ENERGETYKA z. 41

JERZY TOMECZEK

PSEUDOUSTALONY PRZEPŁYW CIEPŁA W PRZECIWPRĄDOWYM REGENERATORZE CIEPŁA

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYT NAUKOWY Nr 325 – GLIWICE 1972

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 325

JERZY TOMECZEK

PSEUDOUSTALONY PRZEPŁYW CIEPŁA W PRZECIWPRĄDOWYM REGENERATORZE CIEPŁA

PRACA HABILITACYJNA Nr 110

Przewód habilitacyjny otwarto w dniu 11 września 1971 r.

GLIWICE 1972

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Kujawska 2

Nakł 50+170 Ark. wyd. 2,5 Ark. druk. 2,8 Papier offsetowy kl. III, 70×100, 80 g
Oddano do druku 17.12.1971 Podpis. do druku 20 1 1972 Druk ukończ. w lutym 1972
Zam. 1476 16 12 1971 C-23 Cena zł 4,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

E r r a t a

Str.	wzór	Jest	Powinno być
28	31	$\chi = 2\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1} \bar{A}_k(\xi_l) \frac{\sin \xi_l}{\xi_l N(\xi_l)} - 1$	$\chi = 2\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^{n} \bar{A}_k(\xi_l) \frac{\sin \xi_l}{\xi_l N(\xi_l)} - 1$

SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA

Zagadnienia dynamiki procesów cieplnych od wielu lat były przedmiotem naukowych zainteresowań w Katedrach Teorii Maszyn Cieplnych i Energetyki Cieplnej Politechniki Śląskiej. Obecnie są one również kontynuowane w Instytucie Techniki Cieplnej. Szczególnie wiele uwagi poświęcono przepływowi ciepła w regeneratorze ciepła, czego owocem było szereg oryginalnych publikacji. Stosowano przy tym, dla rozwiązania równań różniczkowych zarówno metody analityczne jak i numeryczne.

Pracując w roku akademickim 1970/71 w Katedrze Inżynierii Chemicznej Uniwersytetu w Leeds miałem możliwość stwierdzić, że duże zainteresowanie tym problemem wykazują również zagraniczne ośrodki naukowe i to tak uniwersyteckie jak i przemysłowe. Źródłem tego zainteresowania jest nie tylko hutnictwo żelaza, ale również hutnictwo szkła i chłodnictwo.

Praca moja jest wynikiem kilkuletnich studiów nad tym zagadnieniem w gliwickim środowisku naukowym, pogłębionych rocznymi studiami w Wielkiej Brytanii.

Finansowe poparcie British Council oraz zezwolenie Kierownika Katedry Inżynierii Chemicznej prof. G.G. Haseldena, na wykorzystanie maszyny cyfrowej do celów tej pracy, umożliwiły mi opracowanie pracochłonnego programu na maszynę KDF-9 i wykonanie długiej serii żmudnych obliczeń numerycznych. Tą drogą składam wyżej wymienionym podziękowanie.

WSTĘP

Zagadnienie przepływu ciepła w ciele stałym pod wpływem periodycznie zmiennych zewnętrznych warunków było przedmiotem wielu badań. Regenerator ciepła jest jednym z przykładów tego rodzaju przepływu ciepła. Celem opisania na drodze matematycznej tego bardzo skomplikowanego obiektu fizycznego przyjmowano wiele upraszczających założeń. Tym niemniej dla regeneratora przeciwprądowego przypadek trójwymiarowy (dwie współrzędne geometryczne oraz czas) został rozwiązany dotychczas tylko na drodze numerycznej (7, 3, 32).

Dokładne określenie pola temperatury w regeneratorze ma bardzo ważne praktyczne znaczenie. Celem procesu konstrukcji regeneratora jest znalezienie optimum temperatury podgrzania powietrza, przy której sprawność pieca jest największa i która zapewnia równocześnie dostatecznie długi czas życia regeneratora. Koszt regeneratora stanowi stosunkowo duży udział w koszcie całego urządzenia tak, że możliwość zmniejszenia jego powierzchni grzejnej lub możliwość zastosowania mniej kosztownych materiałów wypełnienia jest zawsze zachęcająca. Regenerator ciepła stanowi nieodłączną całość pieców przemysłowych, w których stosowana jest wysoka temperatura podgrzania powietrza. Nowoczesne rozwiązania technologiczne wykazują tendencję do coraz wyższych temperatur podgrzania. Dla pieca martenowskiego, na przykład, zauważono obniżenie zużycia paliwa o 8–15% w rezultacie zwiększenia temperatury powietrza o 100°C (6). Wymagania te mogą być zaspokojone poprzez modernizację istniejących instalacji lub poprzez budowę nowych rozwiązań. W tym ostatnim przypadku bardzo istotne są badania nad wysokotemperaturowymi materiałami i kształtami wypełnień.

Wiele jest przyczyn powodujących trudności w dokładnym rozwiązaniu pola temperatury w regeneratorze. Do najważniejszych można zaliczyć:

- niejednorodny przepływ gazów w przekroju regeneratora oraz mieszanie się strumieni płynących przez sąsiednie kanały,
- bardzo skomplikowany kształt wypełnienia komplikujący opis warunków brzegowych dla równań przepływu ciepła,
- wysoka temperatura, szczególnie podczas cyklu gazowego, powoduje, że promienisty przepływ ciepła stanowi znaczny udział w całkowitym przepływie ciepła ponieważ gazy te zawierają znaczną ilość wody i dwutlenku węgla. Co więcej, duże różnice temperatur powodują zmianę termicznych parametrów płynów i wypełnienia.

Ze względu na duże znaczenie praktyczne, opracowano wiele metod obliczania temperatury podgrzania. Metody numeryczne były stosowane do dwu- i trójwymiarowych przypadków (12, 15, 17, 18, 25, 27, 30, 31). Długi czas obliczeń jak i olbrzymia niezbędna pamięć maszyny, zwłaszcza dla trzech współrzędnych, są bardzo nieprzyjemną cechą tych rozwiązań.

Termiczne właściwości płynów i materiału wypełnienia nie są jednakowe podczas cyklu grzania i chłodzenia. Z tego względu temperatura podgrzania dmuchu uzależniona jest od sześciu zmiennych zredukowanych i przedstawienie jej na wykresach byłoby bardzo uciążliwe. Szybka metoda obliczania niezbędnych wielkości podczas konstrukcji regeneratora byłaby zatem bardzo pożyteczna. Celem niniejszej pracy jest przedstawienie takiej metody.

OZNACZENIA

A	– pole powierzchni przepływu ciepła dla jednej płyty wypełnienia,
A_f	– pole przekroju kanału dla przepływu płynu przypadającego na jedną płytę wypełnienia,
$a = \frac{\lambda}{\varrho c}$	– dyfuzyjność cieplna wypełnienia,
$B = \frac{A\alpha}{W_f}$	– liczba bezwymiarowa,
$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$	– liczba Biota,
c	– właściwa pojemność cieplna,
$Fo = \frac{a\tau}{R^2}$	– bezwymiarowy czas,
H	– długość regeneratora,
R	– zewnętrzny wymiar płyty wypełnienia (2R = grubość),
s	– liczba zespolona,
$T(\tau) = \frac{t_f(\tau) - t_o(0)}{{}^h t_o(0) - {}^o t_o(0)}$	– bezwymiarowa temperatura płynów,
${}^o T_p$	– bezwymiarowa temperatura podgrzania płynu chłodnego,
t	– temperatura wypełnienia,
t_f	– temperatura płynów,
$t_o(\tau)$	– temperatura płynów na dopływie do regeneratora,
$W_f = A_f \varrho_f c_f w_f$	– pojemność cieplna płynów,
w_f	– prędkość płynów,
X	– współrzędna geometryczna prostopadła do przepływu płynu,
$x = \frac{X}{R}$	– bezwymiarowa współrzędna geometryczna,
Z	– współrzędna geometryczna równoległa do przepływu
$z = \frac{Z}{H}$	– bezwymiarowa współrzędna geometryczna,

α – współczynnik wnikania ciepła,

ϱ – gęstość,

χ – bezwymiarowe ciepło przekazywane w regeneratorze (zdolność akumulacji ciepła),

$\Theta(\tau) = \dfrac{t(\tau) - t_f(\tau)}{{}^h t_o(0) - {}^o t_o(0)}$ – bezwymiarowa temperatura wypełnienia,

$\tau = \tau - \dfrac{H}{w_f}$ – czas,

ξ – dodatnie pierwiastki równania $\xi \, tg \, \xi = Bi$,

dolny indeks f – dotyczy płynu,

górne indeksy o oraz h – dotyczą odpowiednio fazy ochłodzenia i grzania.

1. Przegląd dotychczasowych rozwiązań

Temperatura wypełnienia regeneratora oraz temperatura płynów są funkcją czasu. Tym niemniej, jeżeli regenerator znajduje się pod wpływem stałych warunków zewnętrznych przez dostatecznie długi czas, wówczas pole temperatury powtarza się w każdym kolejnym cyklu. Taki stan jest nazywany stanem pseudoustalonym. Regenerator stanowi część dużego urządzenia cieplnego (zwykle jest to rodzaj reaktora chemicznego), które jest bardzo trudne do opisania pod względem dynamicznym. Z tego względu informacje o pseudoustalonym stanie są często wystarczające w procesie konstrukcji.

Dwa szczególne przypadki regeneratora znalazły wiele analitycznych i numerycznych rozwiązań. Jakkolwiek obydwa są dwuwymiarowe, istnieje pomiędzy nimi zasadnicza różnica. Pierwszy z nich obowiązuje dla tzw. wypełnienia idealnego (18) charakteryzującego się nieskończenie wielką przewodnością cieplną w kierunku prostopadłym do powierzchni styku wypełnienia z płynami. Konsekwentnie zatem brak zmienności temperatury wypełnienia wzdłuż tego kierunku. Temperatura tak wypełnienia jak i płynów są funkcją jedynie czasu i zmiennej Z równoległej do kierunku przepływu płynów. Drugi rodzaj rozwiązań dotyczy regeneratorów krótkich lub takich w których płyny charakteryzują się bardzo dużą pojemnością cieplną. Oznacza to, że pole temperatury w wypełnieniu wyznacza się jedynie jako funkcję czasu i zmiennej X prostopadłej do powierzchni styku wypełnienia i płynów.

Przypadki te charakteryzują się kolejno liczbami $Bi \approx 0$ oraz $B \approx 0$ i tak też będą nazywane w dalszym ciągu.

Wszystkie analityczne rozwiązania otrzymano przy założeniu stałych właściwości termicznych wypełnienia i płynów, jakkolwiek w niektórych rozwiązaniach przyjmowano różne, dla okresu chłodzenia i grzania, właściwości termiczne. Ten ostatni rodzaj założeń nosi nazwę niesymetrycznych.

Istnieją dwa sposoby podejścia do analitycznego rozwiązania periodycznego przepływu ciepła:

a) równania bilansu energii rozwiązuje się jako funkcję czasu i dowolnej temperatury początkowej wypełnienia regeneratora (16, 28, 29). Pseudoustalone pole temperatury otrzymuje się wówczas jako asymptotyczny przypadek dla $Fo \to \infty$. Ten sposób umożliwia analizę dynamiki regeneratora, dotychczas jednak uzyskano rozwiązanie jedynie dla współprądowych i symetrycznych warunków,

b) równania bilansu energii rozwiązuje się jako funkcję czasu w obrębie jednego okresu regeneratora, zaś warunki początkowe zastępuje się warunkami periodyczności. Na tej drodze wiele rozwiązań uzyskano dla symetrycznych (1,8,14,20) i niesymetrycznych (2,3,19) warunków brzegowych.

Dla małych liczb Biota najbardziej zaawansowane rozwiązanie uzyskali Nahavandi i Weinstein (19) a ostatnio również Bes (5), zaś dla małych B liczb Bes i Gdula (2) oraz Bes (3, 4). Pierwsze spośród tych rozwiązań uzyskano dla regeneratorów obrotowych, ale może ono być zastosowane dla każdego innego rodzaju regeneratora. Trójwymiarowe rozwiązanie uzyskano dotychczas jedynie dla symetrycznego i współprądowego przypadku (16, 28).

Oprócz wyżej wspomnianych rozwiązań istnieje szereg innych mniej lub bardziej przybliżonych, spośród których rozwiązania opracowane przez Rummela (23), Hausena (14) i Schacka (24) są powszechnie znane.

Trójwymiarowy przypadek był również badany przez Timofiejewa, Małkina i Szklara. Dokładność podanych rezultatów numerycznych sprawdził Guzik (11) dla B = 0. Stwierdził on przy tym odstępstwa, tych rezultatów, od dokładnych wartości dochodzące do 23%.

W praktyce często stosowane są rozwiązania uzyskane dla małych liczb Biota przy uwzględnieniu modyfikacji współczynnika wnikania ciepła proponowanej przez Hausena (14). Trójwymiarowy problem przekształcony jest w ten sposób w dwuwymiarowy, a współczynnik wnikania ciepła uzależniony od liczby Biota i Fouriera. Zasadnicze założenie tej metody polega na przyjęciu parabolicznego profilu temperatury wypełnienia w kierunku prostopadłym do przepływu płynu. Im mniejsza jest liczba Biota oraz im dłuższy jest czas cyklu, tym mniejszy jest błąd spowodowany tym założeniem, ponieważ czas, podczas którego zniekształcenie profilu temperatury jest największe (tuż po zmianie cyklu), stanowi wówczas niewielki udział w całym czasie cyklu. Ten sposób podejścia do rozwiązania był później wielokrotnie stosowany również przy numerycznych rozwiązaniach (25, 32).

Rozwiązanie będące przedmiotem pracy jest słuszne dla pseudoustalonego stanu i asymetrycznych warunków przepływu ciepła. Bezwymiarowe liczby Bi, Fo i B mogą przyjmować dowolne wartości, jednak ilość wyrazów w szeregach opisujących temperaturę zależy od B i Bi w ten sposób, że im większe B i Bi, tym więcej wyrazów należy uwzględnić, aby uzyskać właściwą dokładność i tym dłuższy jest czas obliczeń.

2. Postawienie zagadnienia

Wypełnienie regeneratora omywane jest na przemian przez gorące gazy spalinowe i chłodne powietrze dmuchu. W momentach rewersji w wypełnieniu znajdują się obydwa płyny tak, że usunięcie płynu poprzedniego wymaga czasu H/w. Czas kolejnego cyklu zatem obliczany jest od chwili całkowitego zapełnienia objętości przez napływający płyn $(\tau - \frac{H}{w})$.

Różne kształty wypełnień stosowane są w praktycznych rozwiązaniach, przy czym ogólną tendencją jest stosowanie coraz wyższych stosunków powierzchni wypełnienia do objętości wypełnienia. W zależności od przeznaczenia regeneratora stosowane są rozmaite kształty wypełnień (18). Spotkać można zatem kształty regularne jak płyty, cylindry lub kratownice oraz bezładne układy materiałów sypkich. Przedmiotem rozważań będzie wypełnienie w kształcie płyt, jakkolwiek można je powtórzyć dla innych regularnych kształtów, np. cylindry lub kule.

2.1. Założenia

W ogólnym przypadku równania bilansu energii w wypełnieniu i płynach przepływających wzdłuż niego są nieliniowymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi.

Dla rozwiązania bardzo złożonych równań bilansu energii niezbędnych jest szereg założeń upraszczających. Niektóre z nich mają na celu uproszczenie postaci równań różniczkowych, inne zaś wynikają z braku odpowiednich danych.

Następujące założenia poczyniono celem rozwiązania zagadnienia:

a) pole temperatury w płycie wypełnienia jest symetryczne w kierunku prostopadłym do przepływu płynu,

b) przewodzenie ciepła w płycie odbywa się tylko w kierunku prostopadłym do przepływu płynu,

c) własności termiczne wypełnienia i płynów są stałe w obrębie jednego okresu,

d) temperatura płynu jest wyrównania w kierunku prostopadłym do jego przepływu,

e) akumulacja masy i energii dla płynów są niewielkie tak, że można je pominąć w odpowiednich bilansach energii,

f) strumienie masy płynów są niezmienne w czasie,

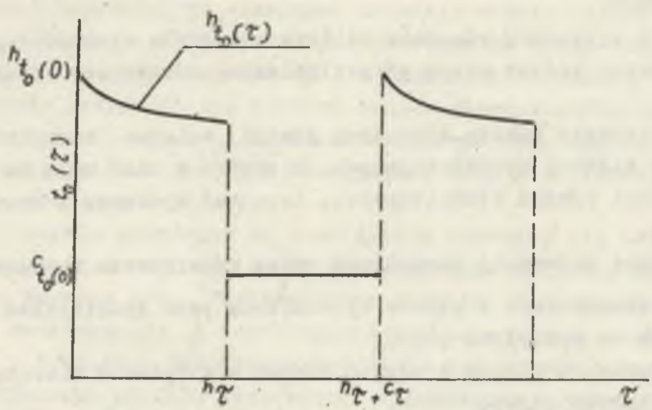
g) przepływ ciepła pomiędzy płytą i płynem odbywa się tylko na drodze konwekcji (wpływ promieniowania uwzględnia się poprzez modyfikację współczynnika wnikania ciepła),

h) temperatura płynu chłodnego (powietrza) na dopływie do regeneratora jest niezmienna, zaś temperatura płynu gorącego (spaliny) jest znaną funkcją czasu (rys. 1),

i) czas trwania rewersji jest niedługi w porównaniu z czasem cyklu.

Dwa z powyższych założeń (zał. b oraz e) wymagają omówienia. Dyskusję wpływu przewodzenia ciepła wzdłuż regeneratora na ilość ciepła przekazywanego przeprowadził Willmott (32). Autor ten oszacował stosunek ciepła przewodzonego wzdłuż wypełnienia do ilości energii przekazywanej w regeneratorze. Dla ceramicznych wypełnień uzyskał on wartość tego stosunku równą $2{,}2 \cdot 10^{-5}$. Cytuje on równocześnie pracę Tiplera, w której stosunek ten wyniósł 10^{-2} w przypadku regeneratorów stosowanych w turbinach gazowych. Wynika stąd, że założenie b można uważać za uzasadnione.

Akumulacja energii w płynach jest mała w porównaniu z akumulacją w wypełnieniu. Przy szybkich zmianach temperatury, jednak, może istnieć zauważalny wpływ tej akumulacji na profil temperatury płynu. Dla przypadku symetrycznego regeneratora współprądowego, opracowanego poprzednio (28), uwzględniono akumulację w bilansie energii dla płynów. W pracy tej nie przedstawiono jednak wpływu tej wielkości na rozwiązanie. Korzystając z wyników tam podanych można przeprowadzić taką analizę, najłatwiej dla wypełnienia idealnego.



Rys. 1. Temperatura płynów $t_o(\tau)$ na dopływie do regeneratora w zależności od czasu τ

Uwzględnienie w obecnej pracy akumulacji energii byłoby kłopotliwe ze względu na asymetryczne warunki przepływu ciepła i przyjętą w związku z tym metodę rozwiązania. Zastosowanie bowiem transformacji Laplace'a do równań bilansu energii w płynach wprowadziłoby do rozważań temperaturę płynu w chwili tuż po rewersji. Wielkości tej nie można by określić dokładnie ze względu na mieszanie się gazów w procesie rewersji. Z drugiej strony, temperaturę tę można przyjąć w sposób przybliżony. Dla długich cykli regeneratora wpływ niedokładności przyjęcia tej wielkości na pole temperatury byłby bardzo mały, w przypadku krótkich cykli, jednak, wpływ ten mógłby być zauważalny. Dla celów tej pracy postanowiono zatem pominąć akumulację energii w płynach.

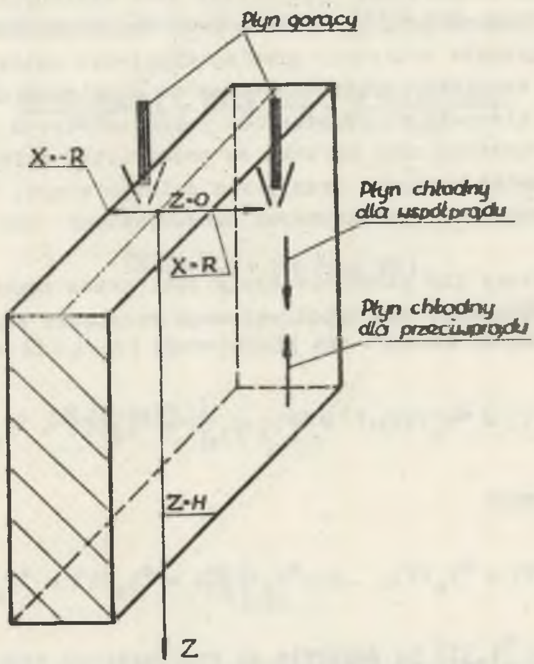
2.2. Równania bilansu energii

Pole temperatury w regeneratorze uzyskuje się w wyniku rozwiązania równań bilansu energii w płycie wypełnienia i omywającej ją płynach. Zgodnie z założeniem b. strumień ciepła przepływający w wypełnieniu wzdłuż współrzędnej Z (rys. 2) jest pomijalny. Równanie Fouriera-Kirchhoffa (26) sprowadza się zatem do postaci

$$\varrho c\frac{\partial t(X,Z,\tau)}{\partial\tau}=\lambda\frac{\partial^2 t(X,Z,\tau)}{\partial X^2}\ . \tag{1}$$

Energia zmagazynowana w wypełnieniu podczas cyklu grzania jest przekazywana w następnej fazie poprzez konwekcję (założenie g.) do płynu zimnego. Pojemność cieplna gazów jest mała w porównaniu z pojemnością cieplną wypełnienia, stąd też można pominąć akumulację energii w płynach (założenie e). Również akumulacja masy gazu jest pomijalna (div(ϱw) = 0), zatem ponieważ temperatura płynu jest wyrównana w przekroju kanału oraz ponieważ przepływ ciepła pomiędzy płynem i wypełnieniem odbywa się na drodze konwekcji, bilans energii dla płynów sprowadza się do postaci

$$A_f\, w_f\, \varrho_f\, c_f \frac{\partial t_f(Z,\tau)}{\partial Z} = \frac{A\alpha}{H}\left(t(R,Z,\tau) - t_f(Z,\tau)\right). \tag{2}$$



Rys. 2. Schemat płyty wypełnienia

W przypadku współprądowego przepływu płynów powyższe równania są aktualne, po zaopatrzeniu ich w odpowiednie górne indeksy, zarówno dla okresu grzania jak i chłodzenia. Dla przeciwprądu natomiast zmienną Z należy zastąpić przez H-Z dla okresu dmuchu powietrza.

2.3. Warunki brzegowe

Założenie symetrycznego pola temperatury w płytach wypełnienia (założenie a) oznacza zerowy strumień ciepła przewodzonego prostopadle do osi Z w miejscu X = 0, czyli

$$\left.\frac{\partial t(X,Z,\tau)}{\partial X}\right|_{X=0} = 0. \tag{3}$$

Na granicy pomiędzy płytą i płynem ($X = R$) ciepło jest transportowane na drodze konwekcji (założenie g). Ciągłość strumienia ciepła narzuca zatem warunek

$$\lambda \frac{\partial t(X,Z,\tau)}{\partial X}\Big|_{X=R} + \alpha(t(R,Z,\tau) - t_f(Z,\tau)) = 0. \tag{4}$$

Dla rozwiązania równania (1) niezbędny jest również warunek początkowy określający temperaturę wypełnienia w chwili $\tau = 0$. Temperaturę tę zdefiniować należy w zależności od przyjętej metody rozwiązania (punkt 1). Jeżeli czas jest obliczany od momentu rozpoczęcia nagrzewania regeneratora, wówczas początkowa temperatura wypełnienia jest wielkością znaną. Ta droga postępowania jednak jest niemożliwa przy analitycznym rozwiązaniu dla asymetrycznych warunków przepływu ciepła. Przyjęcie obliczania czasu od początku każdego kolejnego cyklu wprowadza do rozwiązań dodatkowe niewiadome, którymi są nieznane temperatury na początku okresu grzania i chłodzenia. Ponieważ asymetryczne warunki są przedmiotem zainteresowania, ten tok rozumowania zatem zostanie przyjęty w dalszym ciągu. Sposób wyznaczenia nieznanych temperatur początkowych przedstawiony zostanie w punkcie 3.1.

Warunek początkowy dla płynu określony jest przez znane temperatury na dopływie do regeneratora. Dla współprądowego przypadku warunki te można zapisać:

$$^{h}t_f(0,\tau) = {}^{h}t_0(\tau), \qquad {}^{c}t_f(0,\tau) = {}^{c}t_0(\tau) = {}^{c}t_0(0) \tag{5}$$

dla przeciwprądu zaś:

$$^{h}t_f(0,\tau) = {}^{h}t_0(\tau), \qquad {}^{c}t_f(H,\tau) = {}^{c}t_0(\tau) = {}^{c}t_0(0). \tag{6}$$

Temperatura spalin $^{h}t_0(\tau)$ na dopływie do regeneratora wynika z warunków pracy urządzenia, którego częścią składową jest regenerator.

2.4. Bezwymiarowe równania bilansu energii i warunki brzegowe

Dogodnie jest sprowadzić zależności (1) ... (6) do postaci bezwymiarowej. W ten sposób redukuje się liczba zmiennych, wyniki numeryczne zaś można przedstawić w postaci graficznej.

W miejsce trzech zmiennych niezależnych X, Z oraz τ zostaną wprowadzone zmienne bezwymiarowe x, z oraz Fo. Zmienne zależne $t_f(Z,\tau)$ oraz $t(X,Z,\tau)$ zastąpione zaś zostaną przez $T(z, Fo)$ oraz $\vartheta(x,z,Fo)$.

Bezwymiarowa temperatura płynu zostanie zdefiniowana zależnością

$$T(\tau) = \frac{t_f(\tau) - t_o(0)}{{}^h t_o(0) - {}^o t_o(0)}$$

dla temperatury wypełnienia zaś wprowadzona zostanie wielkość

$$\Theta(\tau) = \frac{t(\tau) - t_f(\tau)}{{}^h t_o(0) - {}^o t_o(0)} .$$

Wprowadzająo powyższe wielkośoi do równań (1) i (2) uzyskuje się

$$\frac{\partial \Theta\,(x,z,Fo)}{\partial Fo} + \frac{\partial T(z,Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta\,(x,z,Fo)}{\partial x^2} \tag{7}$$

oraz

$$\frac{\partial T(z,Fo)}{\partial z} = B\Theta\,(1,z,Fo). \tag{8}$$

Warunki brzegowe (3) i (4) sprowadzają się wówozas do postaoi

$$\left.\frac{\partial \Theta\,(x,z,Fo)}{\partial x}\right|_{x=1} + Bi\,\Theta\,(1,z,Fo) = 0 \tag{9}$$

oraz

$$\left.\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 . \tag{10}$$

Równania (5) i (6) dla warunków poozątkowyoh przyjmą postać

$${}^h T(0,Fo) = {}^h T_o(Fo); \qquad {}^o T(0,Fo) = 0 \tag{11}$$

dla współrądowego przepływu oraz

$${}^h T(0,Fo) = {}^h T_o(Fo); \qquad {}^o T(1,Fo) = 0 \tag{12}$$

dla przeoiwprądowego przepływu.

3. Rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego

Układ równań (7) i (8) zawiera równania różniczkowe cząstkowe o trzech zmiennych niezależnych. Dla ich rozwiązania zastosowane zostaną przekształcenia całkowe celem zredukowania ilości zmiennych. Równania różniczkowe oraz warunki brzegowe i początkowe zostaną najpierw poddane transformacji Laplace'a

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\,Fo} f(Fo)\, dFo . \tag{13}$$

W ten sposób stransformowane równanie (7) przekształcone będzie następnie według transformacji Fouriera

$$\bar{\bar{f}}(\xi,s) = \int_0^1 K(\xi,x)\, \bar{f}(x,s)\, dx , \tag{14}$$

gdzie jądro $K(\xi,x)$ transformacji oraz wartości własne ξ uzależnione są od warunków brzegowych (21). Dla warunków brzegowych (9) i (10) jądro

$$K(\xi,x) = \cos(\xi x)$$

wartości własne ξ_i zaś są dodatnimi pierwiastkami równania

$$\xi \operatorname{tg} \xi = Bi .$$

Odwrotna transformacja określona jest zależnością

$$\bar{f}(x,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K(\xi_i,x)}{N(\xi_i)} \bar{\bar{f}}(\xi_i,s) \tag{15}$$

przy czym norma $N(\xi_i)$ zdefiniowana jest warunkiem ortogonalności

$$\int_0^1 K(\xi_i,x)\, K(\xi_k,x) dx = \begin{cases} N(\xi_i), & i = k \\ 0 , & i \neq k \end{cases} . \tag{16}$$

W wyniku przekształceń (13) i (14) uzyskuje się, po wykonaniu odwrotnego przekształcenia (15), zależność

$$\Theta(x,z,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K(\xi_i,x)}{N(\xi_i)} \frac{\bar{\Theta}(\xi_i,z,0) + \bar{T}(\xi_i,z,0) - s\,\bar{T}(\xi_i,z,s)}{s + \xi_i^2} . \tag{17}$$

Podstawienie powyższej zależności do równania, które uzyskuje się po wykonaniu przekształcenia Laplace'a w równaniu (8) prowadzi do następującego równania różniczkowego

$$\frac{d\bar{T}(z,s)}{dz} = B \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K(\xi_i,1)}{N(\xi_i)} \frac{\bar{\Theta}(\xi_i,z,0) + \bar{T}(\xi_i,z,0)}{s + \xi_i^2} + \tag{18}$$

$$- s B \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K(\xi_i,1)}{N(\xi_i)} \frac{\bar{\bar{T}}(\xi_i,z,s)}{s + \xi_i^2} .$$

Przekształcenie Laplace'a wprowadziło do powyższych zależności temperaturę wypełnienia na początku analizowanego okresu (Fo = 0). Jak wyjaśnione zostało w punkcie 2.3 wyznaczenie tych wielkości jest przedmiotem analizy. Założone zostanie, że ta temperatura początkowa poszukiwana będzie w postaci szeregu

$$\Theta(x,z,0) + T(z,0) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x)\, z^k . \tag{19}$$

Odpowiednia transformata zaś

$$\bar{\Theta}(\xi_i,z,0) + \bar{T}(\xi_i,z,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{A}_k(\xi_i)\, z^k , \tag{20}$$

gdzie $\bar{A}_k(\xi_i)$ będą szukanymi współczynnikami.

Ponieważ temperatura płynu jest niezależna od współrzędnej x (założenie d), zatem transformacja Fouriera tej wielkości ma postać:

$$\bar{T}(\xi_i,z,s) = \bar{T}(z,s) \frac{\sin \xi_i}{\xi_i} . \tag{21}$$

Rozwiązanie równania (18) szukane będzie w postaci szeregu potęgowego

$$\bar{T}(z,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k(s)\, z^k . \tag{22}$$

Podstawienie zależności (21) i (22) do równania (18) dostarcza następującego wzoru rekurencyjnego dla współczynników $\bar{a}_l(s)$

$$\bar{a}_l(s) = (-1)^l \, \bar{a}_0(s) \, B^l \frac{1}{l!} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{K(\xi_k,1)}{N(\xi_k)} \frac{\sin\xi_k}{\xi_k} \frac{s}{s+\xi_k^2} \right)^l +$$

$$+ \sum_{m=0}^{l-1} (-1)^{l-1-m} B^{l-m} \frac{m!}{l!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K(\xi_k,1)}{N(\xi_k)} \frac{\bar{A}_m(\xi_k)}{s+\xi_k^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K(\xi_n,1)}{N(\xi_n)} \cdot \right. \tag{23}$$

$$\left. \cdot \frac{\sin\xi_n}{\xi_n} \frac{s}{s+\xi_n^2} \right)^{l-m-1} .$$

Wyraz wolny $\bar{a}_0(s)$ w szeregu (22) wyznacza się na podstawie znanych temperatur płynów na dopływie do regeneratora określonych równaniami (11) lub (12). Dla półokresu dmuchu temperatura płynu chłodnego na dopływie nie zmienia się w obrębie czasu ${}^{c}Fo$, zatem ${}^{c}\bar{a}_0(s) = 0$.

Równania (17), (22) i (23) określają, po wykonaniu w nich odwrotnej transformacji Laplace'a, zależność pomiędzy temperaturą wypełnienia i płynu oraz niewiadomą temperaturą wypełnienia na początku okresu. Ta ostatnia wielkość wyznaczona zostanie z warunków periodyczności.

Powyższe zależności obowiązują zarówno dla grzania jak i chłodzenia, należy je jedynie opatrzyć górnymi indeksami h lub c. Dla przepływu przeciwprądowego jednakże należy zastąpić odpowiednio wielkość z przez (1-z). W tym przypadku szereg opisujący temperaturę płynu miałby postać

$${}^{c}\bar{T}(z,s) = \sum_{k=0}^{\infty} {}^{c}\bar{a}_k(s) \, (1-z)^k . \tag{24}$$

3.1. Warunek periodyczności pola temperatury

Po upływie dostatecznie długiego czasu działania regeneratora stabilizuje się cykliczne pole temperatury. Wprawdzie w obrębie każdego cyklu temperatura zarówno wypełnienia jak i płynów ulegają zmianie, ale zmiany te są identyczne w kolejnych cyklach regeneratora. Oznacza to, że temperatura wypełnienia na początku grzania jest równa temperaturze na końcu chłodzenia i odwrotnie. W postaci bezwymiarowej związek ten można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} 1 + {}^{h}T(z,{}^{h}Fo) + {}^{h}\Theta(x,z,{}^{h}Fo) &= {}^{c}T(z,0) + {}^{c}\Theta(x,z,0) \\ 1 + {}^{h}T(z,0) + {}^{h}\Theta(x,z,0) &= {}^{c}T(z,{}^{c}Fo) + {}^{c}\Theta(x,z,{}^{c}Fo) . \end{aligned} \tag{25}$$

Podstawiając zależności (17) i (24) oraz (23) do powyższych równań uzyskuje się dla regeneratora przeciwprądowego

$$\left.\begin{aligned}
&1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K({}^h\xi_i, x)}{N({}^h\xi_i)}\, e^{-{}^h\xi_i^2\, {}^hFo} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{A}_k({}^h\xi_i) z^k + \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K({}^h\xi_i, x)}{N({}^h\xi_i)}\, {}^h\xi_i \sin {}^h\xi_i\, e^{-{}^h\xi_i^2 Fo} * \sum_{k=0}^{\infty} {}^ha_k(Fo) z^k \Big|_{Fo={}^hFo} = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K({}^c\xi_i, x)}{N({}^c\xi_i)} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\bar{A}}_k({}^c\xi_i)(1-z)^k \\
&1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K({}^h\xi_i, x)}{N({}^h\xi_i)} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\bar{A}}_k({}^h\xi_i) z^k = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K({}^c\xi_i, x)}{N({}^c\xi_i)}\, e^{-{}^c\xi_i^2\, {}^cFo} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\bar{A}}_k({}^c\xi_i)(1-z)^k + \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K({}^c\xi_i, x)}{N({}^c\xi_i)}\, {}^c\xi_i \sin {}^c\xi_i\, e^{-{}^c\xi_i^2 Fo} * \sum_{k=0}^{\infty} {}^ca_k(Fo)(1-z)^k \Big|_{Fo={}^cFo}
\end{aligned}\right\}, \quad (26)$$

gdzie symbol $*$ oznacza operację splotu

$$f_1(Fo) * f_2(Fo) = \int_0^{Fo} f_1(y)\, f_2(Fo - y) dy.$$

Współczynniki $a_k(Fo)$ otrzymuje się po wykonaniu odwrotnego przekształcenia Laplace'a w równaniu (23), przy czym zawierają one w sobie również nieznane współczynniki A_k dla określenia temperatury wypełnienia.

3.2. Wyznaczenie temperatury wypełnienia na początku półokresów grzania i chłodzenia

Równania (26) stanowić będą podstawę dla wyznaczenia funkcji $\bar{\bar{A}}_k({}^h\xi_i)$ oraz $\bar{\bar{A}}_k({}^c\xi_i)$. W tym celu wykorzystuje się warunek ortogonalności (16). Dogodnie jest pierwsze z równań (26) pomnożyć przez $K({}^h\xi_1, x)dx$, drugie zaś przez $K({}^c\xi_1, x)dx$ i następnie scałkować w obszarze 0–1. W wyniku takiego postępowania uzyskuje się dwa nieskończone zbiory równań. W praktycznych obliczeniach, dla zapewnienia pewnej dokładności, niezbędna jest tylko ograniczona ilość wartości własnych ξ_i. Ilość tych wielkości zależy głównie od liczb Biota i Fouriera. Ograniczając zatem ich ilość do liczby n redukuje się wspomniane nieskończone układy równań do układu 2n równań:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sin {}^h\xi_1}{{}^h\xi_1} + e^{-{}^h\xi_1^2\,{}^hFo}\sum_{k=0}^{\infty}\bar{A}_k({}^h\xi_1)z^k + {}^h\xi_1 \sin {}^h\xi_1\, e^{-{}^h\xi_1^2 Fo} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} {}^ha_k(Fo)z^k\Big|_{Fo={}^hFo} - \sum_{i=1}^{n}\frac{M({}^h\xi_1,{}^o\xi_i)}{N({}^o\xi_i)}\sum_{k=0}^{\infty}\bar{A}_k({}^o\xi_i)(1-z)^k \\
&\frac{\sin {}^o\xi_1}{{}^o\xi_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{M({}^h\xi_i,{}^o\xi_1)}{N({}^h\xi_i)}\sum_{k=0}^{\infty}\bar{A}_k({}^h\xi_i)z^k = \\
&= e^{-{}^o\xi_1^2\,{}^oFo}\sum_{k=0}^{\infty}\bar{A}_k({}^o\xi_1)(1-z)^k + {}^o\xi_1 \sin {}^o\xi_1\, e^{-{}^o\xi_1^2 Fo} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} {}^oa_k(Fo)(1-z)^k\Big|_{Fo={}^oFo}
\end{aligned}\right\} , \quad (27)$$

gdzie

$$M({}^h\xi_i, {}^o\xi_k) = \int_0^1 K({}^h\xi_i,x)\,K({}^o\xi_k,x)\,dx = K({}^h\xi_i,1)\,K({}^o\xi_k,1)\,\frac{{}^hBi-{}^oBi}{{}^h\xi_i^2-{}^o\xi_k^2} . \quad (28)$$

Założone zostanie, że szeregi (22) lub (24) ograniczone zostaną do (m+1) wyrazów. Porównując w równaniu (27) wyrażenia o jednakowych potęgach współrzędnej z uzyskuje się 2(m+1)n równań algebraicznych

$$[W][A] = [S] , \quad (29)$$

gdzie

$$[A] = \begin{bmatrix} \bar{A}_o(^h\xi_1) \\ \hline \bar{A}_o(^h\xi_n) \\ \hline \bar{A}_m(^h\xi_1) \\ \hline \bar{A}_m(^h\xi_n) \\ \hline \bar{A}_o(^o\xi_1) \\ \hline \bar{A}_o(^o\xi_n) \\ \hline \bar{A}_m(^o\xi_1) \\ \hline \bar{A}_m(^o\xi_n) \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sin {}^h\xi_1}{{}^h\xi_1} - {}^h\xi_1 \sin {}^h\xi_1\, e^{-{}^h\xi_1^2 Fo} * {}^h a_o(Fo)\Big|_{Fo={}^hFo} \\ \hline -\dfrac{\sin {}^h\xi_n}{{}^h\xi_n} - {}^h\xi_1 \sin {}^h\xi_n\, e^{-{}^h\xi_n^2 Fo} * {}^h a_o(Fo)\Big|_{Fo={}^hFo} \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ -\dfrac{\sin {}^o\xi_1}{{}^o\xi_1} \\ \hline -\dfrac{\sin {}^o\xi_n}{{}^o\xi_n} \\ \hline 0 \\ \hline 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz główna [W] zaś określona jest na stronie następnej.

$$
[W]=\begin{bmatrix}
e^{-{}^h\xi_1^2\,{}^hFo} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{M({}^h\xi_1,{}^c\xi_1)}{N({}^c\xi_1)} & -\frac{M({}^h\xi_1,{}^c\xi_n)}{N({}^c\xi_n)} & -\frac{M({}^h\xi_1,{}^c\xi_1)}{N({}^c\xi_1)} & -\frac{M({}^h\xi_1,{}^c\xi_n)}{N({}^c\xi_n)} & -\frac{M({}^h\xi_1,{}^c\xi_1)}{N({}^c\xi_1)} & -\frac{M({}^h\xi_1,{}^c\xi_n)}{N({}^c\xi_n)} \\
0 & e^{-{}^h\xi_n^2\,{}^hFo} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{M({}^h\xi_n,{}^c\xi_1)}{N({}^c\xi_1)} & -\frac{M({}^h\xi_n,{}^c\xi_n)}{N({}^c\xi_n)} & -\frac{M({}^h\xi_n,{}^c\xi_1)}{N({}^c\xi_1)} & -\frac{M({}^h\xi_n,{}^c\xi_n)}{N({}^c\xi_n)} & -\frac{M({}^h\xi_n,{}^c\xi_1)}{N({}^c\xi_1)} & -\frac{M({}^h\xi_n,{}^c\xi_n)}{N({}^c\xi_n)} \\
{}^hX(1,0,1,1) & {}^hX(1,0,n,1) & e^{-{}^h\xi_1^2\,{}^hFo} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\binom{1}{1}\frac{M({}^h\xi_1,{}^c\xi_1)}{N({}^c\xi_1)} & -\binom{1}{1}\frac{M({}^h\xi_1,{}^c\xi_n)}{N({}^c\xi_n)} & -\binom{m}{1}\frac{M({}^h\xi_1,{}^c\xi_1)}{N({}^c\xi_1)} & -\binom{m}{1}\frac{M({}^h\xi_1,{}^c\xi_n)}{N({}^c\xi_n)} \\
{}^hX(1,0,1,n) & {}^hX(1,0,n,n) & 0 & e^{-{}^h\xi_n^2\,{}^hFo} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\binom{1}{1}\frac{M({}^h\xi_n,{}^c\xi_1)}{N({}^c\xi_1)} & -\binom{1}{1}\frac{M({}^h\xi_n,{}^c\xi_n)}{N({}^c\xi_n)} & -\binom{m}{1}\frac{M({}^h\xi_1,{}^c\xi_1)}{N({}^c\xi_1)} & -\binom{m}{1}\frac{M({}^h\xi_n,{}^c\xi_n)}{N({}^c\xi_n)} \\
{}^hX(m,0,1,1) & {}^hX(m,0,n,1) & {}^hX(m,1,1,1) & {}^hX(m,1,n,1) & e^{-{}^h\xi_1^2\,{}^hFo} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\binom{m}{m}\frac{M({}^h\xi_1,{}^c\xi_1)}{N({}^c\xi_1)} & -\binom{m}{m}\frac{M({}^h\xi_1,{}^c\xi_n)}{N({}^c\xi_n)} \\
{}^hX(m,0,1,n) & {}^hX(m,0,n,n) & {}^hX(m,1,1,n) & {}^hX(m,1,n,n) & 0 & e^{-{}^h\xi_n^2\,{}^hFo} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\binom{m}{m}\frac{M({}^h\xi_n,{}^c\xi_1)}{N({}^c\xi_1)} & -\binom{m}{m}\frac{M({}^h\xi_n,{}^c\xi_n)}{N({}^c\xi_n)} \\
\frac{M({}^h\xi_1,{}^c\xi_1)}{N({}^h\xi_1)} & \frac{M({}^h\xi_n,{}^c\xi_1)}{N({}^h\xi_n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{-{}^c\xi_1^2\,{}^cFo}-\sum_{p=1}^{m}{}^cX(p,0,1,1) & -\sum_{p=1}^{m}{}^cX(p,0,n,1) & -e^{-{}^c\xi_1^2\,{}^cFo}-\sum_{p=2}^{m}{}^cX(p,1,1,1) & -\sum_{p=2}^{m}{}^cX(p,1,n,1) & -e^{-{}^c\xi_1^2\,{}^cFo} & 0 \\
\frac{M({}^h\xi_1,{}^c\xi_n)}{N({}^h\xi_1)} & \frac{M({}^h\xi_n,{}^c\xi_n)}{N({}^h\xi_n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sum_{p=1}^{m}{}^cX(p,0,1,n) & -e^{-{}^c\xi_n^2\,{}^cFo}-\sum_{p=1}^{m}{}^cX(p,0,n,n) & -\sum_{p=2}^{m}{}^cX(p,1,1,n) & -e^{-{}^c\xi_n^2\,{}^cFo}-\sum_{p=2}^{m}{}^cX(p,1,n,n) & 0 & -e^{-{}^c\xi_n^2\,{}^cFo} \\
0 & 0 & \frac{M({}^h\xi_1,{}^c\xi_1)}{N({}^h\xi_1)} & \frac{M({}^h\xi_n,{}^c\xi_1)}{N({}^h\xi_n)} & 0 & 0 & -\sum_{p=1}^{m}\binom{p}{1}{}^cX(p,0,1,1) & -\sum_{p=1}^{m}\binom{p}{1}{}^cX(p,0,n,1) & -e^{-{}^c\xi_1^2\,{}^cFo}\binom{1}{1}-\sum_{p=2}^{m}\binom{p}{1}{}^cX(p,1,1,1) & -\sum_{p=2}^{m}\binom{p}{1}{}^cX(p,1,n,1) & -e^{-{}^c\xi_1^2\,{}^cFo}\binom{m}{1} & 0 \\
0 & 0 & \frac{M({}^h\xi_1,{}^c\xi_n)}{N({}^h\xi_1)} & \frac{M({}^h\xi_n,{}^c\xi_n)}{N({}^h\xi_n)} & 0 & 0 & -\sum_{p=1}^{m}\binom{p}{1}{}^cX(p,0,1,n) & -\sum_{p=1}^{m}\binom{p}{1}{}^cX(p,0,n,n) & -\sum_{p=2}^{m}\binom{p}{1}{}^cX(p,1,1,n) & -e^{-{}^c\xi_n^2\,{}^cFo}\binom{1}{1}-\sum_{p=2}^{m}\binom{p}{1}{}^cX(p,1,n,n) & 0 & -e^{-{}^c\xi_n^2\,{}^cFo}\binom{m}{1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{M({}^h\xi_1,{}^c\xi_1)}{N({}^h\xi_1)} & \frac{M({}^h\xi_n,{}^c\xi_1)}{N({}^h\xi_n)} & -\sum_{p=m}^{m}\binom{p}{m}{}^cX(p,0,1,1) & -\sum_{p=m}^{m}\binom{p}{m}{}^cX(p,0,n,1) & -\sum_{p=m}^{m}\binom{p}{1}{}^cX(p,1,1,1) & -\sum_{p=m}^{m}\binom{p}{1}{}^cX(p,1,n,1) & -e^{-{}^c\xi_1^2\,{}^cFo}\binom{m}{m} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{M({}^h\xi_1,{}^c\xi_n)}{N({}^h\xi_1)} & \frac{M({}^h\xi_n,{}^c\xi_n)}{N({}^h\xi_n)} & -\sum_{p=m}^{m}\binom{p}{m}{}^cX(p,0,1,n) & -\sum_{p=m}^{m}\binom{p}{m}{}^cX(p,0,n,n) & -\sum_{p=m}^{m}\binom{p}{1}{}^cX(p,1,1,n) & -\sum_{p=m}^{m}\binom{p}{1}{}^cX(p,1,n,n) & 0 & -e^{-{}^c\xi_n^2\,{}^cFo}\binom{m}{m}
\end{bmatrix}
$$

Wielkość X(p,l,k,j) występująca w macierzy [W] zdefiniowana jest następującym splotem

$$\xi_j \sin \xi_j \, e^{-\xi_j^2 Fo} * a_p(Fo) = \sum_{l=p-1}^{0} \sum_{k=1}^{n} \bar{A}_l(\xi_k) \, X(p,l,k,j)$$

symbol zaś

$$\binom{l-m-1}{r} = (-1)^r \frac{(l-m-1)!}{(l-m-1-r)! \, r!} .$$

3.3. Szczególne przypadki

Równania (29) zostały wyprowadzone dla dowolnych skończonych wartości B oraz Bi. Rozwiązania poprzednie dla B=0 lub Bi=0 powinny stanowić zatem szczególne przypadki obecnego.

3.3.1. Mała długość regeneratora (B=0)

Warunek małej liczby B może być spełniony praktycznie przy krótkich regeneratorach lub dużej pojemności cieplnej płynów. Zmienność temperatury wzdłuż regeneratora jest wówczas pomijalna, równania zaś (19), (22) i(24) redukują się do pierwszych członów. Powoduje to znaczne uproszczenie układu równań (29), który przechodzi w układ 2n równań

$$[W_o][A_o] = [S_o], \tag{29a}$$

gdzie:

$$[A_o] = \begin{bmatrix} \bar{A}_o({}^h\xi_1) \\ \text{---} \\ \bar{A}_o({}^h\xi_n) \\ \bar{A}_o({}^o\xi_1) \\ \text{---} \\ \bar{A}_o({}^o\xi_n) \end{bmatrix}$$

$$
[S_0] = \left[\begin{array}{l}
-\dfrac{\sin {}^h\xi_1}{{}^h\xi_1} - {}^h\xi_1 \sin {}^h\xi_1 \, e^{-{}^h\xi_1^2 Fo} * {}^h a_0(Fo)\Big|_{Fo={}^hFo} \\
\hdashline
-\dfrac{\sin {}^h\xi_n}{{}^h\xi_n} - {}^h\xi_n \sin {}^h\xi_n \, e^{-{}^h\xi_n^2 Fo} * {}^h a_0(Fo)\Big|_{Fo={}^hFo} \\
-\dfrac{\sin {}^o\xi_1}{{}^o\xi_1} \\
\hdashline
-\dfrac{\sin {}^o\xi_n}{{}^o\xi_n}
\end{array}\right]
$$

oraz

$$
[W_0] = \left[\begin{array}{c:c|c:c}
e^{-{}^h\xi_1^2\, {}^hFo} & 0 & -\dfrac{M({}^h\xi_1, {}^o\xi_1)}{N({}^o\xi_1)} & -\dfrac{M({}^h\xi_1, {}^o\xi_n)}{N({}^o\xi_n)} \\
\hdashline
0 & e^{-{}^h\xi_n^2\, {}^hFo} & -\dfrac{M({}^h\xi_n, {}^o\xi_1)}{N({}^o\xi_1)} & -\dfrac{M({}^h\xi_n, {}^o\xi_n)}{N({}^o\xi_n)} \\
\dfrac{M({}^h\xi_1, {}^o\xi_1)}{N({}^h\xi_1)} & \dfrac{M({}^h\xi_n, {}^o\xi_1)}{N({}^h\xi_n)} & e^{-{}^o\xi_1^2\, {}^oFo} & 0 \\
\hdashline
\dfrac{M({}^h\xi_1, {}^o\xi_n)}{N({}^h\xi_1)} & \dfrac{M({}^h\xi_n, {}^o\xi_n)}{N({}^h\xi_n)} & 0 & e^{-{}^o\xi_n^2\, {}^oFo}
\end{array}\right].
$$

Szczególnie często analizowany był przypadek symetrycznych warunków. Jeżeli ${}^hBi \to {}^cBi$, wówczas

$$
\lim_{{}^hBi \to {}^oBi} M({}^h\xi_i, {}^o\xi_k) = \begin{cases} N(\xi_i), & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}
$$

macierz zaś $\left[W_0\right]$ przechodzi w postać

$$\left[W_0\right] = \left[\begin{array}{c|cc|c} e^{-\xi_1^2 Fo} & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & e^{-\xi_n^2 Fo} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & e^{-\xi_1^2 Fo} & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & e^{-\xi_n^2 Fo} \end{array}\right].$$

3.3.2. Mała liczba Biota (Bi = 0)

Przypadek małych liczb Biota może być zrealizowany, gdy przewodność cieplna wypełnienia jest duża lub gdy współczynnik wnikania ciepła bądź też grubość wypełnienia są małe. Jeżeli jednak zredukowana długość B ma być dostatecznie duża, to przypadek małego współczynnika wnikania ciepła należałoby wykluczyć z rozważań.

Dla omawianych warunków pomijalna jest zmienność temperatury wypełnienia w kierunku x prostopadłym do przepływu płynu. Funkcje własne ξ_i dla $Bi \longrightarrow 0$ dążą do całkowitych iloczynów liczby π ($\xi_i = i\pi$, $i = 0,1,2,\ldots$), a równania (26) zastąpione są dwoma równaniami:

$$\left.\begin{aligned} & 1 + e^{-{}^h\left(\frac{\alpha}{\varrho R}\tau\right)} \sum_{k=0}^{\infty} {}^hA_k\, z^k + e^{-{}^h\left(\frac{\alpha}{\varrho R}\right)\tau}\, {}^h\left(\frac{\alpha}{\varrho R}\right) = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} {}^ha_k(\tau) z^k \Big|_{\tau={}^h\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} {}^cA_k (1-z)^k \\ & 1 + \sum_{k=0}^{\infty} {}^hA_k\, z^k = e^{-{}^c\left(\frac{\alpha}{\varrho R}\tau\right)} \sum_{k=0}^{\infty} {}^cA_k (1-z)^k + e^{-{}^c\left(\frac{\alpha}{\varrho R}\right)\tau}\, {}^c\left(\frac{\alpha}{\varrho R}\right) = \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} {}^ca_k(\tau)(1-z)^k \Big|_{\tau={}^c\tau} \end{aligned}\right\}, \quad (26a)$$

Porównanie współczynników przy jednakowych potęgach zmiennej z prowadzi do nieskończonego układu równań. Ograniczając następnie do (m+1) ilość wyrazów w szeregach otrzymuje się układ 2(m+1) równań podobnych do równań (29).

4. Akumulacja energii w wypełnieniu oraz podgrzanie dmuchu

W procesie konstrukcji regeneratora niezbędna jest znajomość ilości ciepła przekazanego przez regenerator oraz temperatury podgrzania powietrza dmuchu. W zależności od tych wielkości dobiera się powierzchnię regeneratora, rozmiary kanałów, grubość wypełnienia oraz inne parametry tak konstrukcyjne jak i eksploatacyjne. Dogodnie jest przy tym operować tzw. bezwymiarową zdolnością akumulacji ciepła χ.

Temperatura dmuchu zmienia się w czasie półcyklu chłodnego, przy czym moment osiągnięcia minimalnej wartości jest na ogół sygnałem do kolejnej rewersji. Często wyznacza się średnią temperaturę podgrzania ${}^{c}T_p$, która nazywana jest również (32) efektywnością regeneratora, jego sprawnością lub stopniem regeneracji (10).

4.1. Bezwymiarowa zdolność akumulacji χ energii

Ilość ciepła akumulowanego w wypełnieniu jest uzależniona od termicznych parametrów wypełnienia i płynów, warunków przepływu ciepła oraz czasu trwania cyklu. Ogólnie mówiąc, im dłuższy jest okres regeneratora, tym więcej energii jest magazynowanej w wypełnieniu. Wydłużanie jednak cyklu jest ograniczone minimalną temperaturą podgrzania dmuchu. Aktualna tendencja do coraz wyższych temperatur podgrzania dmuchu skłania do stosowania krótkich cykli regeneratora.

Wielkość χ zdefiniowana jest jako stosunek ciepła przekazanego w regeneratorze do jego maksymalnej wartości, która mogłaby być przekazana przy założeniu stałych temperatur (${}^{h}t_o(o)$ i ${}^{c}t_o(o)$) płynów na dopływie.

Zgodnie z założeniem o właściwości termiczne wypełnienia są stałe, wielkość χ zatem jest wyrażona równaniem

$$\chi = \int_0^1\int_0^1 \left({}^{c}\Theta(x,z,0) + {}^{c}T(z,o) - {}^{h}\Theta(x,z,0) - {}^{h}T(z,o)\right)dx\,dz - 1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{n} \left[\bar{A}_k({}^{c}\xi_i)\,\frac{\sin {}^{c}\xi_i}{{}^{c}\xi_i\,N({}^{c}\xi_i)} - \bar{A}_k({}^{h}\xi_i)\,\frac{\sin {}^{h}\xi_i}{{}^{h}\xi_i\,N({}^{h}\xi_i)}\right] - 1. \tag{30}$$

W przypadku symetrycznych warunków przepływu ciepła powyższe równanie upraszcza się znacznie. Wielkość $M({}^{h}\xi_i, {}^{c}\xi_k)$ jest wówczas równa zero, szukane zaś współczynniki $\bar{A}_k({}^{h}\xi_i) = -\bar{A}_k({}^{c}\xi_i) = \bar{A}_k(\xi_i)$. Akumulacja χ ciepła przyjmuje zatem postać

$$\chi = 2\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1}\,\bar{A}_k(\xi_i)\,\frac{\sin \xi_i}{\xi_i\,N(\xi_i)} - 1. \tag{31}$$

Dla regeneratora symetrycznego oraz B=0 uzyskano (8,9,29) bardzo zwarte wyrażenie dla obliczenia χ. Macierz $[W]$ przechodzi wówczas w postać $[W_o]$, zaś współczynniki $\bar{A}_k(\xi_i) = 0$, gdy $k > 0$. Równanie (31) zatem upraszcza się do postaci

$$\chi = 2 \sum_{i=1}^{n} \bar{A}_0(\xi_i) \frac{\sin \xi_i}{\xi_i N(\xi_i)} - 1. \tag{32}$$

Jeżeli temperatura płynu gorącego na dopływie jest niezmienna $({}^h a_0(Fo) = 0)$, to współczynniki $\bar{A}_0(\xi_i)$ można wówczas wyrazić bezpośrednio poprzez liczbę Fouriera i równanie (32) przechodzi w znaną postać (8,9,29) podaną poraz pierwszy przez Gdulę (8)

$$\chi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N(\xi_i)} \frac{\sin^2 \xi_i}{\xi_i^2} \operatorname{th} \left(\frac{\xi_i^2 Fo}{2}\right).$$

Często analizowany jest inny graniczny przypadek małej liczby Biota (Bi = 0). Uzyskuje się wówczas

$$\chi = 2 \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1} A_k - 1 \tag{33}$$

ponieważ $\bar{A}_k(\xi_i) = 0$, gdy $i > 1$.

4.2. Bezwymiarowa średnia temperatura ${}^cT_p$ podgrzania dmuchu

Wyznaczenie współczynników $\bar{A}_k(\xi_i)$ pozwala określić współczynniki $\bar{a}_k(s)$ na podstawie równania (23). Po poddaniu tych ostatnich odwrotnemu przekształceniu Laplace'a można z równań (22) lub (24) obliczyć temperaturę powietrza dmuchu w funkcji czasu. Celem otrzymania wartości temperatury na wypływie z regeneratora należy podstawić w tych zależnościach z=0 dla przypadku przeciwprądowego lub z=1 dla współprądowego. Uzyskuje się zatem

$${}^cT(0,Fo) = \sum_{k=0}^{m} {}^c a_k(Fo) \qquad \text{dla przeciwprądu lub}$$

$${}^cT(1,Fo) = \sum_{k=0}^{m} {}^c a_k(Fo) \qquad \text{dla współprądu.}$$

Powyższe zależności pozwalają na wyznaczenie średniej w obrębie półokresu dmuchu temperatury podgrzania

$$^{c}T_{p} = \frac{1}{^{c}Fo} \sum_{k=0}^{m} \int_{0}^{^{c}Fo} {^{c}a_{k}}(Fo)dFo .$$

Średnią temperaturę podgrzania można uzależnić od akumulacji energii. Energia zgromadzona w wypełnieniu podczas nagrzewania regeneratora musi przejść do powietrza podczas półokresu ochłodzenia. Inaczej mówiąc należy sporządzić bilans energii dla tego półokresu. Prowadzi to do bezwymiarowej zależności

$$^{c}T_{p} = {^{c}}\left(\frac{B}{Fo\ Bi}\right) \chi . \tag{34}$$

W podobny sposób można dojść do średniej temperatury gazów na wypływie z regeneratora pisząc bilans energii dla półokresu grzania regeneratora. Oczywiście,dla symetrycznych warunków temperatura ta jest równa $1 - {^{c}T_{p}}$.

5. Dyskusja rezultatów numerycznych

Ze względu na asymetryczne warunki ilość możliwych kombinacji wielkości Bi, Fo i B jest bardzo duża i przedstawienie ich wszystkich na wykresach byłoby bardzo uciążliwe, co więcej pochłonęłoby to olbrzymią ilość czasu dla wykonania niezbędnych obliczeń. Generalne zatem ograniczenie poczynione przy obliczeniach polega na przyjęciu równych liczb Fouriera dla grzania ^{h}Fo i chłodzenia ^{c}Fo. Jedyną przyczyną, która mogłaby spowodować dużą różnicę tych wielkości, byłaby różnica pomiędzy realnym czasem chłodzenia i grzania. W praktyce jednak najczęściej regeneratory działają przy równych okresach grzania i chłodzenia tak, że obliczenia ograniczono do tego przypadku.

Ponieważ wciąż istnieje wiele możliwości asymetrii, zatem poczyniono dalsze ograniczenia. Uwzględniono jedynie asymetrię spowodowaną przez różnicę współczynników wnikania ciepła. Bezwymiarowe wielkości dla grzania wyrażają się przez ich odpowiedniki dla chłodzenia w sposób następujący

$$^{h}Bi = \frac{^{h}\alpha}{^{c}\alpha} {^{c}Bi}, \qquad ^{h}B = \frac{^{h}\alpha}{^{c}\alpha} {^{c}B} .$$

Zbieżność odpowiednich szeregów nieskończonych uzależniona jest od trzech wielkości Fo, Bi oraz B, przy czym ogólna tendencja jest taka, że im większe Fo i im mniejsze Bi oraz B, tym lepsza jest zbieżność szeregów.

Dla przypadku B=0 zbieżność szeregów była dyskutowana poprzednio (4). Dyskusja ta jest znacznie bardziej skomplikowana, gdy $B > 0$. Rozważmy przypadek niekorzystnej zbieżności, gdy okres regeneratora jest bardzo długi. W granicznych przypadku ($Fo \to \infty$) temperatura wypełnienia zmierza do temperatury płynu $A_m = 0$ dla $m > 0$, zaś $\bar{A}_0(\xi_k) = \frac{\sin \xi_k}{\xi_k}$. Tuż po rewersji ($Fo = 0$) współczynniki $a_l(0)$ można wyznaczyć korzystając z zależności (23)

$$a_l(0) = \lim_{s \to \infty} s\,\bar{a}_l(s) = \sum_{m=0}^{l-1} (-1)^{l-1-m} B^{l-m}.$$

$$\cdot \frac{m!}{l!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K(\xi_k, 1)}{N(\xi_k)} \bar{A}_m(\xi_k).$$

Pomijając człony dla $m > 0$ dochodzi się do zależności dla temperatury płynu tuż po rewersji

$$T(z,0) = (1 - e^{-Bz}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K(\xi_k, 1)}{N(\xi_k)} \bar{A}_0(\xi_k).$$

Celem obliczenia funkcji w pierwszym nawiasie, jako sumy szeregu nieskończonego, należy uwzględnić około 6 wyrazów przy B = 3 oraz 11 wyrazów przy B = 5 aby uzyskać właściwą dokładność wyniku. W praktycznych przypadkach jednak ilość tych wyrazów jest mniejsza ze względu na ograniczoną długość okresu.

Obliczenia numeryczne przeprowadzono na maszynie cyfrowej KDF-9. Czas obliczeń uzależniony jest bardzo silnie od sposobu obliczenia splotu w wyrażeniu definiującym funkcję X(p,l,k,j). Ponieważ funkcja $\bar{a}_l(s)$ posiada bieguny wielokrotne, obliczenie tego splotu jest bardzo pracochłonne, szczególnie dla dużych liczb B, przy których należy uwzględnić wysokie wskaźniki l. Bardzo jest korzystne stosować w takich przypadkach metodę wykonania odwrotnej transformacji współczynników $\bar{a}_l(s)$ zaproponowaną przez Papoulisa (22). Czas obliczeń wspomnianego splotu zależy wówczas bardzo nieznacznie od wielkości wskaźnika l.

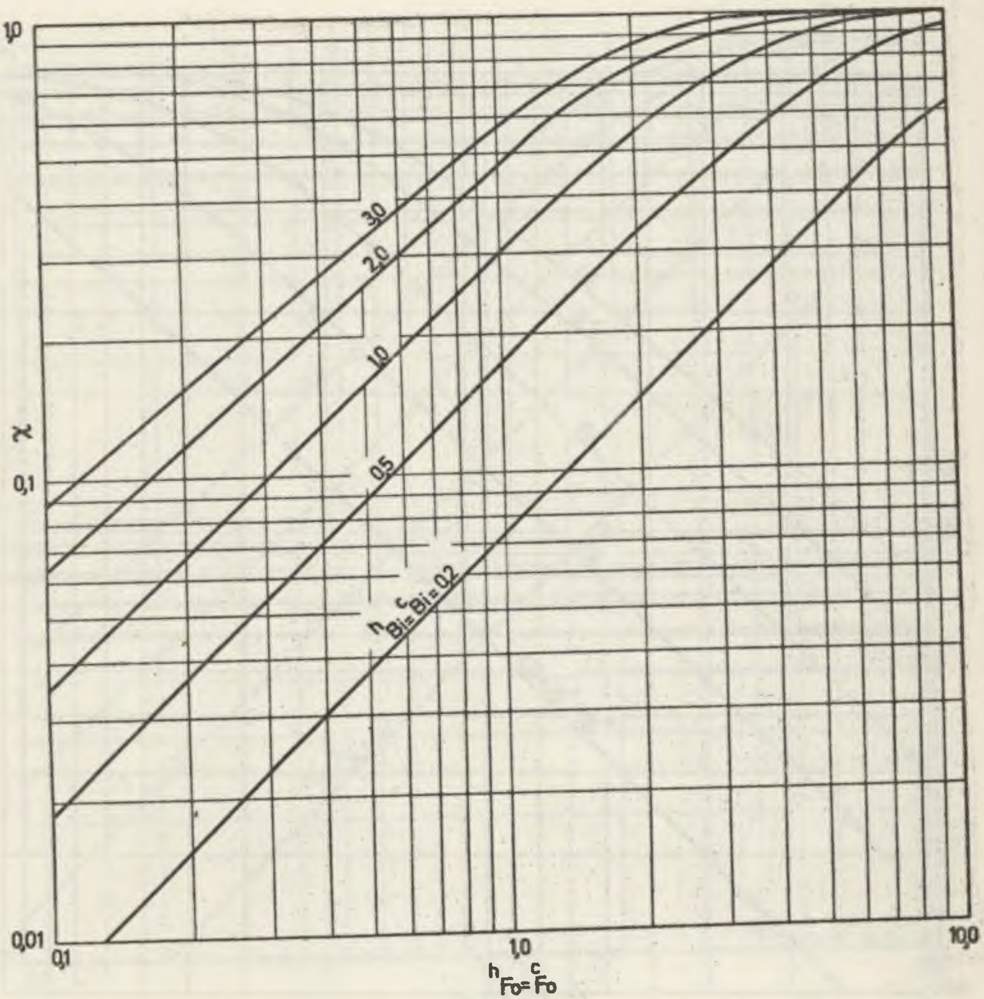
Dla wszystkich przeprowadzonych obliczeń przyjęto niezmienną temperaturę płynu gorącego na dopływie do regeneratora, ${}^{h}a_0(Fo) = 0$. Zasadnicze obliczenia wykonano przy tym dla symetrycznych warunków przy sześciu liczbach B = 0,6–5,0 oraz dla liczb Biota Bi = 0,2–3,0. Zależność akumulacji ciepła od liczb Bi oraz Fo przedstawiono (rys. 4–8) w skali logarytmicznej podobnie jak to uczynił Bes (3,4) dla B=0.

Ciepło przekazane w regeneratorze jest tym większe im dłuższy jest czas cyklu regeneratora. Dla bardzo długich cykli χ dąży do jedności. Przeciwnie przedstawia się jednakże temperatura podgrzania. Im krótszy jest czas cyklu (małe ${}^{h}Fo = {}^{c}Fo$), tym wyższa jest temperatura podgrzania. Czułość temperatury podgrzania na zmianę długości cyklu jest funkcją liczby Biota. Dla małych liczb Biota Bi $\approx$ 0,2 temperatura podgrzania jest praktycznie niezależna od długości cyklu w obszarze Fo = 0,1-10. Nie oznacza to jednak, że temperatura płynu grzanego jest niezmienna na wypływie z regeneratora. W przypadku dłuższych cykli temperatura ta zmienia się w szerszym przedziale, lecz średnia jej wartość, w omawianym zakresie, pozostaje prawie niezmienna.

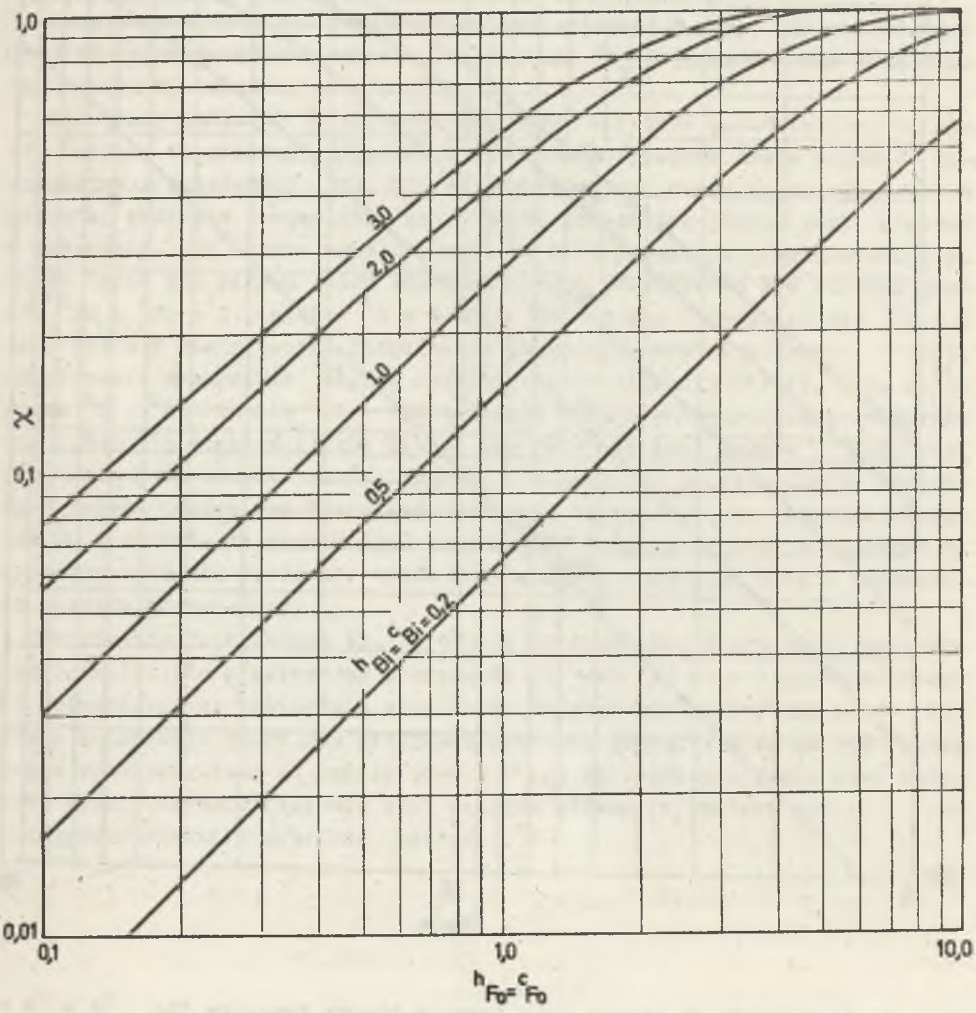
Zwiększenie długości regeneratora (zwiększenie B przy niezmienionych Fo i Bi) pociąga za sobą wzrost temperatury ${}^{c}T_{p}$ podgrzania oraz obniżenia akumulacji χ ciepła.

Rezultaty obliczeń χ dla asymetrycznych warunków przedstawiono na rys. 11. Średnie temperatury podgrzania dla tych przypadków można uzyskać korzystając z zależności (34). Większy współczynnik wnikania ciepła podczas grzania, zwiększa temperaturę podgrzania, wzrost ten jednak jest większy w przypadku, gdy obydwa współczynniki ${}^{h}\alpha$ i ${}^{c}\alpha$ rosną. Ta prawidłowość jest ważna tylko dla małych liczb Fouriera. Niech przykładowo dla równych okresów ${}^{h}Fo = {}^{c}Fo = 2$ wartości ${}^{c}B = 2$ oraz ${}^{c}Bi = 1$ dla chłodzenia, zaś ${}^{h}B = 4$ oraz ${}^{h}Bi = 2$ dla grzania. Temperatura podgrzania wynosi wówczas 0.465. Zwiększenie dwukrotnie obydwu współczynników wnikania ciepła, tzn. przypadek ${}^{h}B = {}^{c}B = 4$ oraz ${}^{h}Bi = {}^{c}Bi = 2$ daje natomiast temperaturę podgrzania 0.518. Im większa liczba Biota, tym mniejsza jest liczba Fouriera, przy której wzrost ten zanika. Wynika to stąd, że po osiągnięciu wartości 1 dalszy wzrost współczynnika α (wzrost Bi oraz B) nie powoduje wzrostu χ i zgodnie ze wzorem (34) temperatura podgrzania jest niezależna od współczynnika α. Skrócenie cyklu regeneratora zapobiega temu i prowadzi do wzrostu temperatury.

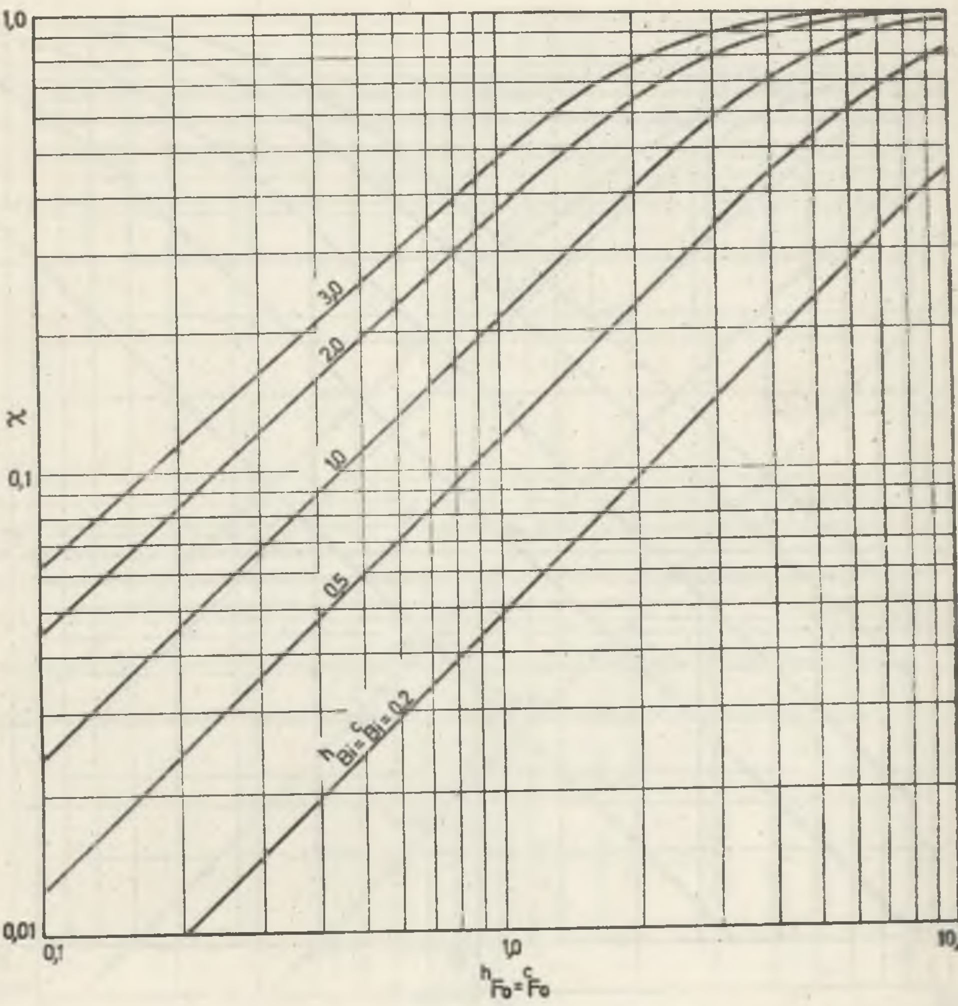
Poprzednie rozwiązania (9, 3, 19) są szczególnymi przypadkami obecnego rozwiązania. Dla granicznych przypadków Bi $\longrightarrow$ 0 lub B $\longrightarrow$ 0 uzyskano wyniki potwierdzające poprzednie rezultaty. Program opracowany dla celów tej pracy obowiązuje tylko dla przepływu przeciwprądowego, może on być jednak łatwo przekształcony na współprądowy. W tym ostatnim przypadku czas obliczeń byłby znacznie krótszy, gdyż macierz główna [W] układu równań (29) przyjęłaby znacznie prostszą postać.



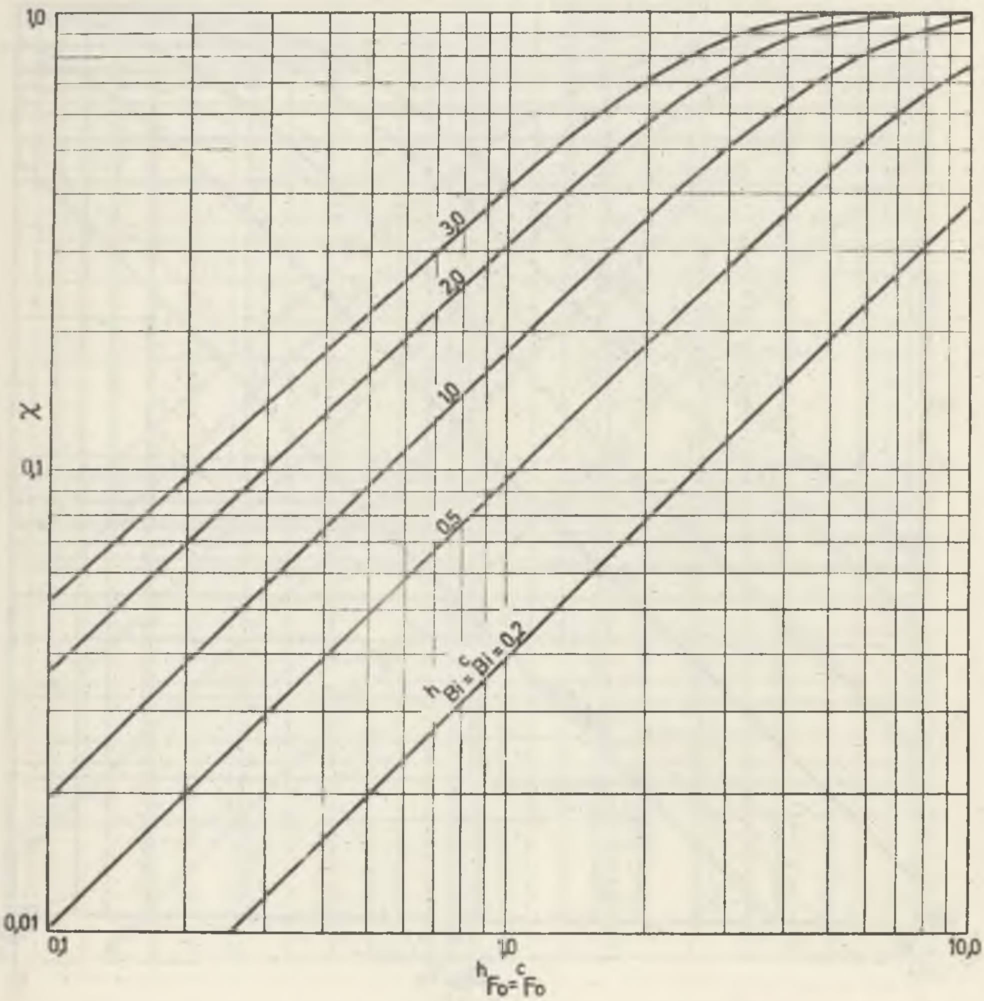
Rys. 3. Akumulacja χ ciepła jako funkcja liczby Fouriera dla ${}^{h}B = {}^{c}B =$ $= 0.6$ oraz dla ${}^{h}Bi = {}^{c}Bi = 0.2,\ 0.5,\ 1.0,\ 2.0,\ 3.0$



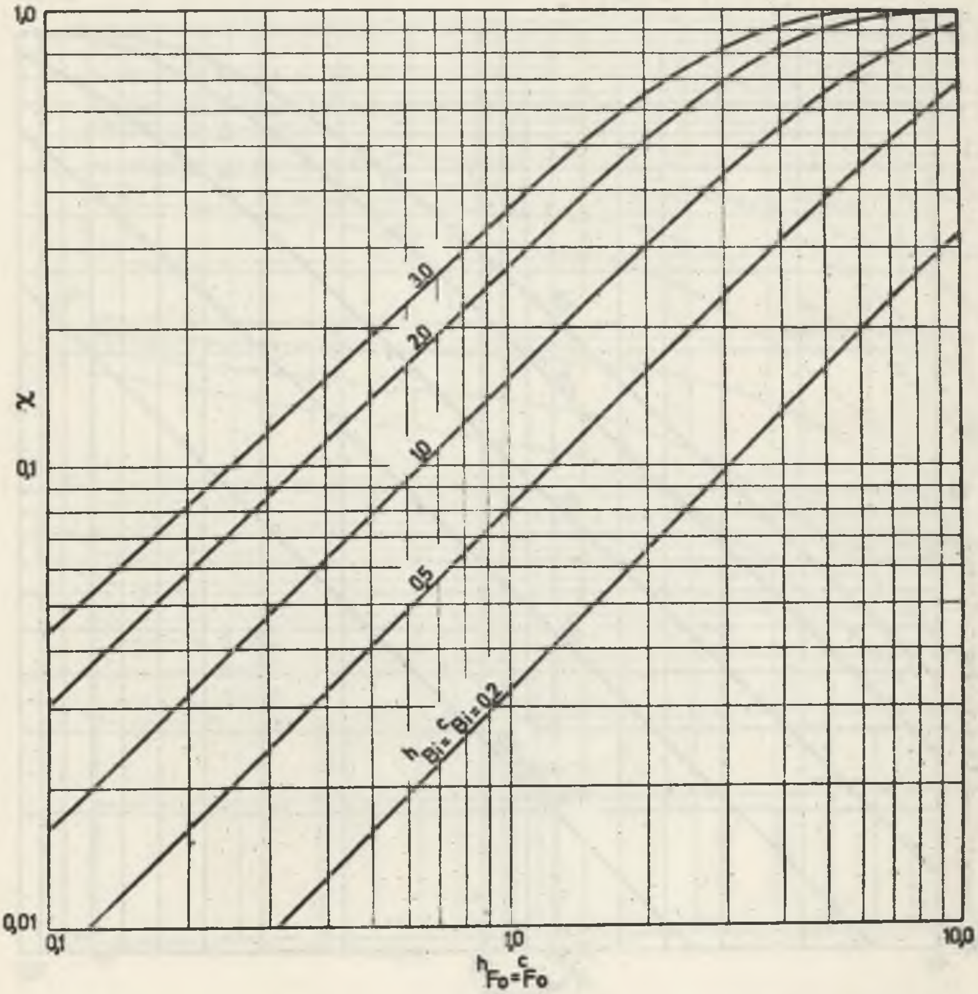
Rys. 4. Akumulacja χ ciepła jako funkcja liczby Fouriera dla ${}^{h}B = {}^{c}B = 1.0$ oraz dla ${}^{h}Bi = {}^{c}Bi = 0,2;\ 0.5;\ 1.0;\ 2.0;\ 3.0$



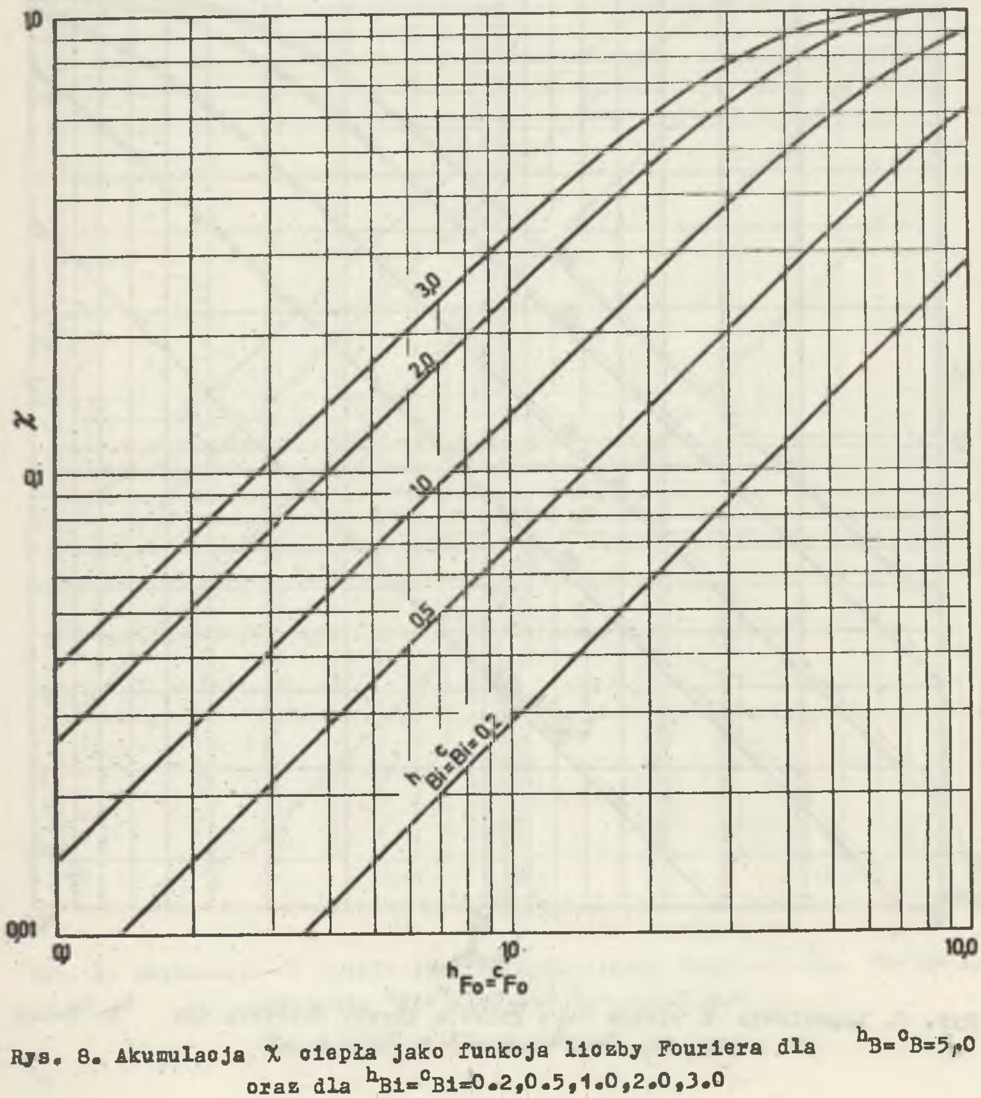
Rys. 5. Akumulacja χ ciepła jako funkcja liczby Fouriera dla $^{h}B = {}^{c}B = 2.0$ oraz dla $^{h}Bi = {}^{c}Bi = 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0$



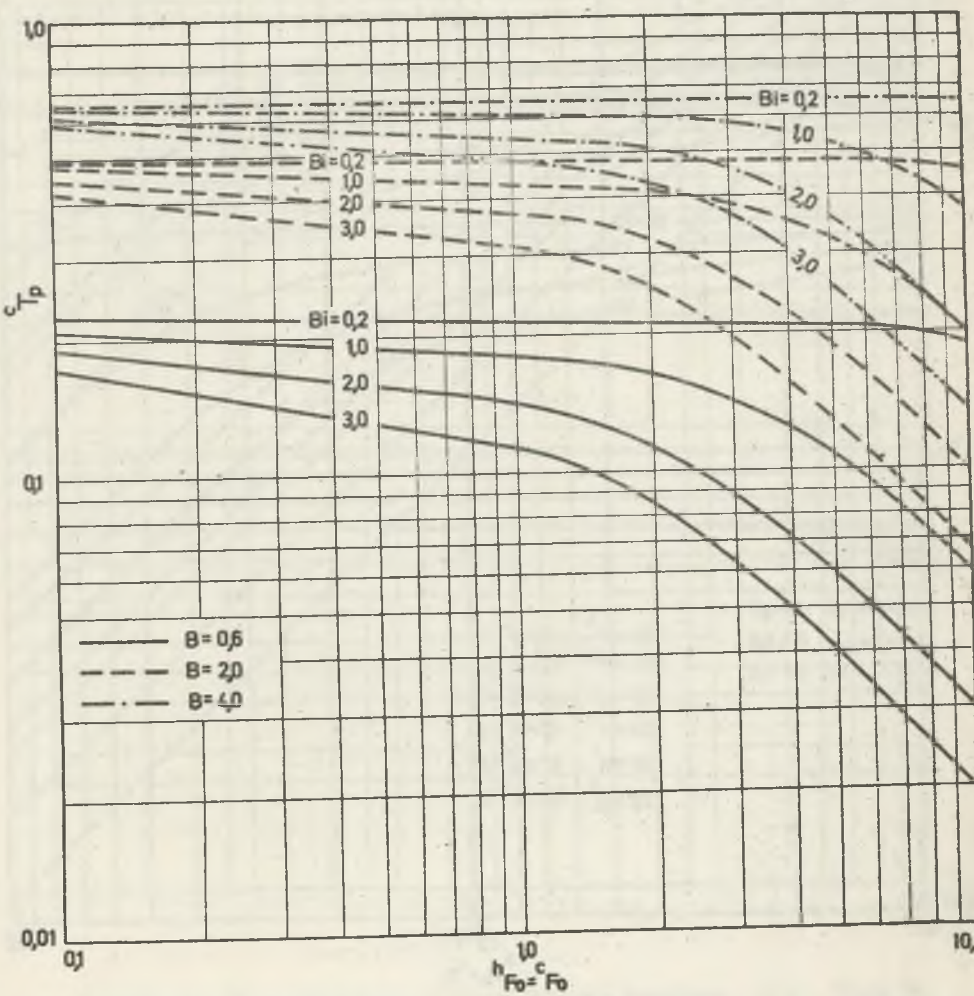
Rys. 6. Akumulacja χ ciepła jako funkcja liczby Fouriera dla $^{1}B = {}^{c}B = 3.0$ oraz dla $^{h}Bi = {}^{c}Bi = 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0$



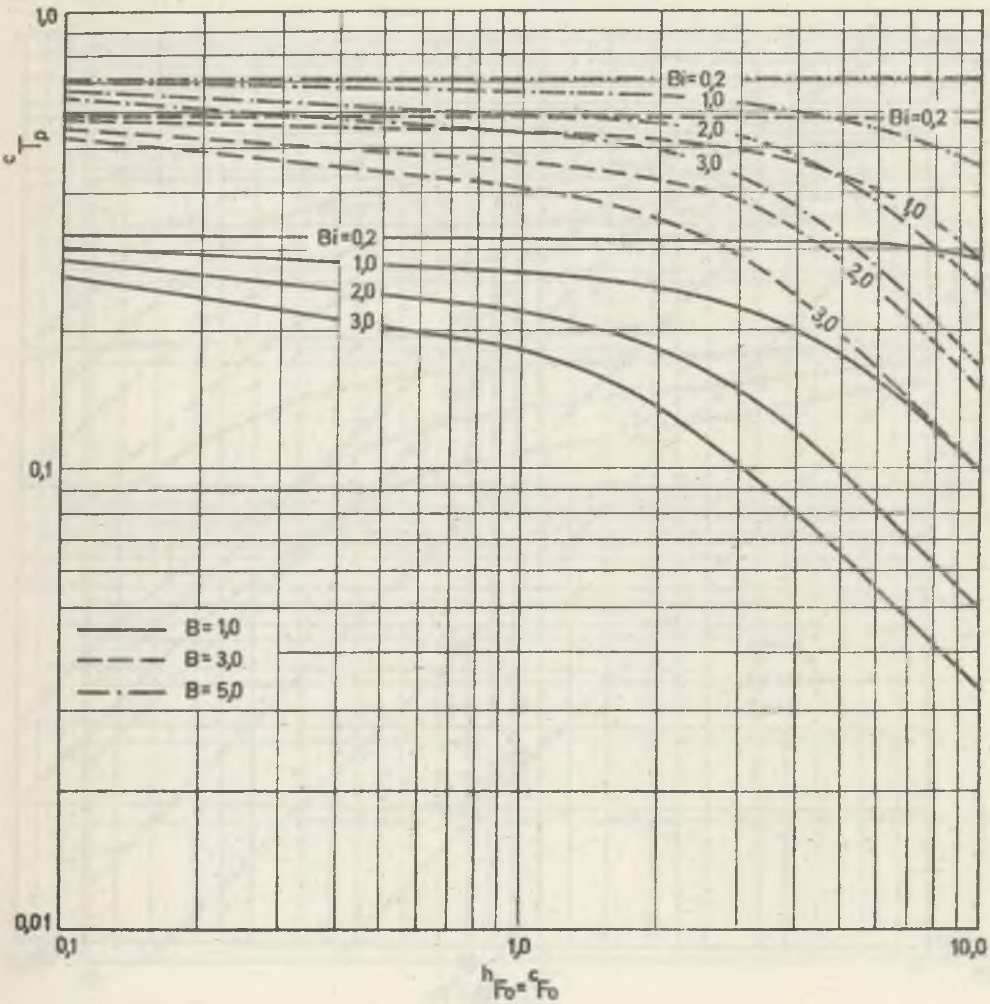
Rys. 7. Akumulacja χ ciepła jako funkcja liczby Fouriera dla $^{h}B={}^{c}B=4,0$ oraz dla $^{h}Bi={}^{c}Bi=0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0$



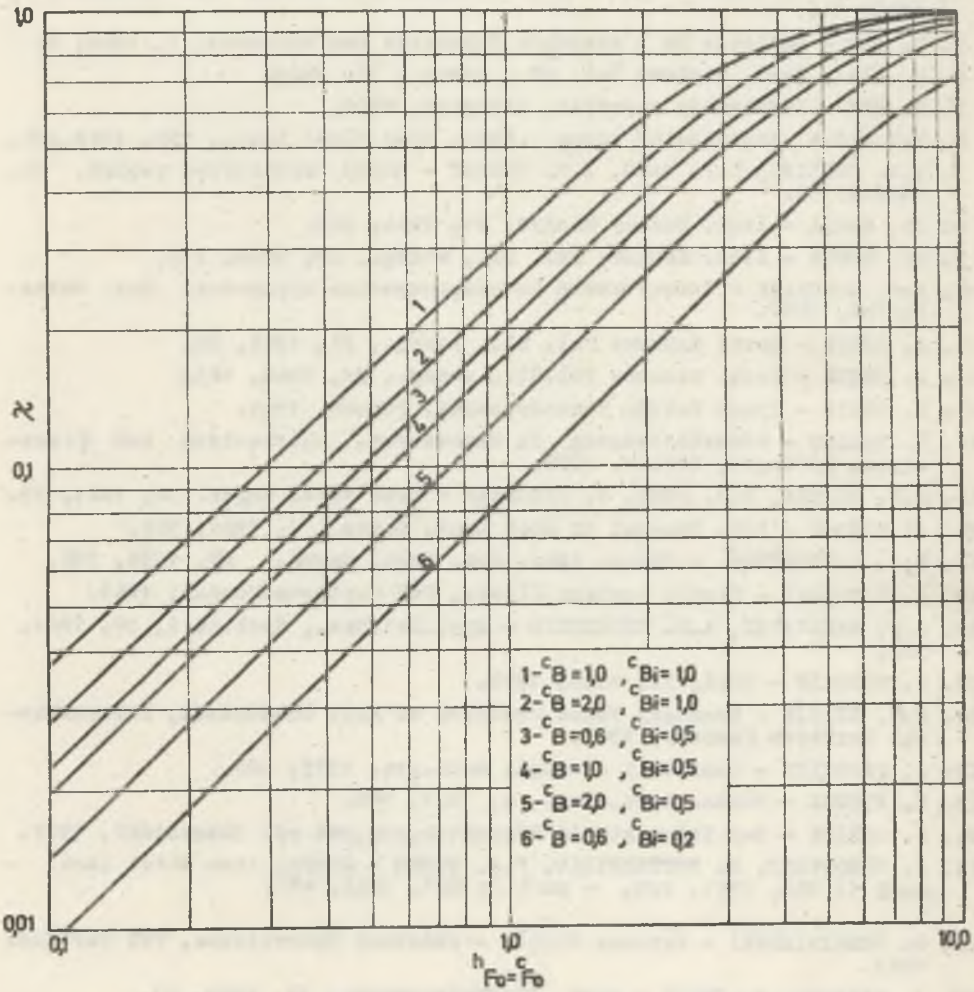
Rys. 8. Akumulacja $\varkappa$ ciepła jako funkcja liczby Fouriera dla $^{h}B={}^{c}B=5,0$ oraz dla $^{h}Bi={}^{c}Bi=0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0$



Rys. 9. Temperatura podgrzania ^cT_p jako funkcja liczby Fouriera dla ^hB = ^cB=0.6,2.0,4.0 oraz dla $^hBi = {}^cBi$=0.2,1.0,2.0,3.0



Rys. 10. Temperatura podgrzania ^oT_p jako funkcja liczby Fouriera dla ^hB = = ^oB=1.0,3.0,5.0 oraz dla $^hBi={}^oBi$=0.2,1.0,2.0,3.0



Rys. 11. Akumulacja $\varkappa$ ciepła jako funkcja liczby Fouriera dla ${}^{h}B = 2\,{}^{c}B$ oraz dla ${}^{h}Bi = 2\,{}^{c}Bi$

LITERATURA

1. G. ACKERMAN - Z. Angew. Math. Mech. 11, 1932, 192.
2. T. BES, St. GDULA - Bulletin De L'Academie Polonaise Des Sciences 2, 1969, 91.
3. T. BES - Bulletin De L'Academie Polonaise Des Sciences, 1, 1969, 5.
4. T. BES - Zesz. Naukowe Pol. Śl., energ., 32, 1969.
5. T. BES - Informacja prywatna, sierpień, 1971.
6. B.I.S.R.A. Regenerator Group - Jour. Iron Steel Inst., 190, 1958,254.
7. R.D. COLLINS, L.F. DAWS, I.V. TAYLOR - BISRA restricted report, no. SM/A196/55.
8. St. GDULA - Arch. Budowy Maszyn, 11, 1964, 279.
9. St. GDULA - Zesz. Naukowe Pol. Śl., energ., 29, 1968, 119.
10. E.M. GOLDFARB - Теплотехника металлургических процессов, Изд. Металлургия, 1967.
11. A. GUZIK - Zesz. Naukowe Pol. Śl., energ., 26, 1967, 59.
12. A. GUZIK - Zesz. Naukowe Pol.Śl., energ., 29, 1968, 101.
13. A. GUZIK - Zjazd Katedr Termodynamiki, Poznań, 1969.
14. H. HAUSEN - Wärmeübetragung in Gegenstrom. Gleichstrom und Kreuzstrom, Springer, Berlin, 1950.
15. J.W. HLINKA, F.S. PUHR, V. PASCHKIS - Iron Steel Engnr. 38, 1961, 59.
16. A. KARDAS - Int. Journal of Heat Mass. Trans., 9, 1966, 567.
17. T.J. LAMBERTSON - Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs. 80, 1958, 586.
18. J. MADEJSKI - Teoria Wymiany Ciepła, PWN Warszawa-Poznań, 1963.
19. A.N. NAHAVANDI, A.S. WEINSTEIN - Appl.Sci.Res., Section A, 10, 1961, 335.
20. W. NUSSELT - VDIZ, 72, 1928, 1952.
21. M.N. ÖZISIK - Boundary Value Problems of Heat Conduction, International Textbook Company, 1968.
22. A. PAPOULIS - Quarterly of Appl. Math.,14, 1957, 405.
23. K. RUMMEL - Journ. Inst. Fuel, 4, 1931, 160.
24. A. SCHACK - Der Industrielle Wärmeübergang,5th ed. Düsseldorf, 1957.
25. J. SCHOFIELD, P. BUTTERFIELD, P.A. YOUNG - Journ. Iron Steel Inst. - part 1: 199, 1961, 229, - part 2: 201, 1953, 497.
26. B. STANISZEWSKI - Wymiana Ciepła - Podstawy Teoretyczne, PWN Warszawa 1963.
27. J. SZARGUT, A. GUZIK - Arch. Eisenhüttenwesen, 39, 1968, 23.
28. J. TOMECZEK - Bulletin De L'Academie Polonaise Des Sciences, 1, 1969, 21.
29. J. TOMECZEK - Zesz. Naukowe Pol.Śl., energ., 29. 1968, 127.

30. A.J. WILLMOTT - Int. Journal Heat Mass Transf. 7, 1964, 1291.
31. A.J. WILLMOTT - Int. Journal Heat Mass Transf. 11, 1968, 1105.
32. A.J. WILLMOTT - Int. Journal Heat Mass Transf. 12, 1969, 997.

Streszczenie

W pracy przedstawiono analityczne rozwiązanie trójwymiarowych równań bilansu energii w wypełnieniu i płynach regeneratora. Zastosowano w tym celu metodę transformacji Laplace'a dla zmiennej czasu, transformacji Fouriera dla współrzędnej prostopadłej do powierzchni wypełnienia oraz rozkładu w szereg potęgowy dla współrzędnej wzdłuż wypełnienia regeneratora. Współczynniki tego ostatniego szeregu otrzymano w wyniku rozwiązania nieskończonego układu równań dla pseudo-ustalonego stanu działania regeneratora. Warunki przepływu ciepła dla okresów grzania i ohłodzenia przyjęto dowolne ale niezmienne w czasie, przepływ zaś przez regenerator jako współ- lub przeciwprądowy. Wszystkie zależności przedstawiono dla przypadku przeciwprądowego, dla współprądowego, natomiast wskazano metodę postępowania.

Bezwymiarową zdolność akumulacji χ energii w wypełnieniu oraz średnią temperaturę podgrzania $^{c}T_{p}$ powietrza w półokresie dmuchu przedstawiono graficznie dla przypadku symetrycznego jako funkcję trzech liczb bezwymiarowych: Fo, B oraz Bi. Dla symetrycznego przypadku zaś wykonano szereg obliczeń akumulacji χ energii przy założeniu, że współczynnik wnikania ciepła $^{h}\alpha$ podczas grzania jest dwukrotnie większy od współczynnika $^{c}\alpha$ podczas ochłodzenia tzn., że $^{h}B = 2\ ^{c}B$ oraz $^{h}Bi = 2\ ^{c}Bi$.

Dla granicznych wartości liczb $B \rightarrow 0$ lub $Bi \rightarrow 0$ uzyskane równania dążą do znanych poprzednio z literatury (4,19).

THE PSEUDO-STEADY HEAT TRANSFER IN A COUNTER-FLOW HEAT REGENERATOR

S u m m a r y

In this paper the analytical solution of the three dimensional energy balance equations for the filling and for the fluids of the regenerator is presented. To obtain this solution the Laplace transformation for time, Fourier transformation for coordinate perpendicular to the surface of the filling and expansion into series for the coordinate along the regenerator, are applied.

The coefficients of the last series are determined as a result of solution of an unlimited set of equations for the pseudo-steady state of the regenerator operation.

The heat transfer conditions for heating and cooling periods are assumed arbitrary but constant within one period and the flow of fluids as coflow or counterflow. All expressions are derived for the counterflow case, for the coflow, however, the procedure is explained.

The dimensionless heat storage χ in the filling as well as the air mean preheat temperature ${}^{c}T_{p}$ are presented on graphs for the symmetrical case as a function of three variables: Fo, B and Bi. For the asymmetrical conditions, however, results are presented for the case when the heat transfer coefficient ${}^{h}\alpha$ is two times bigger then ${}^{c}\alpha$, it means, that ${}^{h}B = 2\,{}^{c}B$ and ${}^{h}Bi = 2\,{}^{c}Bi$.

The obtained equations tend for the asymptotic conditions, $B \to 0$ and $Bi \to 0$, towards the known before in literature (4, 19).

ПСЕВДО-УСТАНОВЛЕННЫЙ ПЕРЕНОС ТЕПЛА В ПРОТИВОТОЧНЫМ РЕГЕНЕРАТОРЕ ТЕПЛА

Р е з ю м е

В работе представлено аналитическое решение трехразмерных уравнений баланса энергии в заполнении и жидкостях регенератора. С этой целю применён метод трансформации Ляпяса, для переменнсй времени, трансформации Фурьера, для координаты перпендикулярной к поверхности наполнения, а также распарения в рад степени, для координаты в доль заполнения регенератсра. Коэффициенты этогс пcследнегс ряда получено в результате решения бесконечной схемы уравнении для псевдо-установленного состояния деятельности регенератора. Условия течения тепла для периода нагревания и охлождения принато произвольное, но не изменяемое во времени, течение черес регенератор как равно- или противоточные. Все зависимости представлено в случае противоточном, для равноточного взказан метод поступления. Безразмерная способность аккумуляции χ энергии в заполнении, а также среднюю температуру подогревания ${}^{c}T_{p}$ воздуха в полупериоде дутья представлено графически в случае симметрии как функцию трёх безразмерных чисел Fo, B, Bi. Для асимметрического случая сделано рид вычислений аккумуляции χ энергии при предположении, что коэффициент влияния тепла ${}^{h}\alpha$ во время нагревания есть два раза больший от коэффициента ${}^{c}\alpha$ во время охлождения. Это значит, что ${}^{h}B = 2{}^{c}B$ и ${}^{h}Bi = 2{}^{c}Bi$.

Для придельной стоимости $B \to 0$ или $Bi \to 0$ полученные уравнения стремятся к знаным с предыдущей литературы (4,19).

ŻESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

ukazują się w następujących seriach:

A. AUTOMATYKA
B. BUDOWNICTWO
Ch. CHEMIA
E. ELEKTRYKA
En. ENERGETYKA
G. GÓRNICTWO
IS. INŻYNIERIA SANITARNA
JO. JĘZYKI OBCE
MF. MATEMATYKA-FIZYKA
M. MECHANIKA
NS. NAUKI SPOŁECZNE

Dotychczas ukazały się następujące zeszyty z serii En.:

Energetyka z. 1, 1956 r., s. 174, zł 26,—
Energetyka z. 2, 1957 r., s. 118, zł 24,—
Energetyka z. 3, 1959 r., s. 62, zł 7,—
Energetyka z. 4, 1960 r., s. 113, zł 22,80
Energetyka z. 5, 1961 r., s. 103, zł 16,25
Energetyka z. 6, 1961 r., s. 55. zl 4,15
Energetyka z. 7, 1961 r., s. 60, zł 5.50
Energetyka z. 8, 1961 r., s. 50, zł 3,70
Energetyka z. 9, 1962 r., s. 127, zł 9,55
Energetyka z. 10, 1962 r., s. 73, zł 5,50
Energetyka z. 11, 1963 r., s. 178, zł 9,30
Energetyka z. 12, 1964 r., s. 89, zł 4,65
Energetyka z. 13, 1964 r., s. 109, zł 8,10
Energetyka z. 14, 1964 r., s. 104, zł 8,15
Energetyka z. 15, 1964 r., s. 69, zł 4,65
Energetyka z. 16, 1964 r., s. 149, zł 7,50
Energetyka z. 17, 1964 r., s. 152, zł 7,10
Energetyka z. 18, 1965 r., s. 128, zł 6,40
Energetyka z. 19, 1965 r., s. 92, zł 6,—
Energetyka z. 20, 1965 r., s. 90, zł 4,70
Energetyka z. 21. 1966 r., s. 120, zł 8,—
Energetyka z. 22. 1966 r., s. 111, zł 6,—
Energetyka z. 23, 1966 r., s. 64, zł 5,—
Energetyka z. 24, 1967 r., s. 100, zł 5,—
Energetyka z. 25, 1967 r., s. 176, zł 10,—
Energetyka z. 26, 1967 r., s. 106, zł 6,—
Energetyka z. 27, 1967 r., s. 132, zł 8,—
Energetyka z. 28, 1968 r , s. 239, zł 13,—
Energetyka z. 29, 1968 r., s. 191, zł 10,—
Energetyka z. 30, 1969 r., s. 129, zł 7,—
Energetyka z. 31, 1969 r., s 171, zł 8,50
Energetyka z. 32, 1969 r., s. 90, zł 4,50
Energetyka z. 33, 1969 r., s. 97, zł 5,50
Energetyka z. 34, 1970 r., s. 354, zł 14,50
Energetyka z. 35, 1970 r., s. 169, zł 10,50
Energetyka z. 36, 1970 r., s, 134, zł 8,—
Energetyka z. 37, 1970 r., s. 107, zł 6,—
Energetyka z. 38, 1971 r., s. 102, zł 7,—
Energetyka z. 39, 1971 r., s., 122 zł 8,—
Energetyka z. 40, 1971 r., s., 118 zł 8,—