

Zbigniew OGONOWSKI

WRAZLIWOŚĆ, STABILNOŚĆ I WŁASNOŚCI NADAŻNE
ALGORYTMU IFP REGULACJI DYSKRETNEJ

Streszczenie. W pracy omówiono podstawowe własności algorytmu regulacji dyskretnej, którego budowa opiera się na impulsowej funkcji przejścia obiektu. Wykazano małą wrażliwość układu regulacji z tym algorytmem na zmianę parametrów obiektu. Zanalizowano stabilność układu i wykazano, że jest to układ estetyczny 1 rzędu.

1. WSTĘP

W artykule [3] wyprowadzono i omówiono podstawowe cechy algorytmu regulacji, którego budowa opiera się na dyskretnej, impulsowej funkcji przejścia (algorytm IFP). Niniejszy artykuł jest kontynuacją wymienionego i ma na celu przedstawienie szeregu pozostałych własności algorytmu.

Zostanie rozpatrzony układ jednowymiarowej, dyskretnej regulacji stowartościowej, z obiektem liniowym, asymptotycznie stabilnym i minimalno-fazowym, z zakłóceniami w postaci skoku jednostkowego spowodowanymi na wyjście obiektu. Obiekt jest opisany za pomocą sumy spłotowej:

$$\bar{y}(i) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{g}_j u(i-j-k), \quad (1)$$

gdzie: $\bar{y}(i)$ - wyjście obiektu, \bar{g}_j - parametry funkcji wagi obiektu, $u(\cdot)$ - sterowanie, k - dyskretny czas opóźnienia. Równanie modelu powstaje przez "obcięcie" funkcji wagi w chwili n :

$$y(i) = \sum_{j=0}^n g_j u(i-j-k), \quad (2)$$

gdzie: $y(i)$ - wyjście modelu, g_0, g_1, \dots, g_n - zidentyfikowane parametry funkcji wagi; g_0 jest pierwszym parametrem różnym od zera, bowiem dyskretny czas opóźnienia k został explicite uwzględniony w równaniu modelu.

Dla takiego układu przy przyjęciu wymagania na trajektorię uchybu regulacji:

$$e(j) = \alpha e(j-1) \quad j = 1, 1+1, \dots \quad (3)$$

gdzie:

$$|\alpha| < 1 \quad (4)$$

oraz $i-1$ - chwila bieżąca, w [3] wyprowadzono algorytm IFP w postaci:

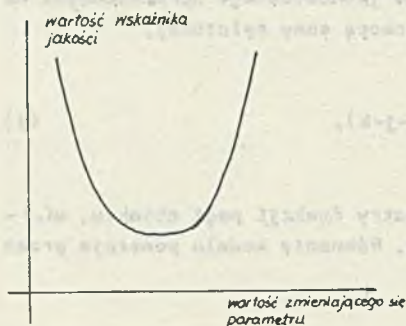
$$u(i) = \frac{1}{g_0} \left\{ \sum_{j=1}^n g_j \left[(1-\alpha)u(i-j-k-1) + \alpha u(i-j-1) - u(i-j) \right] + g_0 \left[(1-\alpha)u(i-k-1) + \alpha u(i-1) \right] + (1-\alpha)e(i-1) \right\} \quad (5)$$

gdzie $e(\cdot)$ - wartość uchybu regulacji.

Poniżej omówiono wrażliwość układu z algorytmem IFP na zmianę parametrów obiektu, stabilność (twierdzenie formułujące warunek wystarczający stabilności) i własności nadążne.

2. WRAZLIWOŚĆ UKŁADU NA ZMIANĘ PARAMETRÓW OBIEKTU

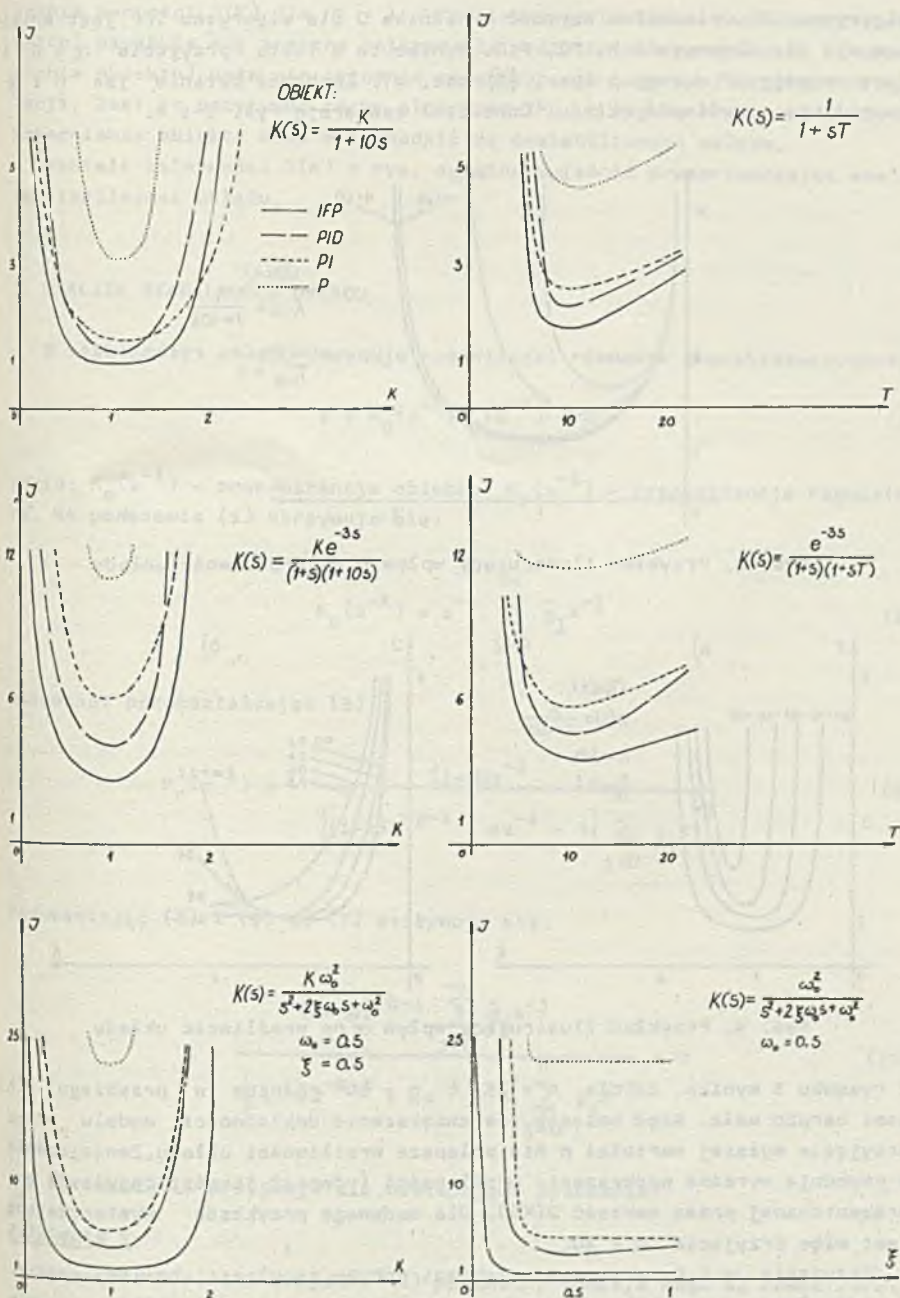
Wrażliwość układu na zmianę parametrów obiektu można badać obserwując wpływ zmian wyróżnionego parametru obiektu na wartość określonego wskaźnika jakości regulacji (rys. 1). Zależność tę dobrze jest porównać z podobnymi zależnościami dla dyskretnych algorytmów P, PI i PID, które są stosunkowo mało wrażliwe. W niniejszej pracy jako badany wskaźnik jakości przyjęto sumę kwadratów uchybu regulacji dla 100 okresów impulsowania:



Rys. 1. Wpływ zmian parametru obiektu na wartość wskaźnika jakości

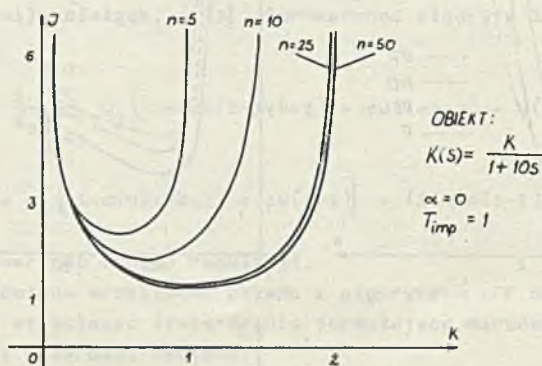
$$J = \sum_{j=0}^{99} e^2(j) \quad (6)$$

Parametry algorytmów P, PI oraz PID zostały dobrze dobrane tak, aby zminimalizować (6). Rysunek 2 przedstawia zależność $J(p)$, gdzie p jest zmieniającym się parametrem dla kilku wybranych obiektów. We wszystkich prezentowanych przypadkach przyjęto: $n = 30$, $\alpha = 0$, okres impulsowania $T_1 = 1$. Z rysunku 2 wynika, że algorytm IFP jest co najmniej równie mało wrażliwy na zmianę parametrów obiektu co dyskretne algorytmy P, PI oraz PID. W niektórych przypadkach widać wyraźną wyższość

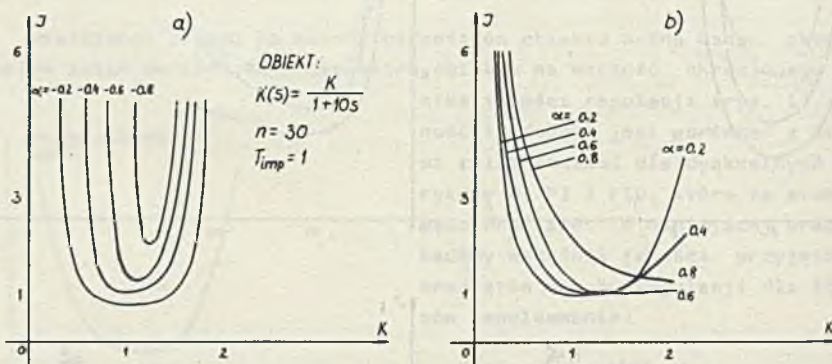


Rys. 2. Zależność $J(p)$ dla wybranych obiektów

algorytmu IFP. Minimalna wartość wskaźnika J dla algorytmu IFP jest mniejsza niż dla algorytmów P, PI, PID. Wynika to z faktu przyjęcia $\alpha = 0$ i "wystarczająco" dużego n (por. [3] pkt. 4). Zachodzi pytanie jak n i α kształtują wrażliwość układu. Odpowiedź zawierają rys. 3 i 4.



Rys. 3. Przykład ilustrujący wpływ n na wrażliwość układu



Rys. 4. Przykład ilustrujący wpływ α na wrażliwość układu

Z rysunku 3 wynika, że dla $n = 25$ i $n = 50$ różnica w przebiegu $J(K)$ jest bardzo mała. Stąd wniosek, że zwiększanie dokładności modelu przez przyjęcie wyższej wartości n nie polepsza wrażliwości układu. Zmniejszenie n powoduje wyraźne pogorszenie wrażliwości (również jakości regulacji reprezentowanej przez wartość $J(K)$). Dla badanego przykładu wystarczające jest więc przyjęcie $n = 30$.

Przyjęcie $\alpha < 0$ pogarsza przebiegi uchybu regulacji, bowiem wprowadza oscylacje. Z rysunku 4a wynika, że również wrażliwość układu jest w tym przypadku większa. Rysunek 4b ilustruje wrażliwość układu dla $\alpha > 0$. Przy rosnącym α , kosztem pewnego pogorszenia jakości regulacji (zwiększ-

szenie wartości $J(K)$ dla $K = 1$ - "najlepszej" wartości zmienianego parametru) uzyskuje się znaczne polepszenie wrażliwości: parametr K (wzmocnienie obiektu) może się istotnie zwiększyć nie pogarszając jakości regulacji. Jest to pozytywna cecha algorytmu IFP, z reguły bowiem zwiększenie wzmocnienia obiektu może doprowadzić do destabilizacji układu.

Kształt zależności $J(K)$ z rys. 4 można wyjaśnić przeprowadzając analizę stabilności układu.

3. ANALIZA STABILNOŚCI UKŁADU

O stabilności układu decydują pierwiastki równania charakterystycznego

$$1 + K_o(z^{-1})K_r(z^{-1}) = 0, \quad (7)$$

gdzie: $K_o(z^{-1})$ - transmitancja obiektu, $K_r(z^{-1})$ - transmitancja regulatora. Na podstawie (1) otrzymuje się:

$$K_o(z^{-1}) = z^{-k} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{g}_j z^{-j} \quad (8)$$

Natomiast przekształcając (5):

$$K_r(z^{-1}) = - \frac{(1-\alpha)z^{-1}}{[(1-\alpha)z^{-k-1} + \alpha z^{-1} - 1] \sum_{j=0}^n g_j z^{-j}} \quad (9)$$

Podstawiając (8) i (9) do (7) otrzymuje się:

$$1 - \frac{(1-\alpha)z^{-k-1} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{g}_j z^{-j}}{[(1-\alpha)z^{-k-1} + \alpha z^{-1} - 1] \sum_{j=0}^n g_j z^{-j}} = 0 \quad (10)$$

Dla uproszczenia przyjmuje się następujące założenia:

Założenia 1

Pominięte w równaniu modelu (2) parametry funkcji wagi są równe zero:

$$\bar{g}_j = 0 \quad \text{dla } j = n+1, n+2, \dots$$

Założenie 2

Błąd identyfikacji parametrów funkcji wagi uwzględnionych w równaniu modelu (2) jest jednakowy i reprezentowany przez liczbę δ :

$$\bar{g}_j = \delta g_j \quad \text{dla } j = 0, 1, \dots, n$$

Założenie 2 jest zawsze spełnione, jeśli obiekt i model będą się różnić wartością wzmocnienia. Założenie 1 nie jest zbyt silne, jeśli się weźmie pod uwagę fakt, że n i okres impulsowania można tak dobrać, aby \bar{g}_j dla $j > n$ było dostatecznie małe (założono asymptotyczną stabilność obiektu).

Wobec powyższych założeń równanie (10) przyjmie postać:

$$\sum_{j=0}^n g_j z^{-j} [(1-\alpha)(1-\delta)z^{-k-1} + \alpha z^{-1} - 1] = 0 \quad (11)$$

Zgodnie z założeniami 1 i 2 oraz założeniem, że obiekt jest minimalnofazowy, równanie:

$$\sum_{j=0}^n g_j z^{-j} = 0 \quad (12)$$

posiada stabilne pierwiastki (pierwiastek z^{-1} jest stabilny, jeżeli znajduje się na zewnątrz koła jednostkowego). O stabilności układu decyduje wobec tego pierwiastki równania:

$$(1-\alpha)(1-\delta)z^{-k-1} + \alpha z^{-1} - 1 = 0 \quad (13)$$

Dla $k=0$ otrzymuje się:

$$0 < \delta < \frac{2}{1-\alpha} \quad (14)$$

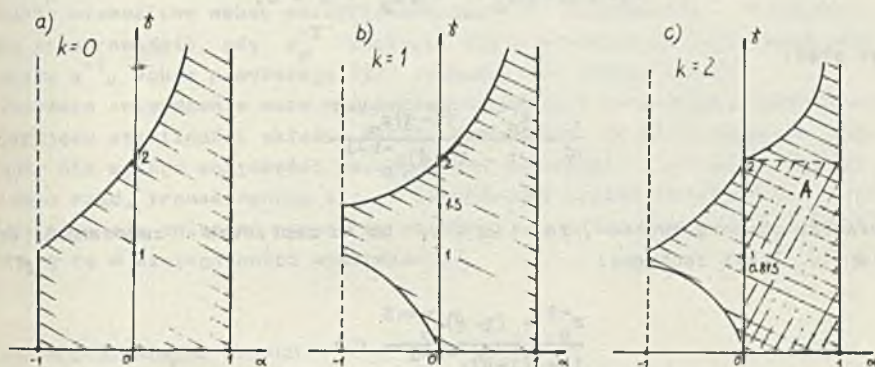
dla $k=1$:

$$\delta > 0 \quad \text{i} \quad \delta < \frac{2-\alpha}{1-\alpha} \quad \text{i} \quad \delta < -\frac{2}{1-\alpha}$$

dla $k=2$

$$\delta > 0 \quad \text{i} \quad 3(1-\alpha)(1-\delta) - \alpha + 3 > 0 \quad \text{i} \quad 3(1-\alpha)\delta + 4\alpha > 0 \quad \text{i} \quad 2 - (1-\alpha)\delta > 0 \quad \text{i} \quad [3(1-\alpha)(1-\delta) - \alpha + 3] [3(1-\alpha)\delta + 4\alpha] - (1-\alpha)\delta [2 - (1-\alpha)\delta] > 0$$

W każdym z powyższych przykładów należy uwzględnić warunek (4). Stąd powstają obszary stabilności jak na rys. 5.



Rys. 5. Obszary stabilności układu dla różnych wartości dyskretnego czasu opóźnienia

W badaniach symulacyjnych, które posłużyły m.in. do wyznaczenia zależności pokazanych na rys. 4 obiekt był zdyskretyzowanym obiektem ciągłym z ekstrapolatorem zerowego rzędu, stąd dyskretny czas opóźnienia dla obiektu z rys. 4 był równy 1. Porównując rys. 4 z rys. 5b łatwo wyjaśnić kształt zależności $J(K)$. Dla $\alpha < 0$ (rys. 4a) zakres zmian wzmocnienia K (zmiany te reprezentuje wartość parametru δ) był niewielki, stąd przy maleniu α ramiona krzywej $J(K)$ zbliżają się do siebie. Dla $\alpha > 0$ (rys. 4b) zakres zmian wzmocnienia rośnie, stąd polepsza się wrażliwość układu.

Z rys. 5 wynika, że przy wzroście dyskretnego czasu opóźnienia k obszar stabilności zawęża się. Można intuicyjnie przypuszczać, że jeśli α i δ będą w obszarze A (rys. 5c), to układ pozostanie stabilny niezależnie od wartości k . Własność tę ujmujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Jeśli obiekt jest liniowy, asymptotycznie stabilny i minimalnofazowy, jeśli spełnione są założenia 1 i 2 oraz $0 < \alpha < 1$ i $0 < \delta < 2$ to układ z algorytmem regulacji (5) jest stabilny.

Dowód

Z poprzednich rozważań wynika, że twierdzenie jest spełnione, jeśli równanie (13) ma stabilne pierwiastki. Dowód można przeprowadzić nie wprost:

Niech istnieje niestabilny pierwiastek (13):

$$|z_p^{-1}| < 1 \quad (15)$$

Ponieważ zachodzi:

$$(1-\alpha)(1-\beta)z_p^{-k-1} + \alpha z_p^{-1} - 1 = 0,$$

więc stąd:

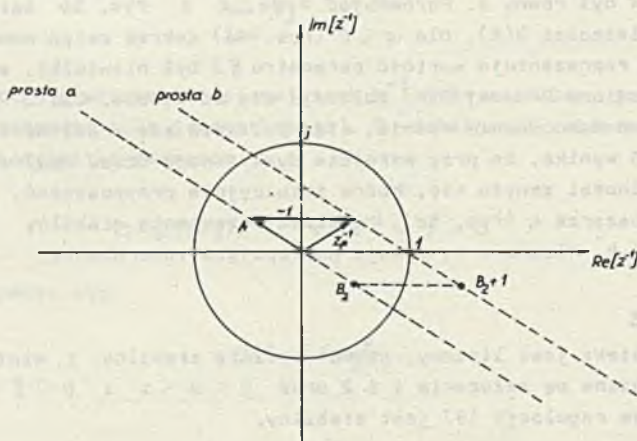
$$\frac{1}{\alpha} = \frac{z_p^{-1} - (1-\beta)z_p^{-k-1}}{1 - (1-\beta)z_p^{-k-1}} \quad (16)$$

Wystarczy obecnie wykazać, że $1/\alpha < 1$, bo to zaprzecza założeniu, że $0 < \alpha < 1$. Jeśli zachodzi:

$$\frac{z_p^{-1} - (1-\beta)z_p^{-k-1}}{1 - (1-\beta)z_p^{-k-1}} < 1,$$

to również:

$$\frac{z_p^{-1} - 1}{(1-\beta)z_p^{-k-1} - 1} > 0 \quad (17)$$



Rys. 6. Wyjaśnienie nierówności (17)

Fakt, że (17) jest spełnione tłumaczy rys. 6. Na rys. 6 $A = z_p^{-1} - 1$. Nierówność (17) będzie spełniona tylko wtedy, gdy zwroty wektorów A oraz B ($B = (1-\beta)z_p^{-k-1} - 1$) będą zgodne (kierunki muszą być identyczne, bowiem lewa strona (17) jest liczbą rzeczywistą jako że $1/\alpha$ jest liczbą rzeczywistą). Aby kierunki A i B były zgodne, wartość $(1-\beta)z_p^{-k-1}$ musi się

znaleźć na prostej b (tak, by po odjęciu od $(1-\delta)z_p^{-k-1}$ wartości 1 wynik, tzn. B , znalazł się na prostej a). Aby zwroty A i B były przeciwne $|(1-\delta)z_p^{-k-1}|$ musi być większy od 1 (rys. 6, punkty B_2, B_{2+1}). Jest to jednakże niemożliwe wobec poczynionych założeń. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić, gdy z_p^{-1} znajduje się w pozostałych ćwiartkach płaszczyzny z^{-1} . Wobec powyższego (17) zachodzi, co kończy dowód.

Powyższe twierdzenie może być potraktowane jako formułujące warunek wystarczający stabilności układu. Należy podkreślić, że sformułowanie tego warunku nie wymaga znajomości szczególnych informacji o obiekcie takich, jak np.: rząd, transmitancja itp. Z twierdzenia wynika jednocześnie jak dalece mogą się zmieniać parametry obiektu, aby układ pozostał stabilny (dotyczy to w szczególności wzmocnienia).

4. WŁASNOŚCI NADAŻNE UKŁADU

Transmitancja nadążna układu regulacji dana jest przez:

$$G_n(z^{-1}) = \frac{K_r(z^{-1})K_o(z^{-1})}{1 + K_r(z^{-1})K_o(z^{-1})}$$

stawiając (8) i (9) do (18) otrzymuje się:

$$G_n(z^{-1}) = \frac{(1-\alpha)z^{-k-1} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{g}_j z^{-j}}{\left[(1-\alpha)z^{-k-1} + \alpha z^{-1} - 1 \right] \sum_{j=0}^n g_j z^{-j} - (1-\alpha)z^{-k-1} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{g}_j z^{-j}} \quad (19)$$

Ponieważ

$$\lim_{z \rightarrow \infty} G_n(z^{-1}) = 1,$$

więc uchyb ustalony dla wymuszenia skokowego jest równy 0, co wskazuje że układ z algorytmem IFP jest układem regulacji astatycznej. Poniżej zostanie wykazane, że jest to astatyzm 1 rzędu.

Przyjmując założenia 1 i 2 otrzymuje się:

$$G_n(z^{-1}) = \frac{(1-\alpha)\delta z^{-k-1}}{1 - \alpha z^{-1} - (1-\alpha)(1-\delta)z^{-k-1}} \quad (20)$$

Ile wynosi uchyb w stanie ustalonym, gdy wymuszenie jest sygnałem narastającym liniowo?

Ponieważ transmitancja uchybowa:

$$G_U(z^{-1}) = 1 - G_n(z^{-1}), \quad (21)$$

to wykorzystując (20) otrzymuje się:

$$G_U(z) = \frac{z^{k+1} - \alpha z^k - 1 + \alpha\delta}{z^{k+1} - \alpha z^k - (1-\alpha)(1-\delta)} \quad (22)$$

Uchyb ustalony dla wymuszenia w postaci sygnału narastającego liniowo:

$$\begin{aligned} e_{ust} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} G_U(z) \frac{z}{(z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{k+1} - \alpha z^k - 1 + \alpha\delta}{(z-1)[z^{k+1} - \alpha z^k - (1-\alpha)(1-\delta)]} \\ &= \frac{(1-\alpha)^{k+1}}{(1-\alpha)\delta} \end{aligned} \quad (23)$$

Uchyb ustalony jest w tym wypadku tym większy, im większe jest opóźnienie w obiekcie. Można go zmniejszyć przez zwiększenie wzmocnienia w układzie, ale to może z kolei doprowadzić do destabilizacji.

Łatwo zauważyć, że dla wymuszeń wyższych rzędów uchyb ustalony jest nieograniczony. Omawiany układ jest więc układem astatycznym 1 rzędu.

5. UWAGI KOŃCOWE

W artykule omówiono podstawowe własności algorytmu regulacji dyskretnej, którego budowa opiera się na funkcji wagi obiektu. Układ regulacji z tym algorytmem, jak okazano, jest mało wrażliwy na zmianę parametrów obiektu. Sformułowano i udowodniono twierdzenie podające warunek wystarczający stabilności układu. Wykazano, że jest to astatyczny układ regulacji z rzędem astatyzmu 1.

Problemy regulacji przy wykorzystaniu funkcji wagi obiektu są do tej pory mało zbadane. W szeregu pracach autorzy z reguły ograniczają się do problemów identyfikacji parametrów funkcji wagi. Autora niniejszego artykułu inspirowały w szczególności prace [1] i [2].

LITERATURA

- [1] Kahan Foigel J., Richalet J.: Self-adapting IDCOM. Identification and System Parameter Estimation, vol. 2, IFAC symposium, Darmstadt 1979.

- [2] Foulard C., Gentil S., Sandraz J.: Commande et régulation par calculateur numérique. Editions Eyrolles, Paris 1979.
- [3] Ogonowski Z.: Algorytm regulacji dyskretnej wykorzystujący funkcję wagi, ZN Automatyka, 73, Gliwice 1984.

Recenzent: Doc. dr inż. Jerzy Pułaczewski

Wpłynęło do Redakcji: marzec 1983 r.

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ, УСТОЙЧИВОСТЬ И СЛЕДЯЩИЕ СВОЙСТВА
ДИСКРЕТНОГО АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ ИФП

Р е з ю м е

В статье представлены главные свойства дискретного алгоритма управления ИФП. Алгоритм ИФП использует импульсную переходную функцию линейных дискретных систем. Рассматриваются только системы, которые имеют один вход и один выход. Показываются также результаты касающиеся чувствительности и устойчивости таких систем и описываются следящие свойства.

ROBUSTNESS, STABILITY AND TRACKING PROPERTIES
OF DISCRETE CONTROL ALGORITHM IFP

S u m m a r y

The essential properties of control algorithm IFP are described. This algorithm bases upon the impulse response representation of linear discrete systems. Only single input - single output case is discussed. The results pertaining to the robustness and the stability in such systems are derived as well as tracking properties are considered.