ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: AUTOMATYKA z. 73 Nr kol. 798

Andrzej ŚWIERNIAK

Dariusz MOSKA

SYNTEZA REGULATORÓW DLA UKŁADÓW Z NIEPEWNOŚCIĄ - PODEJŚCIE DETERMINISTYCZNE

Streszczenie. W pracy proponuje się deterministyczne podejście do problemu sterowania w warunkach niepewnośsi wynikającej z niedoskonałości modelu i niepełnej informacji o zakłóceniach. Przyjmuje się nierównościowy model niepewności i formułuje się związany z nią wtórny cel sterowania. Do syntezy regulatora wykorzystuje się własność punktu stałego w odpowiednio zdefiniowanej przestrzeni wyjść.

1. WPROWADZENIE

Sterowanie obiektami wymaga konstrukcji mniej lub bardziej dokładnych opisów matematycznych zwanych modelami. Zawsze są one jednak jedynie aproksymacją rzeczywistych relacji zachodzących w obiekcie i zawierają zmienne, które trzeba uważać jako niepewne. Są nimi parametry obiektu, które są nieznane bądź niedokładnie znane oraz niektóre wejścia działające na obiekt (zakłócenia, sygnały wiodące), o których informacja jest niedokładna lub niepełna. Mimo tej niepewności cel, jaki stawia sobie projektant układu regulacji polega na takim doborze regulatora, aby zapewnić żądane zachowanie się układu. W tym celu musi on uwzględnić istniejącą niepewność w modelu na etapie syntezy regulatora bądź przynajmniej zdawać sobie sprawę z jej skutków, analizując możliwe zachowanie się układu. Może na przykład wybrać podejście stochastyczne (np.: [1], [2]), zadowalając się (nieprecyzyjnie mówiąc) przeciętnym zachowaniem się systemu. Inna droga polega na przyjęciu modeli o rozkładzie ograniczonym lub rozmytych (np.: [3], [4]) i rozwiązaniu zadań sterowanie minimaksowego lub o żądanym stopniu ryzyka (np.: [5], [6]). Wszystkie te modele dają się rozpatrzyć jako szczególne przypadki ogólnego modelu z niepewnością [7]. W [7] zaproponowano podejście do syntezy regulatora zapewniającego zadowalające zachowanie się układu oparte na specjalnej postaci twierdzenia o punkcie stałym w przestrzeni Mengera. Również twierdzenie o punkcie stałym jest podstawą syntezy regulatora w przypadku deterministycznego podejścia, jakie będzie rozważone w pracy. Zakłada się tu, że znane są możliwe wielkości zmiennych niepewnych oraz istnieje dostęp do informacji o odpowiedziach układu, która wykorzystywana jest w sterowaniu.

2. MODEL UKŁADU Z NIEPEWNOŚCIĄ

Przyjmować będziemy, że model podstawowy układu (bez niepewności) ma postać wejściowo-wyjściową, tzn.:

$$y = f(u), \tag{1}$$

gdzie u oznacza sterowania, y - wyjście, a f jest odwzorowaniem z przestrzeni sterowań w przestrzeń wyjść. Zakładać będziemy, że zarówno sterowania, jak i wyjścia są elementami odpowiednich przestrzeni metrycznych zupełnych.

Ponieważ, jak już wspomniano, model podstawowy jest jedynie aproksymacją rzeczywistej zależności między zmiennymi obiektu, to przyjmując, iż znane jest ograniczenie normy błędu tej aproksymacji, należałoby raczej opisać obiekt modelem nierównościowym:

$$\|y - f(u)\| \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

gdzie ε jest miarą błędu aproksymacji [8], a $\|\cdot\|$ określa normę w przestrzeni wyjść. Model ten, który nazwiemy modelem rozszerzonym jest odwzorowaniem sterowania (punktowego) w wyjście Y (zbiorowe) określone jako

$$Y = \left\{ y : \| y - f(u)\| \leqslant \varepsilon \right\} \tag{3}$$

Zatem wyjścia modelu są domkniętymi, ograniczonymi podzbiorami przestrzeni metrycznych. Przestrzeń wyjść $\mathcal{Y}$ składająca się ze zbiorów Y jest przestrzenią metryczną z metryką Haussdorffa $d(\cdot,\cdot)$ zdefiniowaną jako:

$$d(Y_1,Y_2) = \max\left\{ \sup_{y_1 \in Y_1} \inf_{y_2 \in Y_2} \|y_1 - y_2\|, \quad \sup_{y_2 \in Y_2} \inf_{y_1 \in Y_1} \|y_1 - y_2\| \right\} \tag{4}$$

$Y_1, Y_2 \in \mathcal{Y}$.

Model (2) określa zatem niepewność predykcji wyjścia obiektu na podstawie znajomości sygnału sterującego.

Pozostaje do określenia charakteryzacja niepewności tkwiącej w samym operatorze f, np. w postaci niepewnych parametrów tego odwzorowania. Wpływ niepewności w tym przypadku może być określony przez pewną miarę odległości $d(Y_1, Y_2)$ dla wyjść Y_1, Y_2 wywołanych odpowiednio sterowaniami u_1, u_2. Przyjmować będziemy, że tak scharakteryzowany model z niepewnością będzie spełniał pewien uogólniony odpowiednik warunku Lipschitza. W tym celu wprowadźmy funkcję ryzyka $W[d(Y_1, Y_2), x]$ (x zmienna rzeczywista) o własnościach:

1) $W(\cdot, 0) = 0$.
2) Jeśli $x_1 \leqslant x_2$, to $W(p, x_1) \leqslant W(p, x_2)$ dla każdego $p \geqslant 0$.

3) $W[d(Y_1, Y_2), x] = 1$ dla każdego $x > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Y_1 = Y_2$.

4) $W[d(Y_1, Y_2), x_1 + x_2] \geqslant \mathrm{Min}\{W[d(Y_1, Y_3), x_1], W[d(Y_3, Y_2), x_2]\}$.

5) $\lim\limits_{x \to x_0} W(., x) = W(., x_0)$.

6) $\lim\limits_{x \to \infty} W(., x) = 1$.

Uogólniony odpowiednik warunku Lipschitza będzie miał postać:

$$W[d(Y_1, Y_2), lx] \geqslant V(x - \varrho(u_1, u_2)) \tag{5}$$

dla pewnego $l > 0$ i pewnej niemalejącej lewostronnie ciągłej funkcji V takiej, że $V(0) = 0$ oraz wszystkich sterowań u_1, u_2 i odpowiadających im wyjść Y_1, Y_2.

$\varrho(., .)$ jest metryką w przestrzeni sterowań.

Funkcją $W(., .)$ posiadającą własności 1-6 jest np.: funkcja skoku jednostkowego $H(.)$.

Wówczas

$$W[d(Y_1, Y_2), x] = H[x - d(Y_1, Y_2)] \tag{6}$$

Jeśli przyjąć również $V(.)$ jako skok jednostkowy, wówczas warunek (5) będzie równoważny warunkowi Lipschitza (dla odległości wyjść w postaci metryki Hausdorffa). Przypadek ten dla liniowych stacjonarnych modeli podstawowych przedyskutowano w [9]. Inną postacią funkcji ryzyka może być następująca funkcja $W(., .)$:

$$W[d(Y_1, Y_2), x] = \begin{cases} W_1(x), & Y_1 \neq Y_2, \quad W_1(0) = 0 \\ H(x) & Y_1 = Y_2 \end{cases} \tag{7}$$

gdzie $W_1(.)$ jest dowolną funkcją niemalejącą lewostronnie ciągłą, zbieżną do 1 przy x dążącym do ∞, różną od $H(x)$. Podobnie

$$W[d(Y_1, Y_2), x] = \begin{cases} W_2\left(\dfrac{x}{d(Y_1, Y_2)}\right) & Y_1 \neq Y_2 \\ H(x) & Y_1 = Y_2 \end{cases} \tag{8}$$

gdzie W_2 jako funkcja x spełnia te same warunki co W_1 w (7), może być przyjęta jako funkcja ryzyka.

Zauważmy np., że warunek 4 jest spełniony dla W_2, gdyż:

$$W_2\left(\frac{x_1 + x_2}{d(Y_1, Y_2)}\right) \geqslant W_2\left(\frac{x_1 + x_2}{d(Y_1, Y_3) + d(Y_3, Y_2)}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \min\left\{W_2\left(\frac{x_1}{d(Y_1, Y_3)}\right),\ W_2\left(\frac{x_2}{d(Y_3, Y_2)}\right)\right\} \tag{9}$$

W ten sposób niepewność w obiekcie opisana jest przez (3), określający elementy przestrzeni wyjść Y oraz funkcję ryzyka $W(.\ ,\ .)$.

3. CEL STEROWANIA

Celem sterowania jest zapewnienie wymaganego zachowania się sygnałów wyjściowych w układzie. Wymaganie, aby odpowiedź układu pokrywała się z pewnym pożądanym sygnałem jest jednak z reguły nierealizowalne nawet w przypadku pełnej informacji o obiekcie z uwagi na istniejące ograniczenia na sterowanie. Zastępowane jest więc wymaganiem spełnienia ograniczeń, minimalizacji wskaźnika jakości, nadążania z zadanym błędem za określoną trajektorią itp. Tym bardziej w przypadku modeli z niepewnością realizacja celu sterowania jest niemożliwa. Wymaganie dokładnej realizacji zadanej odpowiedzi układu zastąpimy żądaniem utrzymania wyjścia (określonego przez zbiór Y) w określonym otoczeniu pożądanej odpowiedzi. Otoczenie to określimy przy tym w oparciu o przyjętą funkcję ryzyka. Tak więc cel sterowania może być zatem zdefiniowany jako zawieranie się wszystkich możliwych wyjść układu w zadanym zbiorze z określonym stopniem ryzyka.

Zdefiniujmy otoczenie $N_{Y^o}(x, r)$ w następujący sposób:

$$N_{Y^o}(x, r) = \left\{Y : W\left[d(Y, Y_o), x\right] \geqslant 1 - r\right\} \tag{10}$$

Zbiór ten nazwiemy (x, r) - otoczeniem punktu Y^o. Jeśli więc pierwotny cel sterowania polega na osiąganiu przez układ pożądanego wyjścia y^o, cel wtórny (dla modelu z niepewnością) będzie interpretowany jako przynależność wyjścia Y do $N_{\{Y^o\}}(x, r)$, przy czym wielkości x oraz r będą zależały od ε oraz $W(.\ ,\ .)$.

Pokażemy, że przy pewnych założeniach cel ten może być osiągnięty przez zastosowanie regulatora rozumianego jako odwzorowanie:

$$u = g(Y) \tag{11}$$

(z przestrzeni wyjść w przestrzeń sterowań), spełniające określone warunki. Uzyskanie tych warunków będzie możliwe przez zastosowanie twierdzenia o punkcie stałym dla pewnego typu odwzorowań zwężających.

4. TWIERDZENIE O PUNKCIE STAŁYM

Definicja otoczenia (10) umożliwia określenie pewnych pojęć w przestrzeni wyjść z określoną funkcją ryzyka. I tak:
Ciąg $\{Y_n\}$ będziemy nazywali podstawowym, jeśli dla każdego x i każdego r istnieje takie M, że skoro tylko $n, m > M$, to

$$Y_m \in N_{Y_n}(x, r), \quad \text{czyli} \quad W[d(Y_m, Y_n), x] \geq 1-r.$$

Ciąg $\{Y_n\}$ będziemy nazywali zbieżnym do punktu Y, jeśli dla każdego x i każdego r istnieje takie M, że skoro tylko $n > M$, to

$$Y_n \in N_Y(x, r).$$

Te pojęcia umożliwiają zdefiniowanie przestrzeni wyjść zupełnej jako takiej, w której każdy ciąg podstawowy jest zbieżny do elementu tej przestrzeni.

Z kolei określimy odwzorowanie zwężające. Będziemy mówili, że odwzorowanie $P(Y)$ przekształcające przestrzeń wyjść w siebie jest zwężające, jeśli istnieje taka stała k $0 < k < 1$, że dla każdego $x > 0$ i wszystkich Y_1, Y_2 zachodzi relacja:

$$W[d(Y_1, Y_2), x] \leq W[d(P(Y_1), P(Y_2)), kx] \tag{12}$$

Zauważmy, że jeśli funkcja ryzyka jest określona przez (6), wówczas zwężanie w sensie określonym powyżej jest równoważne "zwykłemu" zwężeniu, tzn. w sensie metryki $d(.,.)$.

Słuszne jest następujące twierdzenie o punkcie stałym:

<u>Twierdzenie 1</u>: Niech przestrzeń wyjść z funkcją ryzyka $W(. , .)$ będzie przestrzenią zupełną, zaś $P(.)$ odwzorowaniem zwężającym. Wówczas istnieje jedyny punkt stały Y w przestrzeni wyjść taki, że

$$P(Y_o) = Y_o \tag{13}$$

Co więcej każdy ciąg iteracji odwzorowania P na dowolnym punkcie Y jest zbieżny do punktu stałego, czyli $P^n(Y) = Y_o$.

<u>Dowód</u>: Przypuśćmy, że istnieje $Y_1 \neq Y_o$, takie że $P(Y_1) = Y_1$, $P(Y_o) = Y_o$. Wtedy istnieje $x > 0$ takie, że $W[d(Y_1, Y_o), x] < 1$. Ale

$$W[d(Y_1, Y_o), x] = W[d(P^n(Y_1), P^n(Y_o)), x] \geq$$

$$\geq W\left[d(P(Y_1), P(Y_o)), \frac{x}{k^n}\right] \to 1, \quad \text{gdy } n \to \infty,$$

czyli

$$Y_1 = Y_0,$$

co prowadzi do sprzeczności.
Obecnie weźmy $x > 0$, $r > 0$, $m > n$, $Y_n = P^n(Y)$. Wówczas mamy

$$W[d(Y_m, Y_n), x] \geqslant \mathrm{Min}\Big\{W[d(Y_n, Y_{n+1}), x - kx],$$

$$W[d(Y_{n+1}, Y_m), kx]\Big\}$$

Z kolei

$$W[d(Y_n, Y_{n+1}), x - kx] \geqslant W[d(Y_{n-1}, Y_n), \frac{x - kx}{k}] \geqslant$$

$$\ldots \geqslant W[d(Y, Y_1), \frac{x - kx}{k^n}]$$

oraz

$$W[d(Y_{n+1}, Y_m), kx] \geqslant \mathrm{Min}\Big\{W[d(Y_{n+1}, Y_{n+2}), kx - k^2x],$$

$$W[d(Y_{n+2}, Y_m), k^2x]\Big\}$$

Skąd

$$W[d(Y_m, Y_n), x] \geqslant \mathrm{Min}\Big\{\mathrm{Min}\Big\{W[d(Y, Y_1), \frac{x - kx}{k^n}],$$

$$W[d(Y_{n+1}, Y_{n+2}), kx - k^2x]\Big\}, W[d(Y_{n+2}, Y_m), k^2x]\Big\}$$

Powtarzając to postępowanie otrzymamy

$$W[d(Y_m, Y_n), x] \geqslant \mathrm{Min}\Big\{W[d(Y, Y_1), \frac{x - kx}{k^n}],$$

$$W[d(Y_{n+2}, Y_m), k^2 x]\Big\} \geqslant W[d(Y, Y_1), \frac{x - kx}{k^n}]$$

Ale możemy przyjąć dla dostatecznie dużego n:

$$W[d(Y, Y_1), \frac{x - kx}{k^n}] \geqslant 1 - r,$$

czyli

$$Y_m \in N_{Y_n}(x, r)$$

Ponieważ zakładaliśmy, że przestrzeń jest zupełna, więc

$$Y_m \in N_{Y_o}(x, r)$$

Zatem $Y_n \longrightarrow Y_o$, ale

$$W\left[d(Y_n, Y_o), \frac{x}{k}\right] \geqslant W\left[d(Y_n, Y_o), x\right] \geqslant 1 - r$$

Czyli również

$$P(Y_n) \in N_{P(Y_o)}(x, r),$$

lecz z pokazanej poprzednio jednoznaczności punktu stałego wynika, że

$$P(Y_o) = Y_o.$$

5. SYNTEZA REGULATORA

Wróćmy do zadania sterowania podanego w punkcie (3). Polega ono na znalezieniu regulatora:

$$u = g(Y)$$

takiego, aby odpowiedź układu rozumiana jako:

$$\left\{y : \|y - f(u)\| \leqslant \varepsilon\right\} \quad \text{należała do } (x, r)$$

otoczenia żądanej odpowiedzi $\left\{y^o\right\}$.

Załóżmy, że

$$Y^o = \left\{y : \|y - f(u^o)\| \leqslant \varepsilon\right\} \tag{15}$$

jest elementem przestrzeni wyjść takim, że

$$Y^o \in N_{\{y^o\}}(x, r) \tag{16}$$

i wybierzmy g tak, że dla $u = u^o$

$$g(Y^o) = u^o \tag{17}$$

wówczas Y^o jest punktem stałym w tym sensie, że:

$$Y^o = \left\{ y : \| y - f(g(Y^o)) \| \leqslant \varepsilon \right\}. \tag{18}$$

Jeśli punkt ten będzie punktem przyciągania, to wówczas zadanie syntezy zostanie wykonane. Zagwarantowane to jest, jeśli złożenie operatora obiektu (3) z operatorem sterowania (11) jest zwężające w sensie (12). Umożliwia to określenie warunków w postaci następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2. Niech przestrzeń wyjść z funkcją ryzyka $W(.\,,.)$ będzie przestrzenią zupełną. Załóżmy, że obiekt spełnia uogólniony odpowiednik warunku Lipschitza (5) dla pewnej funkcji $V(.)$ i pewnej stałej l oraz posiada własność "(x, r) sterowalności" do punktu y^o, tzn. istnieje u^o spełniające (15) dla Y^o określonego przez (16).

Wówczas istnieje regulator (14), który umożliwia spełnienie celu regulacji, tzn. zapewnia, że wyjścia obiektu leżą w (x, r) otoczeniu żądanej odpowiedzi y^o.

Dowód: Przyjmijmy, że regulator $g(Y)$ ma własność (17). Wówczas zachodzi (18) i Y^o jest punktem stałym.

Niech ponadto regulator ma tę własność, że istnieje taka stała dodatnia $c < \frac{1}{l}$, że dla każdego $w > 0$ oraz wszystkich wyjść Y_1', Y_2' zachodzi:

$$V\left[cw - \varrho\left(g(Y_1'), g(Y_2')\right)\right] \geqslant W\left[d(Y_1', Y_2'), w\right] \tag{19}$$

Przyjmując $0 < k = lc < 1$ oraz $w = \frac{x}{c}$ i łącząc (19) z (5) otrzymujemy (po podstawieniu za u_1, u_2 odpowiednio $g(Y_1')$, $g(Y_2')$):

$$W\left[d(Y_1, Y_2), lx\right] \geqslant W\left[d(Y_1', Y_2'), \frac{lx}{k}\right], \tag{20}$$

przy czym

$$Y_i = \left\{ y : \| y - f[g(Y_i')] \| \leqslant \varepsilon \right\} \tag{21}$$

dla $i = 1,2$.

Zatem odwzorowanie Y' w Y będące złożeniem operatora obiektu z operatorem sterowania jest zwężające. Posiada zatem jedyny punkt stały, którym jest Y^o i jest to punkt przyciągania. Cel sterowania jest więc w układzie realizowany, gdyż Y^o należy do (x, r)-otoczenia y^o.

6. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono warunki, przy których możliwa jest realizacja celu sterowania w postaci osiągalności otoczenie zadanej odpowiedzi układu z określonym ryzykiem dla przypadku nierównościowego modelu układu. Warunki te wynikają z zastosowania udowodnionego w pracy twierdzenia o punkcie stałym dla specjalnie zdefiniowanej klasy odwzorowań zwężających. Otrzymane w ten sposób rozwiązanie może więc stawiać zbyt ostre wymagania, gdyż ma postać warunków wystarczających często za silnych. Ponadto realizacja regulatora dla konkretnej postaci operatora obiektu może być sprawą trudną i wymaga często znacznego nakładu pracy. Podejście przedstawione w pracy otwiera jednak możliwości poszukiwania rozwiązań w klasie regulatorów o odmiennej interpretacji niż w klasycznych metodach syntezy układów sterowania. Regulatory te mają bowiem charakter odwzorowań zbiorowo-punktowych, dostosowane są więc niejako do obiektu, którego model z niepewnością ma charakter odwzorowania punktowo-zbiorowego.

LITERATURA

[1] Åström,K.J.: Introduction to Stochastic Control Theory, Academic Press, New York 1970.

[2] Gessing R.: Zastosowanie zasady minimalizacji i uśredniania do wyznaczania algorytmów sterowania optymalnego, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, t. XXI, z. 4, 1976.

[3] Schweppe F.: Uncertain Dynamic Systems, Prentice Hall, Englewood 1973.

[4] Zadeh L.A.: Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans. on SMC, SMC-3, 1973, 28-44.

[5] Bertsekas D.P., Rhodes I.B.: Sufficiently informative functions and the minimax feedback control of uncertain dynamic systems, IEEE Trans. on AC, AC-18, 1973, 117-125.

[6] Świerniak A.: State inequalities approach to control systems with uncertainty, IEE Proceedings, Pt. D, 129, 1982, 271-275.

[7] Świerniak A.: A unified approach to controllers desing for uncertain systems, International J. Control, 37, 1983, 463-470.

[8] Świerniak A.: Wpływ błędu aproksymacji MNK na jakość sterowania obiektami dynamicznymi. Podstawy Sterowania t. 11, z. 2, 1981, 161-168.

[9] Moska D.: Praca dyplomowa magisterska (niepublikowana) Gliwice 1983.

Recenzent: Doc. dr Krystyna Bieńkowska-Lipińska

Wpłynęło do Redakcji: czerwiec 1983 r.

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ СИСТЕМ С НЕУВЕРЕННОСТЬЮ - ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Р е з ю м е

В работе предлагается детерминистический подход для решения задач управления в условиях неуверенности, вытекающих из несовершенства модели и неполной информации о помехах. Принимается неравенственная модель неуверенности и определяется связанная с ней вторичная цель управления. Для синтеза регулятора используется особенность постоянной точки в соответственно определённом пространстве выходов.

CONTROLLERS DESIGN FOR UNCERTAIN SYSTEMS-DETERMINISTIC APPROACH

S u m m a r y

Deterministic approach to control problems in the presence of uncertainty resulting from imperfect model and unknown or imperfectly known disturbances is proposed. Inequality model of uncertainty is used and the secondary control objective is formulated. Controllers design is based on the fixed point property for especially defined output spaces.