightarrow (u_{\mu} \neq 0\right] \qquad (38)$$

Dowód tego twierdzenia można przeprowadzić analogicznie jak dla twierdzenia 2. W dyskusji warto zaznaczyć, że jeżeli ostatnia operacja ω_{μ} przydzielona w stanie P jest enklawą, to ostatnia operacja $\omega_{\mu}^{l,k}$ też musi być enklawą (niekoniecznie tą samą). Warunek ten jest istotny tylko w przypadku, gdy po enklawie nie można przydzielić innych operacji na to samo stanowisko pracy. We wszystkich innych przypadkach ostatni człon koniunkcji (38) pomijamy.

W algorytmie balanowania linii z enklawami niepodzielnymi definicje stanu i wartości stanu, reguły wyboru oraz reguły sondowania - są takie same jak dla enklaw podzielnych.

6. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono problem balanowania linii montażowej z enklawami operacji. Do rozwiązania tego problemu zastosowano algorytm podziału i ograniczeń.

Przedstawiony model linii z podzielnymi i niepodzielnymi enklawami oraz warunkami grupowania enklaw z innymi operacjami stanowi uogólnienie przypadków szczególnych - dyskutowanych w literaturze. Model linii z enklawami operacji ma ważne znaczenie praktyczne.

Dyskutowane w pracy reguły wyboru i reguły eliminacji stanów decydują o efektywności algorytmu (w sensie czasu obliczeń i zajętości pamięci komputera). Dla reguły FIFO można posługiwać się jedynie regułą dominacji stanów. Z kolei reguły LIFO oraz DF/LLB pozwalają korzystać tylko z reguły sondowania. Jedynie reguła LLB pozwala korzystać równocześnie z reguł sondowania i dominacji stanów.

Ponieważ problem balansowania linii montażowej jest NP-zupełny w sensie złożoności obliczeniowej, zatem istotne znaczenie mają testy komputerowe. Z analiz przeprowadzonych w [9] wynika, że czas obliczeń dla kilkudziesięciu operacji jest rzędu kilku minut (stosowano FORTRAN na komputerze MINSK-32).

Skuteczność reguł eliminacji stanów jest w dużej mierze zależna od konstrukcji samego programu komputerowego. Zapis stanu i dodatkowych informacji (wartości, dolnych ograniczeń itp.) w odpowiedniej postaci programowej może kilkakrotnie skrócić czas obliczeń.

W przypadku ograniczonego czasu obliczeń lub ograniczonej pamięci operacyjnej komputera przedstawione algorytmy dają rozwiązanie suboptymalne z oszacowaniem dokładności.

LITERATURA

[1] Buxey G.M.: Assembly Line Balancing with Multiple Stations, Management Science, V. 20, No 6, 1974, pp. 1010-1021.

[2] Caruso F.R.: Assembly Line Balancing for Improved Profits, Automation, V. 12, 1965, pp. 48-52.

[3] Helgeson W.V., Birnie D.P.: Assembly Line Balancing using the Ranked Positional Weight Technique, The Journal of Industrial Engineering, V. 12, No 6, 1961, pp. 394-398.

[4] Kilbridge M., Wester L.: The Balance Delay Problem, Management Science, V. 8, No 1, 1961, pp. 69-84.

[5] Kilbridge M., Wester L.: A Heuristic Method of Assembly Line Balancing, The Journal of Industrial Engineering, V. 12, No 14, 1961, pp. 292-298.

[6] Kilbridge M., Wester L.: A Review of Analitical Systems of Line Balancing, Operations Research, V. 10, 1962, pp. 626-638.

[7] Klein M.: On Assembly Line Balancing, Operations Research, V. 11, No 2, 1963, pp. 274-281.

[8] Kohler H.W., Steiglitz K.: Przeglądowe i iteracyjne metody obliczeniowe, Teoria szeregowania zadań (red. E.G. Coffman jr), WNT, Warszawa 1980, ss. 241-301.

[9] Kowalowski H., Marecki F. i inni: Opracowanie algorytmów i programów dla systemu programowania i sterowania montażami PLISTEM, Raport z pracy naukowo-badawczej (etap 3), Instytut Automatyki, Politechnika Śląska, Gliwice 1982.

[10] Masłow W., Kasznin E., Muchin A., Koriukin E.: Normirowanije truda na konwiejernych liniach sborki s ispolzowanijem matiematiczeskich metodow i ECWM, Socjalisticzeskij Trud, Moskwa, No 10, 1970, ss. 106-112.

[11] Marecki F.: Modelowanie symulacyjne linii montażowej samochodu małolitrażowego. Informatyka, No 7-8, 1975, ss. 25-28.

[12] Marecki F.: Balansowanie szeregowej linii montażowej z ograniczeniami wykluczania operacji, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria: Automatyka, z. 63, Gliwice 1982, ss. 81-89.

[13] Marecki F.: Discrete Processes Control, 5-th International Conference on "Control Systems and Computer Science", Politechnical Institute of Bucharest, Bucharest 1983.

[14] Mitchell J.: A Computational Procedure for Balancing Zoned Assembly Lines, Research Report No 6-94801-R3, Westinghouse Research Laboratories, Pittsburgh, Pensylvania, 11pp., 1957.

[15] Patterson J.H., Albracht J.J.: Assembly Line Balancing: Zero-One Programming with Fibonacci Search, Operations Research, V. 23, No 1, 1975, pp. 166-172.

[16] Salveson M.E.: The Assembly Line Balancing Problem, Transactions of the ASME, V. 77, No 16, 1955, pp. 939-947.

[17] Salveson M.E.: The Assembly Line Balancing Problem, The Journal of Industrial Engineering, V. 6, No 3, 1955, pp. 18-25.

[18] Szkurba W.W., Bieleckij S.A.: Czisliennyje mietody w rieszenii zadaczi bałansirowanija sborocznoj linii, Kibiernietika, No 1, 1977, ss. 96-108.

[19] Van Beek H.G.: The Influence of Assembly line Organization on Output, Quality and Morale, Occupational Psychology, V. 38, 1964, pp. 161-172.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Andrzej Gościński

Wpłynęło do Redakcji: sierpień 1983 r.

БАЛАНСИРОВАНИЕ СБОРОЧНОЙ ЛИНИИ С ЭНКЛАВАМИ ОПЕРАЦИЙ

Р е з ю м е

В работе представлена модель сборочной линии с энклавами операций. Выделены делимые и неделимые энклавы. Оговорено группирование операций принадлежащих и непринадлежащих к энклаве. Предложенная проблема балансирования сборочной линии решается алгоритм раздела и ограничений. Описаны правила выбора и удаления состояний.

ASSEMBLY LINE BALANCING WITH ENCLAVES OF OPERATIONS

S u m m a r y

In the paper a model of assembly line with enclaves of operations is presented. Divisible and indivisible enclaves are distinguished. The problem of assembly line balancing has been solved using branch and bound algorithm.