ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: AUTOMATYKA z. 73 Nr kol. 798

Antoni NIEDERLIŃSKI

# OPTYMALIZACYJNE KRYTERIUM ZBIEŻNOŚCI Z PRAWDOPODOBIEŃSTWEM JEDEN DLA IDENTYFIKACJI OBIEKTÓW DYNAMICZNYCH

Streszczenie. Wykazano, że wariancja błędu globalnego identyfikacji wg najmniejszych kwadratów osiąga minimum dla oceny wektora parametrów równej prawdziwemu wektorowi parametrów wtedy i tylko wtedy, gdy ocena wektora parametrów jest zbieżna z prawdopodobieństwem jeden do prawdziwego wektora parametrów. Przedstawiono przykład zastosowania optymalizacyjnego kryterium do oceny zbieżności algorytmu regulacji samonastrajającej.

## 1. WSTĘP

Zbieżność ciągu zmiennych losowych z prawdopodobieństwem jeden (por. Dodatek 1) zapewnia osiąganie przez prawie każdą realizację tego ciągu określonej, stałej granicy. Stąd zbieżność ciągu ocen wektora parametrów z prawdopodobieństwem 1 (z p. 1) jest w zagadnieniach identyfikacji obiektów dynamicznych praktycznie znacznie ważniejsza, aniżeli takie właściwości, które charakteryzują wyłącznie całą populację tych ciągów (np. nieobciążność, zbieżność w prawdopodobieństwie, zbieżność średniokwadratowa).

W 1976 r. Ljung przedstawił twierdzenie precyzujące warunki zbieżności oceny według najmniejszych kwadratów wektora parametrów obiektu dynamicznego dyskretnego do prawdziwego wektora parametrów. Twierdzenie Ljunga wraz z jego dowodem bazującym na teorii martyngałów stanowi obecnie już klasyczny element teorii identyfikacji (patrz monografia Goodwina i Payne'a (1977)). Ponieważ dowód przedstawionego kraterium optymalizacyjnego opiera się na twierdzeniu Ljunga, przedstawiono je w rozdz. 2 wraz z nowym, oryginalnym dowodem, bazującym na odmiennym niż u Ljunga i prostszym ciągu martyngałowym. W rozdz. 3 udowodniono oryginalne twierdzenie o związku pomiędzy zbieżnością z p. 1 i minimalizacją wariancji błędu globalnego identyfikacji. Twierdzenie to stanowi formalne uzasadnienie heurystycznej metody badania zbieżności algorytmów identyfikacji, przedstawionej w poprzednich publikacjach autora. Artykuł kończy przykład zastosowania przedstawionego kryterium dla określenia warunków asymptotycznej zbieżności algorytmu regulacji samonastrajającej minimalnowariancyjnej.

## 2. PODSTAWOWE TWIERDZENIE O ZBIEŻNOŚCI Z P. 1 OCEN PARAMETRÓW WG NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW

Zakłada się, że:

1) Dany jest obiekt dynamiczny dyskretny o wyjściu $y_i$ i wejściu $u_i$, opisany równaniem różnicowym

$$\mathcal{A}(z^{-1})y_i = z^{-k}\mathcal{B}(z^{-1})u_i + e_i, \tag{2.1}$$

gdzie:

$$\mathcal{A}(z^{-1}) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \ldots + \alpha_n z^{-n} \tag{2.2}$$

$$\mathcal{B}(z^{-1}) = \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \ldots + \beta_n z^{-n} \tag{2.3}$$

$z^{-i}$ - jest operatorem opóźnienia o $i$ okresów próbkowania, a $e_i$ jest dyskretnym białym szumem typu $(0, \sigma^2)$.
Dla celów dalszych rozważań wygodnie jest zapisać równanie obiektu w postaci iloczynu skalarnego

$$y_i = \underline{\omega}^T \underline{\varphi}_{i-1} + e_i, \tag{2.4}$$

gdzie wektor parametrów obiektu ("prawdziwy" wektor parametrów)

$$\underline{\omega}^T = \left[\alpha_1 \ldots \alpha_n \;\; \beta_0 \ldots \beta_n\right] \tag{2.5}$$

i wektor danych pomiarowych

$$\underline{\varphi}^T_{i-1} = \left[-y_{i-1} \ldots -y_{i-n} \;\; u_{i-k} \ldots u_{i-k-n}\right] \tag{2.6}$$

2) Wielomiany $z^n\mathcal{A}(z^{-1})$ i $z^n\mathcal{B}(z^{-1})$ są wielomianami wzajemnie pierwszymi.
3) Pomiędzy wyjściem a wejściem obiektu może być sprzężenie zwrotne, jednakże wyłącznie takie, które nie wprowadza liniowej zależności pomiędzy elementami wektora $\underline{\varphi}^T_{i-1}$.
4) Obiekt jest stabilny lub został ustabilizowany za pomocą sprzężenia zwrotnego spełniającego założenie 3. Stąd $|u_i| \leqslant u_{max} < \infty$ oraz $|y_i| \leqslant y_{max} < \infty$.
5) Sekwencja $\{u_i\}$ zapewnia dobre uwarunkowania macierzy

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \underline{\varphi}_{i-1}\underline{\varphi}^T_{i-1}$$

6) Model posiada strukturę identyczną jak obiekt i jest opisany iloczynem skalarnym

$$y_{Mi} = w^T \underline{\varphi}_{i-1}, \tag{2.7}$$

gdzie wektor parametrów modelu

$$\underline{w}^T = \left[a_1 \ldots a_n \; b_0 \ldots b_n\right] \tag{2.8}$$

a $y_{Mi}$ jest wyjściem modelu przewidywanym dla chwili i-tej w oparciu o dane znane do chwili (i-1)-wszej włącznie.

Przy powyższych założeniach jest słuszne następujące twierdzenie: ocena $\hat{\underline{w}}_N$ wektora $\underline{\omega}$, wyznaczona metodą najmniejszych kwadratów zgodnie z wyrażeniem

$$\hat{\underline{w}}_N = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \underline{\varphi}_{i-1}\underline{\varphi}_{i-1}^T\right)^{-1} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \underline{\varphi}_{i-1} y_i \tag{2.9}$$

jest zbieżna z p. 1 do wektora $\omega$,

$$P\left\{\lim_{N\to\infty} \left|\hat{\underline{w}}_N - \underline{\omega}\right| = \underline{0}\right\} = 1 \tag{2.10}$$

Dowód

Punktem wyjścia jest zależność

$$\hat{\underline{w}}_N - \underline{\omega} = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \underline{\varphi}_{i-1}\underline{\varphi}_{i-1}^T\right)^{-1} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \underline{\varphi}_{i-1}\theta_i \tag{2.11}$$

wyprowadzona w Dodatku 4. Dowód obejmuje następujące etapy:

1. Rozpatruje się wektor losowy

$$\underline{x}_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} \underline{\varphi}_{i-1}\theta_i, \tag{2.12}$$

którego j-ty element

$$x_{Nj} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} z_{i-j}\theta_i, \quad j = 1,2,\ldots,2n+1, \tag{2.13}$$

gdzie

$$z_{i-j} = \begin{cases} -y_{i-j} & \text{dla} \quad 1 \leqslant j \leqslant n \\ u_{i-k+n+1-j} & \text{dla} \quad n+1 \leqslant j \leqslant 2n+1 \end{cases} \tag{2.14}$$

spełnia zależność

$$x_{(N+1)j} = x_{Nj} + \frac{1}{N+1} z_{N+1-j} e_{N+1}, \tag{2.15}$$

czyli

$$E\left\{x_{(N+1)j} \,\middle|\, x_{1j},\ldots,x_{Nj}\right\} = x_{Nj}, \tag{2.16}$$

a więc $x_{Nj}$ jest martyngałem (por. Dodatek 2).

2. Elementy wektora $\underline{x}_N$ posiadają na mocy założenia 4 ograniczoną wariancję, gdyż

$$E\left\{x_{Nj}^2\right\} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i^2} z_{i-j}^2 \lambda^2 \leqslant \lambda^2 v^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i^2} \leqslant M < \infty, \tag{2.17}$$

gdzie $v = \max(u_{max}, y_{max})$.

3. Na podstawie twierdzenia 2 z dodatku 2 oraz etapu 1 i 2 dowodu istnieje taka zmienna losowa $x_j < \infty$, że

$$P\left\{\lim_{N\to\infty} x_{Nj} = x_j\right\} = 1 \tag{2.18}$$

Stąd na podstawie twierdzenia Kroneckera (Dodatek 3) zachodzi z prawdopodobieństwem 1

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} z_{i-j} e_i < \infty \implies \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} z_{i-j} e_i = 0 \tag{2.19}$$

4. Ponieważ na mocy założeń 2, 3 i 5 jest

$$\det \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \underline{\varphi}_{i-1} \underline{\varphi}_{i-1}^T \neq 0, \tag{2.20}$$

to z (2.11), (2.19) i (2.20) wynika, że

$$P\left\{\lim_{N\to\infty} |\hat{\underline{w}}_N - \underline{\omega}| = \underline{0}\right\} = 1. \tag{2.21}$$

## 3. OPTYMALIZACYJNE KRYTERIUM ZBIEŻNOŚCI Z PRAWDOPODOBIEŃSTWEM JEDEN

W rozdziale tym zostanie przedstawione nowe kryterium zbieżności ciągów wektorów parametrów wyznaczanych w trakcie identyfikacji modeli dynamicznych metodą najmniejszych kwadratów. Kryterium to wymaga rozwiązania deterministycznego problemu minimalizacji wariancji błędu globalnego[x)] identyfikacji względem wektora parametrów modelu. Okaże się, że jeżeli optymalny wektor parametrów modelu będzie równy wektorowi parametrów obiektu i tylko wtedy, to wektor parametrów obiektu, wyznaczany metodą najmniejszych kwadratów, będzie ze wzrostem liczby pomiarów dążyć do wektora parametrów obiektu z prawdopodobieństwem jeden. Wymienione kryterium zostało po raz pierwszy przedstawione we wcześniejszych pracach autora (1980 (1) i 1980 (2) ) jako czyste heurystyczne narzędzie badania algorytmów identyfikacji i adaptacji. Poniższe twierdzenie stanowi podbudowę teoretyczną, precyzującą warunki stosowania kryterium optymalizacyjnego oraz sens otrzymanych wyników.

Twierdzenie

Przy założeniach 1) ... 6) z rozdziału 2 oraz dodatkowym założeniu ergodyczności ciągów $\{u_i\}$, $\{y_i\}$ i $\{e_i\}$ zachodzi:

$$P\left\{\lim_{N\to\infty} |\underline{w}_N - \underline{\omega}| = 0\right\} = 1 \iff \operatorname{Arg}\min_{\underline{w}} E\left\{\varepsilon_i^2\right\} = \underline{\omega} \tag{3.1}$$

tzn. wektor parametrów modelu dąży do wektora parametrów obiektu z p. 1 wtedy i tylko wtedy, gdy wariancja błędu globalnego posiada minimum dla wektora parametrów modelu równego wektorowi parametrów obiektu.

Dowód

1. $\Longrightarrow$

Błąd globalny identyfikacji $\varepsilon_i$ można wyrazić w postaci

$$\varepsilon_i = y_i - y_{Mi} = \underline{\varphi}_{i-1}^T(\underline{\omega} - \underline{w}) + e_i \tag{3.2}$$

Stąd uważając $\underline{\omega}$ i $\underline{w}$ za wektory deterministyczne otrzymuje się:

$$E\left\{\varepsilon_i^2\right\} = E\left\{\left[\underline{\varphi}_{i-1}^T(\underline{\omega} - \underline{w})\right]^2\right\} + 2(\underline{\omega} - \underline{w})^T E\left\{\underline{\varphi}_{i-1} e_i\right\} + \lambda^2 \tag{3.3}$$

x) Błędem globalnym identyfikacji nazywa się błąd identyfikacji uważany za funkcję parametrów obiektu i modelu oraz wejść obiektu i modelu.

Na mocy założeń o ergodyczności i zbieżności z p. 1 jest

$$E\left\{\underline{\varphi}_{i-1}e_i\right\} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\underline{\varphi}_{i-1}e_i = 0 \quad \text{z p. 1} \tag{3.4}$$

Stąd

$$\min_{\underline{w}} E\left\{\varepsilon_i^2\right\} = \lambda^2 \tag{3.5}$$

i

$$\operatorname{Arg}\min_{\underline{w}} E\left\{\varepsilon_i^2\right\} = \underline{\omega}, \tag{3.6}$$

a więc zbieżność wektora $\hat{\underline{w}}_N$ do wektora $\omega$ z p. 1 implikuje, że wariancja błędu globalnego ma minimum dla $\underline{w} = \underline{\omega}$.

2. $\Leftarrow$

Zapisując (3.3) w postaci

$$E\left\{\varepsilon_i^2\right\} = (\underline{\omega}-\underline{w})^T E\left\{\underline{\varphi}_{i-1}\underline{\varphi}_{i-1}^T\right\}(\underline{\omega}-\underline{w}) + 2(\underline{\omega}-\underline{w})^T E\left\{\underline{\varphi}_{i-1}e_i\right\} + \lambda^2 \tag{3.7}$$

otrzymuje się z warunku koniecznego i wystarczającego[x)] istnienia optimum

$$\frac{\partial E\left\{\varepsilon_i^2\right\}}{\partial \underline{w}} = -2E\left\{\underline{\varphi}_{i-1}\underline{\varphi}_{i-1}^T\right\}(\underline{\omega}-\underline{w}) + 2E\left\{\underline{\varphi}_{i-1}e_i\right\} = 0 \tag{3.8}$$

Stąd

$$\underline{\omega} - \underline{w}_{opt} = \left(E\left\{\underline{\varphi}_{i-1}\underline{\varphi}_{i-1}^T\right\}\right)^{-1} E\left\{\underline{\varphi}_{i-1}e_i\right\} \tag{3.9}$$

Na podstawie założenia o ergodyczności i tezy twierdzenia jest

$$\underline{\omega} - \underline{w}_{opt} = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\underline{\varphi}_{i-1}\underline{\varphi}_{i-1}^T\right)^{-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\underline{\varphi}_{i-1}e_i = 0 \tag{3.10}$$

co implikuje

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\underline{\varphi}_{i-1}e_i = 0 \quad \text{z p. 1} \tag{3.11}$$

---

x) Wystarczalność warunku (3.8) wynika stąd, że macierz $E\left\{\underline{\varphi}_{i-1}\underline{\varphi}_{i-1}^T\right\}$ jest na mocy założeń 2, 3 i 5 z rozdz. 2 macierzą dodatnio określoną kwadratową.

oraz

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \underline{\varphi}_{i-1}\underline{\varphi}_{i-1}^{T} = \underline{M} \quad \text{z p. 1} \tag{3.12}$$

gdzie $\det \underline{M} \neq 0$. A więc jeżeli wariancja błędu globalnego posiada minimum dla $\underline{w}_{opt} = \underline{\omega}$, to wektor $\hat{\underline{w}}_N$ jest zbieżny do wektora $\omega$ z p. 1.

## 4. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA

Optymalizacyjne kryterium zbieżności zostanie poniżej zastosowane do analizy zbieżności algorytmu regulacji samonastrajającej minimalnowariancyjnej wg Åströma i Wittenmarka. Algorytm ten zyskał w ostatnim dziesięcioleciu bardzo dużą popularność i w licznych swoich odmianach jest jednym z najbardziej rozpowszechnionych algorytmów regulacji adaptacyjnej. Można go przedstawić w następujący sposób: jak wiadomo, dla obiektu opisanego równaniem różnicowym

$$y_i = z^{-k} \frac{\mathcal{B}(z^{-1})}{\mathcal{A}(z^{-1})} u_i + \frac{\mathcal{C}(z^{-1})}{\mathcal{A}(z^{-1})} e_i \tag{4.1}$$

gdzie

$$\mathcal{A}(z^{-1}) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \ldots + \alpha_n z^{-n}$$

$$\mathcal{B}(z^{-1}) = \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \ldots + \beta_n z^{-n}$$

$$\mathcal{C}(z^{-1}) = 1 + \gamma_1 z^{-1} + \ldots + \gamma_n z^{-n}$$

algorytm regulacji minimalnowariancyjnej ma postać

$$u_i = \frac{-\mathcal{G}(z^{-1})}{\mathcal{B}(z^{-1})\mathcal{F}(z^{-1})} \tag{4.2}$$

gdzie wielomiany

$$\mathcal{G}(z^{-1}) = \eta_0 + \eta_1 z^{-1} + \ldots + \eta_{n-1} z^{-(n-1)}$$

$$\mathcal{F}(z^{-1}) = 1 + \varphi_1 z^{-1} + \ldots + \varphi_{k-1} z^{-(k-1)}$$

są rozwiązaniem równania wielomianowego

$$\mathcal{C}(z^{-1}) = \mathcal{A}(z^{-1})\mathcal{F}(z^{-1}) + z^{-k}\mathcal{G}(z^{-1}) \tag{4.3}$$

a błąd regulacji minimalnowariancyjnej jest dany wyrażeniem

$$y_{i+k\ opt.} = \mathcal{F}(z^{-1})e_{i+k} \tag{4.4}$$

Wprowadzając (4.2) i (4.3) do (4.1) można obiekt opisać zależnością

$$y_{i+k} = \mathcal{G}(z^{-1})y_i - \mathcal{B}(z^{-1})\mathcal{F}(z^{-1})u_i =$$

$$= \mathcal{F}(z^{-1})e_{i+k} + \left[\mathcal{C}(z^{-1}) - 1\right]\left[\mathcal{F}(z^{-1})e_{i+k} - y_{i+k}\right] \tag{4.5}$$

Regulacja minimalnowariancyjna samonastrajająca polega na tym, że obiekt (4.5) jest regulowany za pomocą regulatora

$$u_i = \frac{-G_i(z^{-1})}{B_i(z^{-1})F_i(z^{-1})}\, y_i, \tag{4.6}$$

przy czym wielomiany $G_i(z^{-1})$, $B_i(z^{-1})$ i $F_i(z^{-1})$ posiadają taką samą strukturę, jak odpowiednio wielomiany $\mathcal{G}(z^{-1})$, $\mathcal{B}(z^{-1})$ i $\mathcal{F}(z^{-1})$, a ich parametry są określane rekurencyjnym algorytmem najmniejszych kwadratów dla danych pomiarowych do $y_i$ oraz $u_{i-k}$ włącznie i błędu identyfikacji o strukturze zgodnej z lewą stroną zależności (4.5)

$$\varepsilon_i = y_i - G_i(z^{-1})y_{i-k} - B_i(z^{-1})F_i(z^{-1})u_{i-k} \tag{4.7}$$

Analiza zbieżności algorytmu regulacji samonastrajającej polega na wyjaśnieniu czy, kiedy i w jaki sposób parametry wielomianów $G_i(z^{-1})$ oraz $B_i(z^{-1})F_i(z^{-1})$ są zbieżne do parametrów "prawdziwych" wielomianów regulatora $\mathcal{G}(z^{-1})$ oraz $\mathcal{B}(z^{-1})\mathcal{F}(z^{-1})$. W tym celu wyznacza się wyrażenie na błąd globalny, co wymaga wyeliminowania z zależności (4.5), (4.6) i (4.7) wyrażeń na wejście i wyjście obiektu. W efekcie otrzymuje się:

$$\varepsilon_i = H_i(z^{-1})\mathcal{F}(z^{-1})e_i, \tag{4.8}$$

gdzie (pomijając w dalszym ciągu operator $z^{-1}$)

$$H_i(z^{-1}) = H_i = \frac{\mathcal{C}B_iF_i}{\mathcal{C}B_iF_i - B_iF_i\mathcal{G}z^{-k} - \mathcal{B}\mathcal{F}G_iz^{-k}} \tag{4.9}$$

Istotną trudnością dalszej analizy jest niestacjonarność ciągu $\varepsilon_i$ (por. (4.8) i (4.9)), uniemożliwiająca stosowanie hipotezy ergodycznej. Stąd rozpatruje się wyłącznie zbieżność asymptotyczną dla tak dużych wartości

i, że można przyjąć $G_i \approx G$ oraz $B_iF_i \approx BF$. Wówczas

$$H_i = H = \frac{\mathcal{C}BF}{\mathcal{C}BF - BF\,\mathcal{G}z^{-k} + \mathcal{B}\mathcal{F}\,Gz^{-k}} \tag{4.10}$$

oraz

$$\mathcal{E}_i = H\mathcal{F}e_i \tag{4.11}$$

Ponieważ wyrazy wolne licznika i mianownika H są równe sobie, można przedstawić H w postaci rozwinięcia

$$H = 1 + h_1z^{-1} + \ldots + h_mz^{-m} + \ldots \tag{4.12}$$

Rozwinięciem tym można się posługiwać tylko wtedy, gdy obiekt jest minimalnofazowy. Wówczas bowiem (por. (4.10)) H jest stabilne i $h_m \to 0$ dla $m \to \infty$. Liniowość zależności (4.11) sprawia, że $\mathcal{E}_i$ jest niezależne od kolejności wykonywania operacji filtracji $\mathcal{F}(z^{-1})$ oraz $H(z^{-1})$. To znaczy $H(z^{-1})$ dobrane w sposób minimalizujący wariancję wyrażenia $H(z^{-1})e_i$ minimalizuje również wariancję wyrażenia $\mathcal{F}(z^{-1})H(z^{-1})e_i$. Stąd ponieważ

$$E\left\{\left[H(z^{-1})e_i\right]^2\right\} = \mathcal{N}^2(1 + h_1^2 + \ldots + h_m^2 + \ldots), \tag{4.13}$$

to minimum tej wariancji wystąpi dla $h_1 = \ldots = h_m = \ldots = 0$, a więc gdy licznik $H(z^{-1})$ będzie równy mianownikowi, czyli gdy

$$BF\,\mathcal{G} = \mathcal{B}\mathcal{F}G \tag{4.14}$$

A więc minimalizacja wariancji błędów $\mathcal{E}_i$ daje parametry wielomianów BF oraz G, będące rozwiązaniem równania wielomianowego (4.14). Jest ono równoważne układowi 2n+k-1 równań liniowych z 2n+k niewiadomymi (wielomiany równania (4.14) zawierają dwa nieznane składniki wolne $b_0$ i $g_0$, lecz tylko jedno równanie składników wolnych $b_0\gamma_0 = \beta_0g_0$). Praktycznie oznacza to, że parametry wielomianów G i BF nie są dla rozpatrywanego układu regulacji asymptotycznie zbieżne z p. 1 do odpowiednich parametrów wielomianów $\mathcal{G}$ i $\mathcal{B}\mathcal{F}$. Aby uzyskać taką zbieżność, należy znać któryś ze składników wolnych, np. $b_0$. Wówczas bowiem rozwiązaniem równania (4.14) jest $BF = \mathcal{B}\mathcal{F}$ oraz $G = \mathcal{G}$, a więc pozostałe parametry wielomianów BF i G dążą z p. 1 do odpowiednich parametrów wielomianów obiektu.

## 5. ZAKOŃCZENIE

Przedstawiony stosunkowo złożony przykład wykazał, że praktyczne zastosowanie optymalizacyjnego kryterium zbieżności z p. 1 nie nastręcza większych trudności, dając zarazem interesujący wgląd w mechanizmy, od których zbieżność ta zależy.

## Dodatek 1. Zbieżność z prawdopodobieństwem jeden

### Definicja 1

Ciąg zmiennych losowych $\{x_i\}$ jest zbieżny z p. 1 do zmiennej losowej x, co zapisuje się w postaci:

$$P\{\lim_{i\to\infty} x_i = x\} = 1,$$

jeżeli dla dowolnie małych $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ istnieje takie $i_0(\varepsilon,\delta)$, że

$$P\{|x_i - x| < \varepsilon, \forall i > i_0\} > 1 - \delta,$$

gdzie $P\{\ \}$ oznacza prawdopodobieństwo.

Przykład: prawo wielkich liczb

Niech $\{x_i\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie. Jeżeli $\mu = E\{x_i\}$, to

$$P\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \mu\} = 1,$$

czyli średnia arytmetyczna dąży z p. 1 do wartości oczekiwanej.

## Dodatek 2. Elementy teorii martyngałów

### Definicja 2

Ciąg zmiennych losowych $\{y_i\}$ jest nazywany martyngałem[x)], jeżeli

$$E\{y_{n+1}\}|y_0,\ldots,y_n| = y_n,$$

gdzie $E\{.|.\}$ jest warunkową wartością oczekiwaną.

---

x) Martingale (d'orig. arabe). Système de jeu qui prétend assurer un bénéfice certain par un augmentation progressive de la mise. (Nouveau Petit Larousse, 1968).

Przykład 2

Rozpatruje się ciąg absolutnie fair $\{x_i\}$ zdefiniowany zależnościami

$$E\{x_0\} = 0$$
$$E\{x_{n+1} \mid x_0,\dots,x_n\} = 0$$

Wtedy ciąg $\{y_i\}$, gdzie

$$y_n = x_0 + \dots + x_n + c, \quad n = 0,1,\dots,i$$

jest martyngałem, gdyż

$$E\{y_{n+1} \mid y_0,\dots,y_n\} = E\{y_{n+1} \mid x_0,\dots,x_n\} = y_n$$

Twierdzenie 1 (pr. Feller (1981))

Ciąg $\{y_i\}$ jest martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$y_n = \sum_{j=0}^{n} x_j + c$$

dla $\{x_i\}$ będącego ciągiem absolutnie fair.

Twierdzenie 2 o zbieżności martyngałów (Feller (1981))

Niech $\{y_i\}$ będzie martyngałem, dla którego $E\{y_i^2\} \leq M < \infty$, $i=0,1,\dots$ Wówczas istnieje taka zmienna losowa $y < \infty$, że

$$P\{\lim_{i\to\infty} y_i = y\} = 1$$

Dodatek 3. Twierdzenie Kroneckera

Niech $\{c_i\}$ i $\{a_i\}$ będą ciągami liczb rzeczywistych i niech $a_i > 0$ oraz $a_i \to \infty$ dla $i \to \infty$. Wtedy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{a_i} < \infty \Longrightarrow \lim_{i\to\infty} \frac{1}{a_i} \sum_{k=1}^{i} c_k = 0$$

Dowód

Z założeń wynika, że

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{i} \frac{c_k}{a_k} = 0$$

Ponieważ $a_n > a_{n-1} > \ldots > a_1 > 0$, to zachodzi

$$\frac{1}{a_i}\sum_{k=1}^{i} c_k < \sum_{k=1}^{i}\frac{c_k}{a_k},$$

z czego wynika twierdzenie.

Dodatek 4. Wyprowadzenie zależności (2.11)

$$V_N = \sum_{i=1}^{N}(y_i - y_{Mi})^2 = \sum_{i=1}^{N}(y_i^2 - 2y_i\underline{w}_N^T\underline{\varphi}_{i-1} + \underline{w}_N^T\underline{\varphi}_{i-1}\underline{\varphi}_{i-1}^T\underline{w}_N)$$

Warunek konieczny i wystarczający istnienia minimum daje

$$\frac{\partial V_N}{\partial \underline{w}_N} = \sum_{i=1}^{N}(-2\underline{\varphi}_{i-1}y_i + 2\underline{\varphi}_{i-1}\underline{\varphi}_{i-1}^T\underline{w}_N) = \underline{0}$$

Stąd wyrażenie na estymator wg najmniejszych kwadratów

$$\hat{\underline{w}}_N = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\underline{\varphi}_{i-1}\underline{\varphi}_{i-1}^T\right)^{-1}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\underline{\varphi}_{i-1}y_i \qquad (+)$$

Z równania obiektu (2.4) wynika, że

$$\underline{\varphi}_{i-1}y_i = \underline{\varphi}_{i-1}\underline{\varphi}_{i-1}^T\underline{\omega} + \underline{\varphi}_{i-1}e_i,$$

co po obustronnym sumowaniu daje:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\underline{\varphi}_{i-1}y_i = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\underline{\varphi}_{i-1}\underline{\varphi}_{i-1}^T\right)\underline{\omega} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\underline{\varphi}_{i-1}e_i,$$

a stąd

$$\underline{\omega} = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\underline{\varphi}_{i-1}\underline{\varphi}_{i-1}^T\right)^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\underline{\varphi}_{i-1}y_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\underline{\varphi}_{i-1}e_i\right)$$

Uwzględniając (+) otrzymuje się

$$\hat{\underline{w}}_n - \underline{\omega} = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \underline{\varphi}_{i-1}\underline{\varphi}_{i-1}^T\right)^{-1} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \underline{\varphi}_{i-1} e_i$$

LITERATURA


[1] Åström K.J., Wittenmark B.: On Self-Tuning Regulators. Automatica, vol. 9, 1973, pp. 185-199.

[2] Feller W.: Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, tom II, PWN, Warszawa 1981.

[3] Goodwin G.C., Payne R.L.: Dynamic System Identification: Experiment Desing and Data Analysis. New York, 1977, Academic Press.

[4] Ljung L.: Consistency of the Least-Squares Identification Methods. IEEE Trans. Aut. Control, vol. AC-21, 1976, pp. 779-781.

[5] Niederliński A.: The global error approach to the convergence and accuracy of complex recursive identification algorithms. W pracy pod red. R. Isermanna "Identification and System Parameter Estimation", vol. 2, str. 1195-1202, Pergamon Press, Oxford 1980.

[6] Niederliński A.: Nowa metoda analizy zbieżności i dokładności rekurencyjnych algorytmów identyfikacji i adaptacji. Prace VIII Krajowej Konferencji Automatyki, tom I, ss. 241-245, PKNT NOT, Szczecin 1980.


Recenzent: Prof. dr inż. Tadeusz Kaczorek

Wpłynęło do Redakcji: kwiecień 1983 r.

ОПТИМАЛИЗАЦИОННЫЙ КРИТЕРИЙ СХОДИМОСТИ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ ОДИН ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Р е з ю м е

Показано, что дисперсия глобальной ошибки идентификации методом наименьших квадратов достигает минимума для оценки вектора параметров равной действительному вектору параметров тогда и только тогда, когда оценка вектора параметров сходится с вероятностью один к действительному вектору параметров. Дан пример применения оптимализационного критерия для оценки сходимости алгоритма самонастраивающейся регуляции.

OPTIMIZATION CRITERION FOR THE CONVERGENCE WITH PROBABILITY ONE FOR IDENTIFICATION OF DYNAMIC PLANTS

S u m m a r y

It has been proved that the global identification error variance in the LS method achieves minimum for the estimates of parameters equal to the true values if and only if the estimates of parameter vector is convergent with probability one to the true parameter vector. The optimization criterion has been used to estimate a convergance of a self- tunning algorithm.