AUTOMATYKA z. 20

ANDRZEJ TYLIKOWSKI

P. 3341/72

STABILNOŚĆ STOCHASTYCZNA CIĄGŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYT NAUKOWY Nr 330 – GLIWICE 1972

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
ukazują się w następujących seriach:

A. AUTOMATYKA
B. BUDOWNICTWO
Ch. CHEMIA
E. ELEKTRYKA
En. ENERGETYKA
G. GÓRNICTWO
H HUTNICTWO
IS. INŻYNIERIA SANITARNA
JO. JĘZYKI OBCE
MF. MATEMATYKA-FIZYKA
M. MECHANIKA
NS. NAUKI SPOŁECZNE

Dotychczas ukazały się następujące zeszyty serii A.:

Automatyka z. 1, 1961 r., s. 200, zł 13,85
Automatyka z. 2, 1962 r., s. 138, zł 10,70
Automatyka z. 3, 1963 r., s. 90, zł 9,—
Automatyka z. 4, 1963 r., s. 108, zł 5,70
Automatyka z. 5, 1964 r., s. 114, zł 6,85
Automatyka z. 6, 1965 r., s. 184, zł 9,40
Automatyka z. 7, 1966 r., s. 224, zł 12,—
Automatyka z. 8, 1967 r., s. 154, zł 9,—
Automatyka z. 9, 1968 r., s. 257, zł 9,—
Automatyka z 10, 1968 r., s. 92, zł 6,—
Automatyka z. 11, 1969 r , s 61, zł 4,—
Automatyka z. 12. 1969 r., s. 122, zł 7,—
Automatyka z. 13. 1969 r., s. 91, zł 5,—
Automatyka z. 14, 1969 r., s. 380, zł 24,—
Automatyka z. 15, 1970 r., s. 133, zł 9,50
Automatyka z. 16, 1970 r., s. 123, zł 8,50
Automatyka z. 17, 1971 r., s. 89, zł 6,—
Automatyka z. 18, 1971 r., s. 96, zł 6,—
Automatyka z. 19, 1972 r., s. 122, zł 8,—

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 330

ANDRZEJ TYLIKOWSKI

P. 3341/72

STABILNOŚĆ STOCHASTYCZNA CIĄGŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

PRACA HABILITACYJNA Nr 114

Data otwarcia przewodu habilitacyjnego 25. I. 1971 r.

GLIWICE 1972

REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Iwo Pollo

REDAKTOR DZIAŁU

Stanisław Malzacher

SEKRETARZ REDAKCJI

Witold Gużkowski

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Kujawska 2

Nakł. 50+170 Ark. wyd. 2,25 Ark. druk. 3,25 Papier offsetowy kl. III, 70x100, 80 g
Oddano do druku 7. 2. 1972 Podpis. do druku 17. 4. 1972 Druk ukończ. w maju 1972
Zam. 215 3. 2. 1972 R-23 Cena zł 4,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

PJ-204/72

SPIS TREŚCI

Str.

Wstęp 5

1. Definicje 7

2. Metody badania stabilności 12

3. Lokalna stabilność stochastyczna 15

4. Stabilność średnia z p-tą potęgą 34

5. Stabilność przy stale działających zaburzeniach losowych 36

6. Techniczna stabilność stochastyczna 40

7. Uwagi końcowe 50

Wykaz literatury cytowanej 51

Wstęp

Stabilność ciągłych (o stałych rozłożonych) układów dynamicznych, jako dział jakościowej teorii układów dynamicznych, jest nowym i mało rozwiniętym kierunkiem badań naukowych. Trudności jakie spotyka się w analizie, spowodowane są między innymi brakami jakościowej teorii równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, będących często matematycznym modelem układów dynamicznych. Tak więc do dnia dzisiejszego nie ma twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań nieliniowych równań cząstkowych (nawet zdeterminowanych), takich jak na przykład równania NAVIERa - STOKESa dynamiki cieczy. Podstawy stabilności zdeterminowanych układów ciągłych zbudował MOWCZAN [26], uogólniając idee bezpośredniej metody LAPUNOWa. Tematykę stochastycznych równań operatorowych podjęli BENSOUSSAN [3], BHARUCHA-REID [4], SOBCZYK [21] oraz KAMPÉ de FÉRIET [10, 25], który swoje badania ograniczył do stochastycznych równań o pochodnych cząstkowych opisujących dynamikę ośrodków ciągłych. Próbę zbudowania teorii stochastycznych równań cząstkowych typu ITO uczynił KUSHNER [13, 14].

Pierwsze podejścia do analizy stabilności rozwiązań stochastycznych równań cząstkowych były poczynione w pracach ARIARATNAMA [1], LEPORE i SHAHa [15], NIKOŁAJENKO i SZTOLa [27], SKALMIERSKIego i autora niniejszej rozprawy [20]. Prace te związane były głównie ze stochastycznym wariantem dynamicznej utraty stabilności ciągłych układów mechanicznych (problem EULERa oraz drgań parametrycznych), opierały się na przybliżonej metodzie dyskretyzacji i wykorzystywały znane twierdzenia o stabilności rozwiązań układów dynamicznych o skończonej liczbie stopni swobody [29]. Ścisłą metodę analizy stabilności rozwiązań pewnej ograniczonej klasy stochastycznych równań liniowych cząstkowych zaproponował WANG [23], posługując się własnościami półgrupowymi rozwiązań [9], nierównością GRONWALLa-BELLMANa [2] oraz założeniem ergodyczności i stacjonarności procesów. Metodę bezpośrednią, jednak pozbawioną pełnego uzasadnienia matematycznego, opartą na wykorzystaniu własności funkcjonałów i ich pochodnych, umożliwiającą analizę stabilności ruchu szerokiej klasy liniowych stochastycznych układów dynamicznych zaproponowali PLAUT oraz INFANTE [18]. Metodę zapoczątkowaną przez WANGa rozszerzył autor [22, 19] na układy stochastycznie niestacjonarne.

Definicje stabilności przytoczone w rozdziale 1 są analogiczne do tych, jakie formułuje się dla dyskretnych stochastycznych układów dynamicznych: CHAŚMINSKIJ [29], BOGUSZ [5]. Omówiono te rodzaje stabilności, które w dalszych rozdziałach będą efektywnie badane. Praca zawiera zasadniczo oryginalne wyniki autora, traktujące o stabilności stochastycznych układów

ciągłych z deterministycznymi warunkami brzegowymi. Prezentowane twierdzenia są uogólnieniem metody zapoczątkowanej przez WANGa [23], przeniesieniem na grunt teorii stochastycznej idei MOWCZANa - LAPUNOWa stabilności względem dwu norm, rozszerzeniem pojęcia i metody badania technicznej stabilności stochastycznej na układy ciągłe za pomocą funkcjonałów, skonstruowanych między innymi metodą PEYSERa - PARKSa - PRITCHARDa [17, 16]. Twierdzenia te były już częściowo wcześniej referowane [22] i publikowane [19, 20].

1. Definicje

Przedmiotem naszych rozważań będą pewne jakościowe własności układów dynamicznych opisanych stochastycznymi równaniami różniczkowymi o pochodnych cząstkowych z deterministycznymi warunkami brzegowymi.

Zakładamy, że układ dynamiczny posiada następujące własności:

(i) Układ zajmuje pewien obszar $D^N \subset R^N$ (N-wymiarowej przestrzeni Euklidesa) z brzegiem $B^{N-1} \equiv \partial D^N$, $x = [x^1, \ldots, x^N] \in R^N$.

(ii) Układ opisany jest zbiorem M funkcji $u(x,t) = [u^1(x,t), \ldots, u^M(x,t)]$; należących do pewnej przestrzeni funkcyjnej $U(\bar{D}^N)$ (przestrzeni fazowe), $t \in \{t: 0 \leq t < T\} \equiv \Delta$, spełniających układ stochastycznych równań różniczkowych cząstkowych

$$\frac{\partial u^i(x,t)}{\partial t} = F^i(\omega, u^1, \ldots, u^M, x^1, \ldots, x^N, t) \tag{1}$$

w obszarze $C^{N+1} \equiv D^N \times \Delta \subset R^{N+1}$, gdzie F^i jest operatorem różniczkowym względem współrzędnych przestrzennych x^i, ω jest elementem przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{P}, P)$. Przestrzenią U funkcji $u(x,t)$ może być zbiór różnorakich parametrów charakteryzujących stan układu materialnego (mechanicznego, elektrycznego, chemicznego itp.).

(iii) Procesy zachodzące w układzie przyjmują zadane (deterministyczne) wartości

$$u_0 = u_0(x,0) \in U_0(\bar{D}^N) \supset U(\bar{D}^N) \tag{2}$$

w płaszczyźnie $D^N \times \{t = 0\} \subset R^{N+1}$ (warunki początkowe),

$$u_1 = u_1(x,t) \in U_1(\bar{D}^N) \supset U(\bar{D}^N) \tag{3}$$

na brzegu $B^{N-1} \times \Delta \subset R^{N+1}$ (warunki brzegowe).

(iv) $\bigwedge_{\omega \in \Omega}$ istnieje i jest jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia opisanego równaniem (1) oraz warunkami (2), (3) reprezentowane trajektorią fazową $u = u(x,t)$ w przestrzeni U. Krzywa ta wychodzi w chwili $t = 0$ z punktu u_0 i jest określona dla każdej wartości $t \in \Delta$. Warto podkreślić, że (1) nie jest pojedynczym układem równań, lecz ich zbiorem generowanym przez operatory prawych stron F^i, należą-

cych do zadanej przestrzeni funkcyjnej, na której podzbiorach określone jest prawdopodobieństwo.

Oceny rozwiązań będziemy dokonywać w oparciu o pojęcie normy [9, 24]. Ze względu na to, że przestrzeń fazowa procesów zachodzących w ciągłych układach dynamicznych nie może już być podzbiorem skończenie wymiarowej przestrzeni Euklidesa, lecz jest podzbiorem przestrzeni funkcyjnej U wybór normy nie jest obojętny i musi być podyktowany stroną fizyczną zagadnienia. W odróżnieniu od przestrzeni skończenie wymiarowych, zbieżność względem jednej normy nie jest tu równoważna zbieżności względem innej. Często będziemy korzystać z normy w przestrzeni L^2 o budowie:

$$\|u\|_1 = \left(\sum_{j=1}^{M} \int_{D^N} \left[u^j(x,t)\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

której pierwowzorem jest pierwiastek z energii układu (podobnie jak w układach dyskretnych [20]). Inne postacie normy konstruuje się korzystając z pochodnych funkcji $u(x,t)$; na przykład

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \int_{D^N} \left[\frac{\partial}{\partial x^j} u^i(x,t)\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

$$\|u\|_3 = \sup_{D^N} \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \left|\frac{\partial}{\partial x^j} u^i(x,t)\right|. \tag{6}$$

Oprócz norm, których przykłady podano wzorami (4), (5), (6) można wprowadzić ogólniejsze pojęcie normy będące jawną funkcją czasu $\|u,t\|$. Ze względu na wykorzystanie w definicjach stabilności rozwiązań wprowadźmy dla pary (u,t) dwie normy $\|u,t\|_0$ oraz $\|u,t\|$ o następujących własnościach:

(i) $\|u,t\|_0$ oraz $\|u,t\|$ są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, przy czym zachodzi

$$\|0,t\|_0 = 0, \quad \|0,t\| = 0, \quad t \in \Delta, \tag{7}$$

gdzie $0 = [0, \ldots, 0]$ jest zerowym elementem przestrzeni U.

(ii) $\|u,t\|$ jest stochastycznie ciągła względem $\|u,t\|_0$ w punkcie $t = 0$, to znaczy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{\delta>0} \bigvee_{r>0} \|u(x,0), 0\|_0 < r \Rightarrow \left\{\omega : \|u(x,0), 0\| > \varepsilon\right\} < \delta \tag{8}$$

Rozważania nasze ograniczymy do przypadku, gdy warunki brzegowe (3) są ustalone, a jedynie będziemy badali efekty zmian warunków początkowych. Nie zmniejszając ogólności analizy, będziemy zakładali, że równanie (1) z warunkami (2) oraz (3) posiada rozwiązanie trywialne $u(x,t) \equiv 0$ (podobnie jak w układach dyskretnych [20, 29]). Wprowadzenie dwu norm [26] do badania stabilności związane jest z różnymi charakterystykami procesów zachodzących w układach dynamicznych na początku i w czasie trwania ruchu. Warto podkreślić, że takie podejście jest bliższe pierwotnym ideom LAPUNOWa.

Definicja 1

Rozwiązanie trywialne $u(x,t) \equiv 0$ równania (1) jest lokalnie stabilne stochastycznie względem dwu norm $\|\cdot,\cdot\|_0$, $|\cdot,\cdot|$, jeżeli prawdziwe jest zdanie logiczne

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{\delta>0} \bigvee_{r>0} \|u(x,0),\ 0\|_0 < r \rightarrow \bigwedge_{t\geq 0} P\{\omega : |u(x,t),\ t| > \varepsilon\} < \delta \tag{9}$$

Definicja 2

Rozwiązanie $u(x,t) \equiv 0$ jest asymptotycznie lokalnie stabilne stochastycznie, jeżeli oprócz (9) zachodzi

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{r>0} \|u(x,0),\ 0\|_0 < r \rightarrow \lim_{t\to\infty} P\{\omega : |u(x,t),\ t| > \varepsilon\} = 0. \tag{10}$$

Definicja 3

Rozwiązanie $u(x,t) \equiv 0$ jest średnio stabilne z p-tą potęgą względem dwu norm, jeżeli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{r>0} \|u(x,0),\ 0\|_0 < r \rightarrow \bigwedge_{t\geq 0} E\,|u(x,t),\ t|^p < \varepsilon \tag{11}$$

Przypadek $p = 1$ nazywać będziemy stabilnością według średniej.

Definicja 4

Rozwiązanie $u(x,t) \equiv 0$ jest asymptotycznie stabilne z p-tą potęgą, jeżeli zachodzi (11) oraz

$$\bigvee_{r>0} u(x,0),\ 0\|_0 < r \rightarrow \lim_{t\to\infty} E\,|u(x,t),\ t|^p = 0. \tag{12}$$

Definicja 5

Rozwiązanie $u(x,t) \equiv 0$ jest zupełnie stabilne stochastycznie, gdy zachodzi (9), a ponadto

$$\bigwedge_{u(x,0)} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{\delta>0} \bigvee_{T>0} \bigwedge_{t>T} P\{\omega : |u(x,t),\ t| > \delta\} < \varepsilon \tag{13}$$

Analogicznie określa się zupełną stabilność z p-tą potęgą, asymptotyczną stabilność stochastyczną oraz asymptotyczną stabilność z p-tą potęgą.

Definicja 6

Rozwiązanie $u(x,t) \equiv 0$ jest stabilne z prawdopodobieństwem 1 (prawie na pewno stabilne) w tym lub innym sensie, jeżeli wszystkie trajektorie, być może z wyjątkiem zdarzeń o prawdopodobieństwie równym 0, są stabilne w odpowiednim sensie.

Oprócz równania (1) będziemy rozpatrywali układy dynamiczne opisane równaniami

$$\frac{\partial u^i(x,t)}{\partial t} = P^i(\omega, u^1, \ldots, u^M, x^1, \ldots, x^N, t) + R^i(\omega, u^1, \ldots, x^1, \ldots, x^N, t), \tag{14}$$

gdzie R^i jest składową zaburzającą równanie (1). Można analizować stabilność rozwiązania $u(x,t) \equiv 0$ równania (1) przy stale działających zaburzeniach R opisanych równaniem (14) z tym, że $u(x,t) \equiv 0$ może nie być rozwiązaniem (14) $R(\omega, 0, \ldots, 0, x^1, \ldots, x^N, t) \neq 0$.

Definicja 7

Rozwiązanie trywialne $u(x,t) \equiv 0$ równania (1) jest stabilne stochastycznie przy stale działających zaburzeniach losowych $R(\omega, u, x, t)$, jeżeli słuszne jest zdanie logiczne

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{\delta>0} \bigvee_{r>0} \left\{ \|u(x,0), 0\|_0 + \sup_{t\geq 0} \left[E\|R\|_1 + (D\|R\|_1)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} < r \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \bigwedge_{t>0} P\left\{ \omega : \|u(x,t), t\| > \delta \right\} < \varepsilon \tag{15}$$

gdzie $D(.)$ jest wariancją, $\|\cdot\|_1$ pewną normą zaburzeń.

Mając na uwadze rzeczywiste okoliczności w jakich pracują układy dynamiczne, których poprawne funkcjonowanie uwarunkowane jest ograniczonym odchyleniem od punktu pracy w przedziale czasu Δ (skończonym lub nie), będącym wynikiem zadanych z góry warunków początkowych, jak i ograniczonych zaburzeń, wprowadzimy nowe określenie: technicznej stabilności stochastycznej wprowadzone do układów dyskretnych przez BOGUSZa [5].

Definicja 8

Rozwiązanie $u(x,t) \equiv 0$ jest technicznie stabilne według prawdopodobieństwa $1 - \varepsilon_0$ względem obszarów

$D_\delta = \{u(x,0) : \|u(x,0), 0\|_0 < \delta\}$ (warunków początkowych),

$D_h = \{R : \|R(\omega, u, x, t)\| < h\}$ (możliwych zaburzeń),

$D_\varepsilon = \{u(x,t) : \|u(x,t), t\| < \varepsilon\}$ (dopuszczalnych rozwiązań),

jeżeli

$$\bigwedge_{u(x,0)\in D_\delta} \bigwedge_{R\in D_h} P\{\omega : u(x,t)\in D_\varepsilon\} \geqslant 1-\varepsilon_0. \tag{16}$$

Jeżeli w definicjach 1-8 przyjmie się $\|\cdot,\cdot\|_0 = \|\cdot,\cdot\|$, to można mówić o stabilności względem jednej normy. Między wymienionymi rodzajami stabilności zachodzą związki analogiczne do tych, jakie istnieją pomiędzy definicjami stabilności w układach dyskretnych [29].

2. Metody badania stabilności

2.1. Sprowadzenie do zagadnienia dyskretnego [1, 15, 27, 20]

Jeżeli układ dynamiczny opisany jest liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym przestrzenią fazową U może być przestrzeń Banacha [9, 24]. Co więcej, często można przyjąć, że przestrzeń ta jest ośrodkowa. Takie układy ciągłe są najprostszymi uogólnieniami układów dynamicznych o skończonej liczbie stopni swobody - posiadają przeliczalną ich liczbę (a nie kontinuum, jak w przypadku przestrzeni nieośrodkowych). Ośrodkowość sprawia, że istnieje wzajemna jednoznaczność między przestrzenią $U(\bar{D}^N)$ a pewnym podzbiorem przestrzeni R^∞. W ten sposób wyjściowe równanie (1) liniowe jest równoważne nieskończonemu układowi równań różniczkowych zwyczajnych (na przykład metoda szeregów Fouriera [6, 12]). Ograniczając się w praktyce do ich skończonej liczby, sprowadzamy problem do badania stabilności rozwiązania $u(x,t) \equiv 0$ do analizy stabilności rozwiązania $f^1(t) \equiv \ldots \equiv f^n(t) \equiv 0$ układu stochastycznych równań zwyczajnych.

Konstrukcję układu równań różniczkowych zwyczajnych, równoważnego w pewnym stopniu równaniu cząstkowemu (1) (być może nieliniowemu), można przeprowadzić za pomocą metod przybliżonych. W szczególności ważną rolę odgrywa metoda Galerkina, żądająca minimalizacji błędu kwadratowego spowodowanego tą aproksymacją.

2.2. Metoda pośrednia oparta na wykorzystaniu własności półgrupowych rozwiązań [23, 22, 20]

Rozpatrzmy klasę liniowych stochastycznych równań cząstkowych postaci

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = [L_0 + G(x,t,\omega)]\, u(x,t), \tag{17}$$

$$t \geq 0, \quad x \in D^N,$$

z deterministycznym warunkiem brzegowym

$$B\,[u(x,t)] = 0, \quad x \in \partial D^N, \tag{18}$$

gdzie L_0 i B są operatorami różniczkowymi względem zmiennych przestrzennych o współczynnikach stałych. L_0 jest generatorem silnie ciągłej półgrupy operatorów [9]

$$\{\Phi(t_2,t_1)\}, \quad \Phi : U \to U,$$

$G(x,t,\omega)$ jest macierzą, której niezerowe elementy są procesami stochastycznymi o dostatecznie gładkich realizacjach, aby istniało i było jednoznaczne rozwiązanie równania (17).

Z własności operatora Φ wynika, że równanie (17) jest równoważne formule całkowej

$$u(x,t) = \Phi(t,0)\, u(x,0) + \int_0^t \Phi(t,s)\, G(x,s,\omega)\, u(x,s)ds, \tag{19}$$

będącej punktem wyjściowym oceny normy rozwiązania. Wyprowadzenie efektywnych kryteriów stabilności staje się możliwe po przyjęciu założeń odnoszących się do normy operatora Φ oraz wartości średniej normy macierzy G.

Zapowiedzianą tu metodę można stosować do analizy stabilności rozwiązania równania nieliniowego

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \left[L_0 + G(x,t,\omega)\right] u(x,t) + R(x,u,t,\omega), \tag{20}$$

w którym L_0 i G są określone tak samo jak w równaniu (17) a $R(x,u,t,\omega)$ jest nieliniową funkcją u, przy czym istnieje proces $B(t,\omega)$ spełniający warunek

$$\sup_{x \in D^N} \sup_{u \in U(D^N)} \frac{\|R(x,u,t,\omega)\|}{\|u(x,t)\|} \leq B(t,\omega). \tag{21}$$

2.3. Metoda bezpośrednia (funkcjonałów LAPUNOWa)

Metoda ta jest przeniesieniem na ciągłe układy stochastyczne twierdzeń MOWCZANa [26] o stabilności względem dwu norm, żądających istnienia dodatnio określonego nierosnącego wzdłuż trajektorii fazowej funkcjonału V.

Analiza stabilności układów stochastycznych opierać się będzie na nierówności

$$\frac{dV}{dt} \leq \chi(t,\omega)\, V. \tag{22}$$

Proces $\chi(t,\omega)$ można wyznaczyć za pomocą rachunku wariacyjnego [18]. Kryteria stabilności sprowadzają się do ograniczeń średniej całki procesu $\chi(t,\omega)$.

Omówimy teraz efektywną konstrukcję stochastycznych funkcjonałów, mogących służyć do badania stabilności technicznej równań liniowych, zaproponowaną do deterministycznych układów dynamicznych przez PAWŁSa i PRITCHARDa [16], opartą na metodzie PEYCERa [17] budowy całek energetycznych

hiperbolicznych równań cząstkowych [6, 12]. Metodę tę można formalnie rozszerzyć na równania paraboliczne. W tym celu sprowadźmy liniowy układ równań (1) do postaci

$$L^i(u) = 0, \tag{23}$$

gdzie $L(.)$ jest operatorem różniczkowania cząstkowego względem t oraz x^i, zawierającym pochodne względem czasu do rzędu r. Niech $u(x,t)$ będzie rozwiązaniem równania (23) w obszarze C^{N+1}. Wprowadźmy różniczkowy operator $N(.)$ $r-1$ rzędu względem czasu, otrzymany z L poprzez formalne zróżniczkowanie względem $\frac{\partial}{\partial t}$.
Oczywiście

$$\int_{C_t^{N+1}} N^i(u)L^i(u)dC^{N+1} = 0, \tag{24}$$

gdzie $C_t^{N+1} = D^N \times \{\tau : 0 < \tau \leq t\} \subset C^{N+1}$.

Całkując (24) przez części i wykorzystując warunki brzegowe przedstawiamy (24) w formie sumy

$$\int_{\partial C_t^{N+1}} q(u)\, d(\partial C^{N+1}) + \int_{C_t^{N+1}} Q(u)\, dC_t^{N+1} = 0, \tag{25}$$

gdzie $q(u)$ oraz $Q(u)$ są formami kwadratowymi względem pochodnych u, w tym pochodnych czasowych rzędu niższego niż r. Zauważmy, że nakładając warunki określoności możemy wybrać w charakterze funkcjonału V pierwszy składnik lewej strony (25)

$$V = \int_{\partial C_t^{N+1}} q(u)\, d(\partial C^{N+1}), \tag{26}$$

Pochodną funkcjonału V wzdłuż trajektorii równania (23) wyznacza się bezpośrednio z (25).

3. Lokalna stabilność stochastyczna

Twierdzenie 1 [22]

Jeżeli

(i) $$\bigvee_{C>0} \bigvee_{\gamma>0} \|\phi(t_2,t_1)\| \leq C \exp\left[-\gamma(t_2-t_1)\right], \tag{27}$$

(ii) proces $\|G(x,t,\omega)\|$ spełnia słabe prawo wielkich liczb [29],

(iii) zachodzi nierówność

$$\sup_{t \geq 0} E\,\|G(x,t,\omega)\| < \frac{\gamma}{C}, \tag{28}$$

to rozwiązanie trywialne $u(x,t) \equiv 0$ równania (17) jest zupełnie stabilne stochastycznie (w myśl definicji 5) względem $\|\cdot\|$.

Dowód

Korzystając z własności normy oraz założenia (i) na podstawie (19) napiszemy dla $t \geq 0$

$$\|u(x,t)\| \leq C \exp(-\gamma t)\|u(x,0)\| + C \int_0^t \exp\left[-\gamma(t-s)\right] \|G(x,s,\omega)\| \|u(x,s)\|\, ds. \tag{29}$$

Z nierówności GRONWALLa-BELLMANa [2] wynika, że norma rozwiązania posiada majorantę dla $t \geq 0$

$$\|u(x,t)\| \leq C\|u(x,0)\| \exp(-\gamma t + \int_0^t \|G(x,s,\omega)\| ds). \tag{30}$$

Na podstawie założenia (ii) dla dowolnych dodatnich liczb ε oraz δ_1 istnieje dodatni czas T taki, że dla $t \geq T$ zachodzi

$$\varepsilon >> P\left\{\omega: \left| \frac{1}{t} \int_0^t \|G(x,s,\omega)\| ds - \frac{1}{t} \int_0^t E\|G(x,s,\omega)\| ds \right| > \delta_1 \right\}.$$

Tym bardziej prawdziwy jest ciąg nierówności

$$\varepsilon > P\left\{\omega: \frac{1}{t}\int_0^t \|G(x,s,\omega)\|\, ds > \frac{1}{t}\int_0^t E\|G(x,s,\omega)\|\, ds + \delta_1\right\} \geqslant$$

$$\geqslant P\left\{\omega: \frac{1}{t}\int_0^t \|G(x,s,\omega)\|\, ds > \sup_{t \geqslant 0} E\|G(x,s,\omega)\| + \delta_1\right\}. \tag{31}$$

Na mocy warunku ograniczoności (iii) istnieje takie $\delta_1 > 0$, że prawdziwość (31) pociąga za sobą warunek:

$$\varepsilon > P\left\{\omega: \frac{1}{t}\int_0^t \|G(x,s,\omega)\|\, ds > \frac{\gamma}{C}\right\}. \tag{32}$$

Przyjmijmy takie $T > 0$, dla którego zachodzi

$$\varepsilon > P\left\{\omega: C\int_0^T \|G(x,s,\omega)\|\, ds > \gamma T\right\}. \tag{33}$$

i oznaczmy $\gamma T = \ln Z$.
Zatem

$$Z = \exp(\gamma T), \qquad \text{gdzie} \quad Z > 1.$$

Niech $\|u(x,0)\|$ spełnia warunek:

$$C\,\|u(x,0)\|\, Z < \delta \tag{34}$$

Na podstawie (30), (34), (32), (33) mamy

$$P\left\{\omega: \|u(x,t)\| > \delta\right\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\omega: C\,\|u(x,0)\| \exp\left[C\left(\frac{1}{t}\int_0^t \|G(x,s,\omega)\|\, ds - \frac{\gamma}{C}\right)t\right] > C\,\|u(x,0)\|\, Z\right\} =$$

$$= P\left\{\omega: C\left(\frac{1}{t}\int_0^t \|G(x,s,\omega)\|\, ds - \frac{\gamma}{C}\right)t > \ln Z\right\} =$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&= P\left\{\omega : \frac{1}{t}\int_0^t \|G(x,s,\omega)\|\, ds > \frac{\ln Z}{Ct} + \frac{\gamma}{C}\right\} < \\
&\qquad < P\left\{\omega : \frac{1}{t}\int_0^t \|G(x,s,\omega)\|\, ds > \frac{\gamma}{C}\right\} < \varepsilon \quad \text{dla} \quad t > T. \\
&= P\left\{\omega : C\int_0^t \|G(x,s,\omega)\|\, ds > \ln Z + \gamma t\right\} < \\
&\qquad < P\left\{\omega : C\int_0^T \|G(x,s,\omega)\|\, ds > \ln Z\right\} < \varepsilon \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq T.
\end{aligned}
\right. \tag{35}
$$

Więc dla dowolnych $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ istnieje taka liczba $r > 0$

$$
\left(r < \frac{\delta}{ZC} = \frac{\delta}{\exp(\gamma T)C}\right),
$$

że zachodzi

$$
\|u(x,0)\| < r \Rightarrow \bigwedge_{t \geq 0} P\left\{\omega : \|u(x,t)\| > \delta\right\} < \varepsilon,
$$

co kończy dowód lokalnej stabilności stochastycznej.

Korzystając z nierówności (30) dla dowolnych $\delta > 0$ i $u(x,0)$ można napisać

$$
P\left\{\omega : \|u(x,t)\| > \delta\right\} <
$$

$$
< P\left\{\omega : \frac{1}{t}\int_0^t \|G(x,s,\omega)\|\, ds > \frac{\gamma}{C} + \frac{1}{Ct}\ln\left(\frac{\delta}{C\|u(x,0)\|}\right)\right\}. \tag{36}
$$

Na mocy założenia (iii) istnieje taka stała $\delta_1 > 0$, że (36) można ograniczyć z góry prawdopodobieństwem

$$
P\left\{\omega : \frac{1}{t}\int_0^t \|G(x,s,\omega)\|\, ds > \sup_{t \geq 0} E\,\|G(x,t,\omega)\| + \delta_1\right\}. \tag{37}
$$

Posługując się (31) na podstawie (36) i (37) zachodzi nierówność

$$P\{\omega : \|u(x,t)\| > \delta\} < P\left\{\omega : \left|\frac{1}{t}\int_0^t \|G(x,s,\omega)\|\,ds - \frac{1}{t}\int_0^t E\|G(x,s,\omega)\|\,ds\right| > \delta_1\right\}. \tag{38}$$

Ponieważ proces $\|G(x,t,\omega)\|$ spełnia prawo wielkich liczb, to dla dowolnych dodatnich liczb δ_1 oraz ε istnieje taki czas $T > 0$, że dla $t \geqslant T$ zachodzi

$$P\left\{\omega : \left|\frac{1}{t}\int_0^t \|G(x,s,\omega)\|\,ds - \frac{1}{t}\int_0^t E\,\|G(x,s,\omega)\|\,ds\right| > \delta_1\right\} < \varepsilon,$$

lub korzystając z (38)

$$P\{\omega : \|u(x,t)\| > \delta\} < \varepsilon,$$

co dowodzi tezy twierdzenia.

Twierdzenie 2

Jeżeli spełnione są założenia (i) oraz (iii) twierdzenia 1, a ponadto (ii') proces $\|G(x,t,\omega)\|$ spełnia silne prawo wielkich liczb, to rozwiązanie trywialne równania (17) jest asymptotycznie stochastycznie stabilne z prawdopodobieństwem 1.

Dowód

Pierwsza część dowodu jest identyczna z dowodem twierdzenia 1, gdyż silne prawo wielkich liczb pociąga za sobą słabe. Wystarczy zatem wykazać, że

$$P\left\{\omega : \lim_{t\to\infty} \|u(x,t)\| = 0\right\} = 1.$$

Korzystając z nierówności (30) napiszemy

$$\lim_{t\to\infty} \|u(x,t)\| < C\,\|u(x,0)\| \exp\left\{C \lim_{t\to\infty}\left|\frac{1}{t}\int_0^t \|G(x,s,\omega)\|\,ds - \frac{\delta}{C}\right| t\right\}. \tag{39}$$

Zatem na podstawie (ii')

$$P\left\{\omega : \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \|G(x,s,\omega)\|\,ds = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t E\,\|G(x,s,\omega)\,ds\right\} = 1,$$

nierówności (39) oraz (28) zachodzi

$$P\left\{\omega: \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \|G(x,s,\omega)\|\, ds < \frac{1}{c}\right\} = 1.$$

Wobec czego z prawdopodobieństwem 1 otrzymujemy równość

$$\lim_{t\to\infty} \|u(x,t)\| = 0,$$

kończącą dowód.

Uwaga

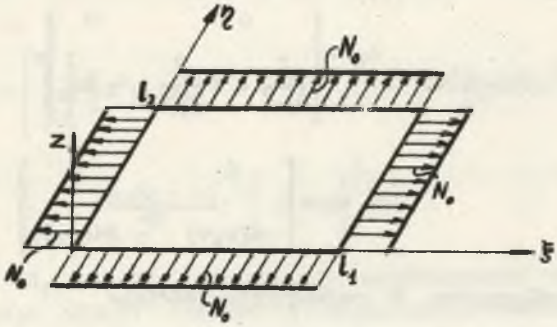
Twierdzenia 1 i 2 mogą być rozszerzone na nieliniowe układy dynamiczne opisane równaniem (20) spełniające warunek (21), w tym celu w odpowiednich założeniach $\|G(x,t,\omega)\|$ należy zastąpić przez $\|G(x,t,\omega)\| + B(t,\omega)$.

Przykład 1

Rozpatrzmy stabilność rozwiązania trywialnego cząstkowego równania różniczkowego postaci

$$\varrho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2\varrho\beta(\omega,t)\frac{\partial z}{\partial t} + k(\omega,t)z - N_0\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\right) = 0. \qquad (a)$$

Równanie (a) opisywać może małe drgania poprzeczne (problem geometrycznie i fizycznie liniowy) membrany jednorodnej o gęstości ϱ, grubości h poddanej stałemu naciągowi N_0 na jednostkę długości brzegu, w ośrodku o przypadkowych parametrach: współczynniku tłumienia $\beta(\omega,t)$ oraz sprężystości $k(\omega,t)$. z jest przemieszczeniem poprzecznym, t czasem, ξ η układem współrzędnych prostokątnych (rys. 1).



Rys. 1

Przyjmijmy ponadto warunki brzegowe

$$z(0,\eta,\tau) = z(l_1,\eta,t) = z(\xi,0,\tau) = z(\xi,l_2,\tau) = 0. \tag{b}$$

Wprowadzając współrzędne bezwymiarowe

$$x = \frac{\xi}{l_1}, \quad y = \frac{\eta}{l_2}, \quad u = \frac{z}{l_1}, \quad t = \frac{\tau}{l_1}\left(\frac{N_o}{\varrho h}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{c}$$

przekształcimy (a) do postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2n_o v - \alpha(\omega,t)u - 2n(\omega,t)v, \end{aligned} \tag{d}$$

gdzie

$$\begin{aligned} n_1 &= n_o + n(\omega,t) = \beta\left(\omega,tl_1\left(\frac{\varrho h}{N_o}\right)^{\frac{1}{2}}\right)l_1\left(\frac{\varrho}{N_o h}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \alpha(\omega,t) &= k\left[\omega,tl_1\left(\frac{\varrho h}{N_o}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{l_1^2}{N_o}, \quad f = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2. \end{aligned} \tag{e}$$

Układ (d) posiada budowę (17) z

$$\begin{aligned} L_o &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + f\frac{\partial^2}{\partial y^2} & -2n_o \end{bmatrix}, \\ G(t,\omega) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha(\omega,t) & -2n(\omega,t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{f}$$

Operator półgrupowy Φ rozwiązania równania

$$\frac{\partial w}{\partial t} = L_o w, \quad w = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \tag{g}$$

wyznaczyć można klasyczną metodą Fouriera. Przy założeniu małego tłumienia $(\pi^2 (1 + f) > n_o^2)$ Φ posiada budowę

$$w(x,y,t) = \Phi(t,0)\, w(x,y,0) \equiv \Phi\ (t)\, w(x,y,0) =$$

$$= 4 \exp(-n_o t) \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 \sin(i\pi x) \sin(i\pi x_o) \sin(j\pi y) \sin(j\pi y_o)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{n_o}{\omega_{ij}} \sin \omega_{ij} t + \cos \omega_{ij} t & \frac{1}{\omega_{ij}} \sin \omega_{ij} t \\ -\frac{\omega_{ij}^2 + n_o^2}{\omega_{ij}} \sin \omega_{ij} t & \cos \omega_{ij} t - \frac{n_o}{\omega_{ij}} \sin \omega_{ij} t \end{bmatrix} w(x_o, y_o, 0)\, dx_o dy_o, \tag{h}$$

gdzie

$$\omega_{ij} = (\pi^2 (i^2 + f\, j^2) - n_o^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Uzupełniając wektor w składowymi $\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}$ tworzymy nowy wektor

$$\mathcal{W}(x,y,t) = \begin{vmatrix} u \\ v \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{vmatrix}, \tag{i}$$

a rozwiązanie będziemy oceniać za pomocą normy zdefiniowanej jak następuje

$$\|\mathcal{W}(x,y,t)\| = \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[u^2(x,y,t) + v^2(x,y,t) + \left(\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{j}$$

Oznaczając przez $SS_{ij}(u)$, $CS_{ij}(u)$, $SC_{ij}(u)$ współczynniki rozwinięcia fourierowskiego funkcji $u(x,y)$ (litera S reprezentuje rozwinięcie względem sinusów, C względem cosinusów, na pierwszym miejscu zaznaczony jest

rodzaj rozwinięcia względem zmiennej x, na drugim względem zmiennej y) oraz wykorzystując twierdzenie Parsevala na podstawie (i) napiszemy

$$\|W(x,y,t)\| = \left\{ \sum_{i,j=1}^{\infty} \left[SS_{ij}^2(u) + SS_{ij}^2(v) + CS_{ij}^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + SC_{ij}^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \exp(-n_o t) \left\{ \sum_{i,j=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(\frac{n_o}{\omega_{ij}} \sin \omega_{ij} t + \cos \omega_{ij} t\right) SS_{ij}(u_o) + \frac{\sin \omega_{ij} t}{\omega_{ij}} SS_{ij}(v_o) \right]^2 + \right.\right.$$

$$+ \left[-\frac{\omega_{ij}^2 + n_o^2}{\omega_{ij}} \sin \omega_{ij} t \; SS_{ij}(u_o) + \left(\cos \omega_{ij} t - \frac{n_o}{\omega_{ij}} \sin \omega_{ij} t\right) SS_{ij}(v_o) \right]^2 +$$

$$+ \left[i\pi \left(\frac{n_o}{\omega_{ij}} \sin \omega_{ij} t + \cos \omega_{ij} t\right) SS_{ij}(u_o) + i\pi \frac{\sin \omega_{ij} t}{\omega_{ij}} SS_{ij}(v_o) \right]^2 +$$

$$\left.\left. + \left[j\pi \left(\frac{n_o}{\omega_{ij}} \sin \omega_{ij} t + \cos \omega_{ij} t\right) SS_{ij}(u_o) + j\pi \frac{\sin \omega_{ij} t}{\omega_{ij}} SS_{ij}(v_o) \right]^2 \right\} \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Wykonując działania można stwierdzić, że zachodzi ciąg nierówności

$$\| (x,y,t)\| \leq \exp(-n_o t) \left\{ 2 \sum_{i,j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n_o}{\omega_{ij}} \sin \omega_{ij} t + \cos \omega_{ij} t\right)^2 SS_{ij}^2(u_o) + \right.\right.$$

$$+ \frac{\sin^2 \omega_{ij} t}{\omega_{ij}^2} SS_{ij}^2(v_o) + \frac{(\omega_{ij}^2 + n_o^2)^2}{\omega_{ij}^2} \sin^2 \omega_{ij} t \; SS_{ij}^2(u_o) +$$

$$+ \left(\cos \omega_{ij} t - \frac{n_o}{\omega_{ij}} \sin \omega_{ij} t\right)^2 SS_{ij}^2(v_o) + \pi^2 (i^2 + j^2) \left(\left(\frac{n_o}{\omega_{ij}} \sin \omega_{ij} t + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \cos \omega_{ij} t\right)^2 SS_{ij}^2(u_o) + \frac{\sin^2 \omega_{ij} t}{\omega_{ij}^2} SS_{ij}^2(v_o) \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \exp(-n_o t) \left\{ 2 \sum_{i,j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n_o}{\omega_{ij}} + 1\right)^2 SS_{ij}^2(u_o) + \left(\frac{1}{\omega_{ij}^2} + \left(\frac{n_o}{\omega_{ij}} + 1\right)^2\right) SS_{ij}^2(v_o) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \pi^2 (i^2 + j^2) \left(2\left(\frac{n_o^2}{\omega_{ij}^2} \sin^2 \omega_{ij} t + \cos^2 \omega_{ij} t\right) SS_{ij}^2(u_o) + \frac{\sin^2 \omega_{ij} t}{\omega_{ij}^2} SS_{ij}^2(v_o) \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (k)$$

Przyjmując oznaczenia

$$\varepsilon = \max \{1, f\},$$

$$\delta = \min \{1, f\},$$

otrzymujemy warunki:

$$\frac{(\omega_{ij}^2 + n_o^2)^2}{\omega_{ij}^2} = \frac{\pi^4 (i^2 + f j^2)^2}{\pi^2 (i^2 + f j^2) - n_o^2} \leqslant \pi^2 (i^2 + fj^2) \leqslant \pi^2 \varepsilon (i^2 + j^2),$$

$$\frac{\pi^2 (i^2 + j^2)}{\omega_{ij}^2} \leqslant \frac{i^2 + j^2}{i^2 + fj^2} \leqslant \frac{i^2 + j^2}{(i^2 + j^2)\delta} = \frac{1}{\delta},$$

na podstawie których norma (j) rozwiązania spełnia oszacowanie

$$\|W(x,y,t)\| \leqslant \exp(-n_o t) \left\{ 2 \sum_{i,j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n_o}{\omega_{ij}} + 1\right)^2 SS_{ij}^2(u_o) + \right.\right.$$

$$+ \left(\frac{1}{\omega_{ij}^2} + \frac{1}{\delta} + \left(\frac{n_o}{\omega_{ij}} + 1\right)^2\right) SS_{ij}^2(v_o) + \frac{2n_o^2}{\delta} SS_{ij}^2(u_o) +$$

$$\left.\left. + (2 + \varepsilon)\, \pi^2 (i^2 + j^2)\, SS_{ij}^2(u_o) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C \exp(-n_o t) \left\{ \sum_{i,j=1}^{\infty} \left[SS_{ij}^2(u_o) + SS_{ij}^2(v_o) + SS_{ij}^2\left(\frac{\partial u_o}{\partial x}\right) + SS_{ij}^2\left(\frac{\partial u_o}{\partial y}\right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

gdzie

$$C^2 = \max\left\{ 2\left[\left(\frac{n_o}{\omega_{11}} + 1\right)^2 + \frac{2n_o^2}{\delta}\right],\ 2\left[\left(\frac{n_o}{\omega_{11}} + 1\right)^2 + \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\delta}\right],\ 2(2 + \varepsilon) \right\}.$$

Zatem norma rozwiązania na podstawie twierdzenia Parsevala posiada majorantę o budowie

$$\|W(x,y,t)\| \leqslant C \exp(-n_o t)\, \|W(x,y,0)\|,$$

czyli spełnione jest założenie (i) twierdzenia 1.

Jeżeli procesy $n(\omega,t)$ i $\alpha(\omega,t)$ spełniają słabe prawo wielkich liczb oraz

$$\sup_{t \geqslant 0} E\, \|G\| < \frac{n_o}{C}, \tag{1}$$

to rozwiązanie trywialne równania (a) jest zupełnie stabilne stochastycznie (definicja 5) względem normy (i), a warunek stabilności (1) przybiera ostatecznie postać

$$\sup_{t \geq 0} E\left[\alpha^2(\omega,t) + 4\, n^2(\omega,t)\right]^{\frac{1}{2}} < \frac{n_0}{r} \tag{m}$$

Innymi (jednowymiarowymi) układami dynamicznymi, których modele matematyczne są podobne do równania (a) są: linia długa o przypadkowej oporności i upływności oraz struna (analog mechaniczny) [20].

Twierdzenie 3

Jeżeli

(i) istnieje funkcjonał $V(u,t)$ dodatnio określony względem normy $\|u,t\|$, to znaczy

$$V(u,t) \geq 0 \wedge \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\gamma \geq 0} \bigwedge_{t \geq 0} \|u,t\| > \varepsilon \Rightarrow V(u,t) > \gamma$$

(ii) $V(u,t)$ jest ciągły względem $\|u,t\|_0$ w punkcie $t = 0$, to znaczy

$$\bigwedge_{\beta > 0} \bigvee_{r > 0} \|u,0\|_0 < r \Rightarrow V(u,0) < \beta$$

(iii) $$\bigvee_{\chi(t,\omega)} \bigwedge_{t \geq 0} V(u,t) \leq \chi(t,\omega)\, V(u,t), \tag{40}$$

(iv) $$E\left[\exp\left(\int_0^t \chi(s,\ )\, ds\right)\right] < 1, \tag{41}$$

to rozwiązanie trywialne równania (1) jest lokalnie stabilne stochastycznie względem dwu norm (definicja 1).

Dowód

Z założenia (iii) wynika, że

$$E\left[V(u,t)\right] < V(u_0,0)\, E\left[\exp\left(\int_0^t \chi(s,\omega)\, ds\right)\right]. \tag{42}$$

Przyjmując dla dowolnych $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$

$$\beta = \delta \inf_{(u,t) \in \{u : \|u,t\| > \varepsilon\} \times \{t : t > 0\}} V(u,t) \tag{43}$$

dodatnie na podstawie warunku (i), z założenia ciągłości (ii) widzimy, że

$$\bigvee_{r>0} \|u,0\|_0 < r \Longrightarrow V(u,0) < \beta$$

co przy wykorzystaniu nierówności (42) oraz założenia (iv) pociąga za sobą warunek

$$E\left[V(u,t)\right] < \beta \tag{44}$$

Posługując się nierównością CZEBYSZEWa [8, 29] oraz (44) napiszemy

$$P\left\{\omega : \|u,t\| > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{E\left[V(u,t)\right]}{\inf\limits_{(u,t)\in\{u:\|u,t\|>\varepsilon\}\times\{t:t>0\}} V(u,t)} < \delta \tag{45}$$

Widzimy zatem, że dla dowolnych $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ istnieje na mocy warunku ciągłości funkcjonału $V(u,0)$ względem $\|u,0\|_0$ takie $r > 0$, że $\|u_0,0\|_0 < r$ implikuje (45) dla $t > 0$. Uwzględnienie warunku stochastycznej ciągłości (8) kończy dowód.

Twierdzenie 4

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 3, a ponadto

(v) $$\lim_{t\to\infty} E\left[\exp \int_0^t \varkappa(s,\omega)ds\right] = 0, \tag{46}$$

to rozwiązanie $u(x,t) = 0$ jest asymptotycznie lokalnie stabilne (definicja 2).

Teza twierdzenia wynika bezpośrednio z (42), (45) i (46).

Uwaga

W przypadku procesów normalnych SZUR [29] wykazał, że zachodzi oszacowanie

$$E(\exp \int_0^t |\varkappa(s,\omega)|\, ds) \leqslant \exp(kt), \tag{47}$$

gdzie

$$\begin{aligned} &k = c_0 + c_1^{\frac{1}{2}} + \frac{c_2}{2}, \\ &|E\varkappa(t,\omega)| \leqslant c_0, \\ &\mathrm{Sp}\, K(t,t) = E\left[\varkappa(t,\omega) - E\varkappa(t,\omega)\right]^2 \leqslant c_1, \\ &\int_0^t |K(t,u)|\, du \leqslant c_2. \end{aligned} \tag{48}$$

Jeśli zatem

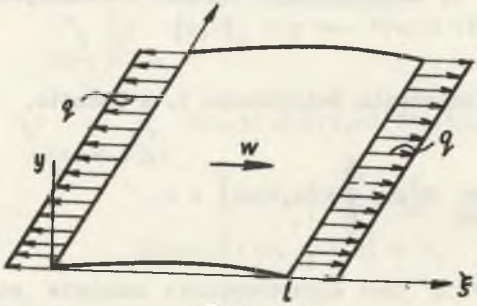
$$\varkappa(t,\omega) = -\varkappa_0 + \varkappa_1(t,\omega), \tag{49}$$

gdzie $\varkappa_1(t,\omega)$ jest procesem normalnym, to założenia (iv) twierdzenia 3 oraz (v) twierdzenia 4 redukują się do nierówności

$$-\varkappa_0 + c_0 + c_1^{\frac{1}{2}} + \frac{c_2}{2} < 0. \tag{41'}$$

Przykład 2

Rozpatrzmy zagadnienie stabilności drgań płata nośnego (panelu) przy ponaddźwiękowym opływie aerodynamicznym z prędkością w będącą procesem losowym (problem flateru). Zakładając, że płat o sztywności zginania $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, grubości h, gęstości materiału ϱ, module Younga E, liczbie Poissona ν jest małowyniosłą powłoką cylindryczną rozciąganą równoleżnikowo losowymi siłami o intensywności q rozłożonymi wzdłuż krawędzi,



Rys. 2

problem można traktować jednowymiarowo (rys. 2). Przyjmując, że siła aerodynamiczna spełnia hipotezę ILJUSZINa [28] (teoria tłokowa) równanie drgań poprzecznych ma następującą budowę:

$$D\frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4} + \varrho h \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + q(\omega,\tau)\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \varrho_p a_\infty \left[w(\omega,\tau)\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \tau}\right] = 0, \tag{a}$$

gdzie ϱ_p jest gęstością powietrza, a_∞ prędkością dźwięku.

Ponadto przyjmujemy przegubowe zamocowanie brzegów, to jest warunki brzegowe

$$\begin{gathered} y(0,\tau) = y(1,\tau) = 0, \\ \left.\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\right|_{\xi=0} = \left.\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\right|_{\xi=1} = 0. \end{gathered} \tag{b}$$

Wprowadzając współrzędne bezwymiarowe

$$x = \frac{\xi}{l}, \quad u = \frac{y}{l}, \quad t = \frac{\tau a_\infty}{l} \tag{c}$$

równanie (a) sprowadzamy do układu równań pierwszego rzędu względem czasu t

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= k_1(t,\omega)\frac{\partial u}{\partial x} + k_2(t,\omega)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_3\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + k_4 v, \end{aligned} \tag{d}$$

gdzie

$$\begin{aligned} k_1(t,\omega) &= -\frac{l\varrho_p}{a_\infty\, h\varrho}\, w(\omega, t\frac{l}{a_\infty}), \\ k_2(t,\omega) &= \frac{1}{a_\infty^2\, h\varrho}\, q(\omega, t\frac{l}{a_\infty}), \\ k_3 &= -\frac{D}{l^2\, a_\infty\, h\varrho}, \quad k_4 = -\frac{l\varrho_p}{h\varrho}. \end{aligned} \tag{e}$$

Warunki brzegowe redukują się do postaci

$$u(0,t) = u(1,t) = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=1}. \tag{f}$$

Zajmiemy się wyznaczeniem kryteriów lokalnej stabilności stochastycznej rozwiązania $u \equiv v \equiv 0$ układu (d). W tym celu przyjmiemy za PLAUTem i INFANTEm [18] następującą budowę funkcjonału

$$V = \int_0^1 \left[-k_3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + v^2 + buv + cu^2\right] dx, \tag{g}$$

gdzie dodatnie stałe b oraz c będą wyznaczone dalej. Korzystając z ekstremalnych własności minimalnej wartości własnej λ_m zagadnienia brzegowe (f) napiszemy

$$-\int_0^1 k_3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx \geq -\lambda_m^4 \int_0^1 k_3\, u^2\, dx, \quad (-k_3 > 0). \tag{h}$$

Zatem funkcjonał V jest istotnie dodatnio określony jeżeli

$$4(-k_3\lambda_m^4 + c) > b^4. \tag{i}$$

Analizę stabilności będziemy prowadzić w oparciu o dwie następująco zdefiniowane normy:

$$\|u\|_o = V^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\| = \left(\int_0^1 (u^2 + v^2)dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{j}$$

Dla dodatniego α spełniającego nierówność

$$\bigwedge_{u,v} \alpha(u^2 + v^2) \leqslant (-k_3\lambda_m^4 + c)u^2 + buv + v^2, \tag{k}$$

zachodzi

$$\|u\|_o^2 = V \geqslant \alpha\,\|u\|^2,$$

to znaczy spełnione są założenia (i) oraz (ii) twierdzenia 3.
α wyznaczone na podstawie nierówności (k) jest równe

$$\alpha = \min\left\{(-k_3\lambda_m^4 + c),\ \frac{-k_3\lambda_m^4 + c+1 - \left[(-k_3\lambda_m^4+c+1)^2 - 4(-k_3\lambda_m^4+c)+b^2\right]^{\frac{1}{2}}}{2}\right\}. \tag{l}$$

Ze związku (g) pochodna funkcjonału wyrazi się wzorem

$$\dot{V} = \int_0^1 \left[-2k_3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t} + 2v\frac{\partial v}{\partial t} + bu\frac{\partial v}{\partial t} + bv\frac{\partial u}{\partial t} + 2cu\frac{\partial u}{\partial t}\right]dx, \tag{m}$$

a jej wartość wzdłuż trajektorii ruchu równania (d), uzyskana przez podstawienie (d) do (m) oraz całkowanie przez części jest równa

$$\dot{V} = -\int_0^1 \Big[- k_3 b\, u \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + (2v + bu)(-k_1(t,\omega) \frac{\partial u}{\partial x} - k_2(t,\omega) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) +$$

$$+ (-2k_4 - b)v^2 + (-bk_4 - 2c)u\, v\Big]\, dx. \qquad (m1)$$

Tworzymy nowy funkcjonał

$$\dot{V} - \varkappa(t,\omega)V = -\int_0^1 \Big[-k_3(b + \varkappa)(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^2 + v^2(-2k_4 - b + \varkappa) +$$

$$+ u\, v(-bk_4 - 2c + \varkappa b) + \varkappa\, c\, u^2 - k_2(t,\omega)(2\, v + b\, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$

$$- 2\, k_1(t,\omega)\, v \frac{\partial u}{\partial x}\Big]\, dx \qquad (n)$$

i obliczamy jego wariację odpowiadającą wariacjom $\delta u = \delta u(x,t)$ oraz $\delta v = \delta v(x,t)$

$$\delta(\dot{V} - \varkappa(t,\omega)V) = -\int_0^1 \Big[-2k_3(b + \varkappa) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + 2v\delta v(-2k_4 - b + \varkappa) +$$

$$+(u\delta v + v\delta u)(-bk_4 - 2c + \varkappa b) + 2c\varkappa u\delta u - k_2(t,\omega)(2\delta v + b\delta u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$

$$-k_2(t,\omega)(2v + bu) \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} - 2k_1(t,\omega)(\delta v \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial \delta u}{\partial x})\Big]\, dx. \qquad (o)$$

Funkcje δu i δv spełniają warunki brzegowe tej samej postaci co funkcje u i v. Całkując przez części i wykorzystując warunki brzegowe (f) otrzymujemy

$$\dot{V} - \varkappa(t,\omega)V = -\int_0^1 \big[\Phi(u,v,t,\omega)\delta u + \Psi(u,v,t,\omega)\delta v\big]\, dx, \qquad (p)$$

gdzie

$$\Phi(u,v,t,\omega) = -2k_3(b+\varkappa)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + v(-bk_4 - 2c + \varkappa b) + 2c\varkappa u +$$

$$+ 2k_1(t,\omega)\frac{\partial v}{\partial x} - 2k_2(t,\omega)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \tag{p1}$$

$$\Psi(u,v,t,\omega) = 2v(-2k_4 - b + \varkappa) + u(-bk_4 - 2c + \varkappa b) +$$

$$-2k_2(t,\omega)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2k_1(t,\omega)\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{p2}$$

Kładąc $\delta(\dot{V} - \varkappa(t,\omega)V) = 0$ ze względu na niezależność δu i δv otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Phi(u,v,t,\omega) &= 0, \\ \Psi(u,v,t,\omega) &= 0. \end{aligned} \tag{q}$$

Obliczając v z drugiego równania (q)

$$v = \frac{1}{2(-2k_4 - b + \varkappa)}\left[-u(-bk_4 - 2c + \varkappa b) + 2k_2(t,\omega)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2k_1(t,\omega)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

i podstawiając do pierwszego dostajemy jedno równanie różniczkowe względem u:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\left[-k_3(b+\varkappa)(-2k_4 - b + \varkappa) - k_2^2(t,\omega)\right] + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left[-k_2(t,\omega)(2c - bk_4 - b^2) +\right.$$

$$\left. + k_1^2(t,\omega)\right] + u\left[\varkappa c(-2k_4 - b + \varkappa) - \left(-\frac{bk_4}{2} - c + \frac{\varkappa b}{2}\right)^2\right] = 0. \tag{r}$$

Ze względu na warunki brzegowe (f) funkcja u posiada budowę

$$u = A\sin n\pi x,$$

dla której równanie (r) musi być tożsamościowo spełnione, co określa funkcję

$$\varkappa_n(t,\omega) = k_4 + \left[\frac{n^4\pi^4 k_2^2(t,\omega) + \alpha_n k_2(t,\omega) + \beta_n + n^2\pi^2 k_1^2(t,\omega)}{-k_3\, n^4\pi^4 + c - \frac{b^2}{4}}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (s)$$

gdzie

$$\alpha_n = n^2\pi^2(2c - bk_4 - b^2),$$

$$\beta_n = -k_3\, n^4\pi^4(k_4 + b)^2 + k_4(k_4 + b)c + c^2.$$

W charakterze funkcji $\varkappa(t,\omega)$ występującej w założeniu (iii) twierdzenia 3 przyjmujemy

$$\varkappa = \max_n \varkappa_n(t,\omega).$$

Ze względu na dowolność stałych b i c występujących w funkcjonale V, załóżmy $\alpha_n = 0$, to jest

$$c = \frac{b(k_4 + b)}{2}. \qquad (t)$$

Ponadto będziemy przyjmowali, że b zmienia się w przedziale $(0,-2k_4)$, co powoduje

$$c - \frac{b^2}{4} < 0.$$

Dzieląc licznik i mianownik wyrażenia podpierwiastkowego (s) przez $(n\pi)^4$ zauważamy, że $\varkappa_n$ przyjmuje swoje maksimum dla $n = 1$, to znaczy:

$$\varkappa(t,\omega) = k_4 + \left[\frac{\pi^4 k_2^2(t,\omega) + \beta_1 + \pi^2 k_1^2(t,\omega)}{-k_3\pi^4 + \frac{bk_4}{2} + \frac{b^2}{4}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

lub

$$\varkappa(t,\omega) = k_4 + \left[\frac{\pi^4 k_2^2(t,\omega) + \pi^2 k_1^2(t,\omega)}{-k_3\pi^4 + \frac{bk_4}{2} + \frac{b^2}{4}} + (b + k_4)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{s1}$$

Zwiększając prawą stronę (s1) napiszemy

$$\varkappa(t,\omega) \leqslant k_4 + |b + k_4| + \left[\frac{\pi^4 k_2^2(t,\omega) + \pi^2 k_1^2(t,\omega)}{-k_3\pi^4 + \frac{bk_4}{2} + \frac{b^2}{4}}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{s2}$$

Wprowadzając wektor losowy o składowych

$$\eta(t,\omega) \equiv (\eta_1(t,\omega), \eta_2(t,\omega)) \equiv$$

$$\equiv \left(\frac{\pi^2 k_2(t,\omega)}{\left[-k_3\pi^4 + \frac{bk_4}{2} + \frac{b^2}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}, \frac{\pi k_1(t,\omega)}{\left[-k_3\pi^4 + \frac{bk_4}{2} + \frac{b^2}{4}\right]^{\frac{1}{2}}}\right), \tag{u}$$

(s2) przybierze postać

$$\varkappa(t,\omega) \leqslant k_4 + |b + k_4| + \|\eta(t,\omega)\|. \tag{s3}$$

Założenie (iii) twierdzenia 3 wymaga ażeby

$$\exp(k_4 + |b + k_4|)\, E\left[\exp \int_0^1 \|\eta(s,\omega)\|\, ds\right] < 1. \tag{v}$$

Przyjmując, że procesy obciążenia q oraz prędkości opływu w posiadają rozkłady normalne oraz stosując twierdzenie SZURa (47), warunkiem dostatecznym stabilności lokalnej jest spełnienie nierówności:

$$k_4 + |b + k_4| + c_o + c_1^{\frac{1}{2}} + \frac{c_2}{2} < 0, \tag{w}$$

gdzie

$$c_0 = \sup_{t \geq 0} E\left[\varrho_1^2(t,\omega) + \varrho_2^2(t,\omega)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$c_1 = \sup_{t \geq 0} \left[K_{\varrho_1\varrho_1}(t,t) + K_{\varrho_2\varrho_2}(t,t)\right],$$

$$c_2 = \sup_{t \geq 0} \int_0^{\infty} \left[K_{\varrho_1\varrho_1}(t,u) + K_{\varrho_2\varrho_2}(t,u) + 2K_{\varrho_1\varrho_2}(t,u)\right]^{\frac{1}{2}} du.$$

4. Stabilność średnia z p-tą potęgą

Twierdzenie 5 [22]

Jeżeli

$$\text{(i)} \quad \bigvee_{C>0} \bigvee_{\gamma>0} \|\Phi(t_2,t_1)\| \leq C \exp\left[-\gamma(t_2 - t_1)\right],$$

$$\text{(ii)} \quad \bigvee_{k_1>0} \bigvee_{k_2>0} \bigwedge_{t>0} E \exp k_1 \int_0^t \|G(x,s,\omega)\| ds \leq \exp(k_2 t), \tag{50}$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{\gamma k_1}{C} \geq k_2, \tag{51}$$

to rozwiązanie trywialne równania (17) jest średnio stabilne z p-tą potęgą dla $p < \frac{k_1}{C}$ względem jednej normy (definicja 3).

Dowód

Podnosząc obie strony (30) do potęgi $\frac{k_1}{C}$, uśredniając i wykorzystując założenie (ii) otrzymujemy

$$E\|u(x,t)\|^{\frac{k_1}{C}} \leq \left[C\|u(x,0)\|\right]^{\frac{k_1}{C}} E \exp\left[k_1 \int_0^t \|G(x,s,\omega)\, ds - \frac{\gamma k_1}{C} t\right] \leq$$

$$\leq \left[C\|u(x,0)\|\right]^{\frac{k_1}{C}} \exp\left[(k_2 - \frac{\gamma k_1}{C})t\right]. \tag{52}$$

Zatem dla $p < \frac{k_1}{C}$ zachodzi nierówność

$$E\|u(x,t)\|^p \leq \left[C\|u(x,0)\|\right]^{\frac{k_1}{C}},$$

kończąca dowód.

Uwaga

Zastępując warunek (iii) twierdzenia 5 nierówności (iii')

$$\frac{\gamma k_1}{C} > k_2 \tag{53}$$

można dowieść, że istnieją dodatnie stałe a oraz b takie, że

$$E\|u(x,t)\|^p < a\|u(x,0)\|^p \exp(-\,b\,t). \tag{54}$$

Nierówność (54) zapewnia między innymi asymptotyczną stabilność z p-ta potęgą (definicja 4).

5. Stabilność przy stale działających zaburzeniach losowych

Twierdzenie 6

Jeżeli

(i) istnieje funkcjonał spełniający warunki (i) - (iii) twierdzenia 3,

(ii) pochodna $\mathcal{V}$ funkcjonału V spełnia warunek:

$$\bigvee_{k_1>0} \left|\mathcal{V}\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right)\right| < k_1 \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_1,$$

gdzie norma $\|\cdot\|_1$ może np. posiadać budowę

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_1 = \sup_i \sup \left|\frac{\partial u^i}{\partial t}\right|,$$

(iii) $$\bigvee_{k_2>0} E\left(\exp \int_0^t \chi(s,\omega)\, ds\right) \leq \exp(-k_2 t),$$

(iv) proces $\eta(t,\omega) = \|R\|_1$ posiada skończoną wartość oczekiwaną i wariancję,

to rozwiązanie trywialne $u(x,t) = 0$ jest stabilne przy stale działających zaburzeniach losowych opisanych równaniem (14) (definicja 7).

Dowód

Pochodna funkcjonału wzdłuż trajektorii równania zaburzonego (14) spełnia na podstawie założeń (i), (ii) oraz (iv) ciąg nierówności:

$$\frac{dV}{dt} = \mathcal{V}\left(u, F + R, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right) =$$

$$= \mathcal{V}\left(u, F, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right) + \mathcal{V}\left(u, R, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right) \leq$$

$$\leq \frac{d^0 V}{dt} + \mathcal{V}\left(u, R, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right) \leq \chi(t,\omega)\, V + \mathcal{V}\left(u, R, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right) \leq$$

$$\leq \chi(t,\omega)\, V + k_1 \eta(t,\omega). \tag{55}$$

Mnożąc obustronnie (55) przez

$$\exp\left(-\int_0^t \varkappa(s,\omega)ds\right),$$

oraz włączając ten czynnik pod znak pochodnej otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt}\left[V \exp\left(-\int_0^t \varkappa(s,\omega)ds\right)\right] < k_1 \eta(t,\omega) \exp\left(-\int_0^t \varkappa(s,\omega)ds\right). \tag{56}$$

Całkowanie nierówności różniczkowej (56) prowadzi do wyrażenia:

$$V(u,t) < V(u_0,0) \exp\left(\int_0^t \varkappa(s,\omega)ds\right) + k_1 \int_0^t \eta(s,\omega) \exp\left(\int_s^t \varkappa(u,\omega)du\right)ds. \tag{57}$$

Uśredniając (57) dostajemy

$$E\left[V(u,t)\right] < V(u_0,0)\, E\left[\exp\left(\int_0^t \varkappa(s,\omega)ds\right)\right] +$$

$$+ k_1 \int_0^t E\left[\eta(s,\omega) \exp\left(\int_s^t \varkappa(u,\omega)du\right)\right] ds. \tag{58}$$

Korzystając z nierówności Höldera

$$E(\eta(\omega)\xi(\omega)) < \left[E(\eta(\omega) - E\eta(\omega))^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[E(\xi(\omega) - E\xi(\omega))^2\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ E\eta(\omega) \cdot E\xi(\omega), \tag{59}$$

napiszemy

$$E\left[V(u,t)\right] < V(u_0,0)\, E\left[\exp\left(\int_0^t \varkappa(s,\omega)ds\right)\right] +$$

$$+ k_1 \int_0^t \left\{ D^{\frac{1}{2}} \eta(s,\omega) \cdot \left\{ E\left[\exp\left(2\int_s^t \varkappa(u,\omega)du\right)\right] - \left[E \exp\left(\int_s^t \varkappa(u,\omega)du\right)\right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + E(\eta(s,\omega))\, E\left[\exp\left(\int_s^t \varkappa(u,\omega)du\right)\right] \right\} ds. \tag{60}$$

Opuszczając w wyrażeniu podpierwiastkowym w (60) kwadrat wartości średniej i wykorzystując założenie (iii), na podstawie którego istnieje takie $k_2' > 0$, zapewniające nierówność

$$E(\exp 2 \int_0^t \varkappa(s,\omega)ds) \leq \exp(-k_2' t),$$

otrzymujemy

$$E[V(u,t)] \leq V(u_0,0) \exp(-k_2 t) +$$

$$+ k_1 \int_0^t \left\{ D^{\frac{1}{2}} \eta(s,\omega) \exp\left[-\frac{1}{2} k_2'(t-s)\right] + E\eta(s,\omega) \exp\left[-k_2(t-s)\right] \right\} ds. \quad (61)$$

Przyjmując oznaczenie

$$k = \min\left\{k_2, \frac{1}{2} k_2\right\}, \quad (62)$$

szacując $D^{\frac{1}{2}} \eta(t,\omega)$ i $E\eta(t,\omega)$ przez ich suprema oraz całkując po s będzie spełniona nierówność:

$$E[V(u,t)] \leq V(u_0,0) \exp(-k_2 t) + k_1 \sup_{t \geq 0} \left[D^{\frac{1}{2}} \eta(t,\omega) + E\eta(t,\omega)\right] \frac{1-\exp(-kt)}{k},$$

lub

$$E[V(u,t)] \leq V(u_0,0) + \frac{k_1}{k} \sup_{t \geq 0} \left[D^{\frac{1}{2}} \eta(t,\omega) + E\eta(t,\omega)\right]. \quad (63)$$

Przyjmując dla dowolnych $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$

$$\beta = \delta \inf_{(u,t) \in \{u : \|u,t\| > \varepsilon\}} \frac{V(u,t)}{\{t : t > 0\}} \quad (64)$$

dodatnie ze względu na dodatnią określoność funkcjonału $V(u,t)$ względem normy $\|u,t\|$ oraz traktując β jako sumę dodatnich liczb β_1, β_2 z warunku ciągłości funkcjonału V względem normy $\|\cdot,\cdot\|_0$ w punkcie $t = 0$ widzimy, że

$$\bigvee_{r_1 > 0} \|u_0,0\|_0 < r_1 \Rightarrow V(u_0,0) \leq \beta_1. \quad (65)$$

Ponadto przyjmując:

$$\sup_{t \geqslant 0} \left[D^{\frac{1}{2}} \varrho(t,\omega) + E\, \varrho(t,\omega) \right] \leqslant \beta_2 \frac{k}{k_1} \tag{66}$$

jest

$$E\left[V(u,t)\right] < \delta \inf_{(u,t) \in \left\{ u : \|u,t\| > \varepsilon \right\} \times \left\{ t : t > 0 \right\}} V(u,t) \tag{67}$$

Ze względu na nierówność Czebyszewa zachodzi relacja

$$P\left\{ \omega : \|u,t\| > \varepsilon \right\} < \delta \tag{68}$$

kończąca dowód twierdzenia.

Uwaga

Zakładając dodatkowo, że procesy $\chi(t,\omega)$ oraz $\varrho(t,\omega)$ są wzajemnie nieskorelowane, co jest równoważne temu, że P^i oraz R^i są też nieskorelowane, można udowodnić prawdziwość twierdzenia 6 przy niezmienionych pozostałych założeniach, z tym że definicję 7 stabilności stochastycznej przy stale działających zaburzeniach losowych można wzmocnić, żądając

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigwedge_{\delta > 0} \bigvee_{r > 0} \left[\|u(x,0),0\|_0 + \sup_{t \geqslant 0} E\, \|R\|_1 \right] < r \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \bigwedge_{t \geqslant 0} P\left\{ \omega : \|u(x,t)\| > \varepsilon \right\} < \delta.$$

6. Techniczna stabilność stochastyczna

Twierdzenie 7

Jeżeli

(i) istnieje istotnie dodatnio określony funkcjonał V spełniający nierówności

$$\bigvee_{\alpha > 0} \bigwedge_{u(x,0)} \alpha \|u,0\|_0^2 \geq V(u,0) \tag{69}$$

$$\bigvee_{\beta > 0} \bigwedge_{(u(x,t),t)} V(u,t) \geq \beta \|u,t\|^2, \tag{70}$$

(ii) istnieje stochastyczny proces $\varkappa(t,\omega)$ o własnościach:

$$\bigwedge_{0 < t < T} \int_0^t E\,\varkappa(s,\omega)ds < 0, \tag{71}$$

$$\int_0^T E\,|\varkappa(s,\omega)|^2\, ds < \infty \tag{72}$$

$$\dot{V}(u,t) \leq \varkappa(t,\omega)\, V(u,t), \tag{73}$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \frac{\int_0^t \int_0^t K\varkappa\,\varkappa(s_1,s_2)\, ds_1\, ds_2}{\left[\ln\left(\frac{\varepsilon^2\beta}{\delta^2\alpha}\right) - \int_0^t E\,\varkappa(s,\omega)ds\right]^2} < \varepsilon_0 \tag{74}$$

to rozwiązanie $u(x,t) \equiv 0$ jest technicznie stabilne względem norm $\|\cdot,\cdot\|_0$, $\|\cdot,\cdot\|$, obszarów D_ε i D_δ według prawdopodobieństwa $1 - \varepsilon_0$ w przedziale czasu $[0,T]$.

Dowód

Na mocy warunku (70) prawdopodobieństwo zdarzenia, że norma rozwiązania równania (1) jest ograniczona liczbą ε, spełnia nierówność

$$P\left\{\omega: \|u(x,t),t\| < \varepsilon\right\} \geq P\left\{\omega: V(u,t) < \varepsilon^2\beta\right\}.$$

Z założenia (73) wynika, że

$$P\left\{\omega:\ V(u,t)<\varepsilon^{2\beta}\right\} \geqslant P\left\{\omega:\ V(u_0,0)\ \exp\left(\int_0^t \chi(s,\omega)ds\right)<\varepsilon^{2\beta}\right\}.$$

Przedstawiając proces $\chi(t,\omega)$ w postaci sumy średniej $\bar{\alpha}(t)$ oraz odchylenia od średniej $\alpha(t,\omega)$ mamy

$$P\left\{\omega:\ V(u_0,0)\ \exp\left(\int_0^t \chi(s,\omega)ds\right)<\varepsilon^{2\beta}\right\} =$$

$$= P\left\{:\ \int_0^t \alpha(s,\omega)ds < \ln\left(\frac{\varepsilon^{2\beta}}{V(u_0,0)}\right) - \int_0^t \bar{\alpha}(s)ds\right\} \geqslant$$

$$\geqslant P\left\{\omega:\ \left|\int_0^t \alpha(s,\omega)\ ds\right| < \ln\left(\frac{\varepsilon^{2\beta}}{V(u_0,0)}\right) - \int_0^t \bar{\alpha}(s)ds\right\}.$$

Na podstawie założenia (69) napiszemy

$$\ln\left(\frac{\varepsilon^{2\beta}}{V(u_0,0)}\right) - \int_0^t \bar{\alpha}(s)ds > \ln\left(\frac{\varepsilon^{2\beta}}{\delta^2_\alpha}\right) - \int_0^t \bar{\alpha}(s)ds,$$

a zatem

$$P\left\{\omega:\|u(x,t),t\|<\varepsilon\right\} \geqslant P\left\{\omega:\ \left|\int_0^t \alpha(s,\omega)ds\right| < \ln\left(\frac{\varepsilon^{2\beta}}{\delta^2_\alpha}\right) - \int_0^t \bar{\alpha}(s)ds\right\}.$$

Na skutek nierówności Czebyszewa zachodzi

$$P\left\{\omega:\|u(x,t),t\|<\varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{D\int_0^t \chi(s,\omega)ds}{\left[\ln\left(\frac{\varepsilon^{2\beta}}{\delta^2_\alpha}\right) - \int_0^t \bar{\alpha}(s)ds\right]^2},$$

Korzystając z twierdzenia Fubiniego dochodzimy do nierówności

$$P\left\{\omega: \|u(x,t),t\| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{\int_0^t \int_0^t K\varkappa(s_1,s_2)ds_1\, ds_2}{\left[\ln\left(\frac{\varepsilon^2\beta}{\delta^2\alpha}\right) - \int_0^t \bar{\alpha}(s)ds\right]^2}$$

kończącej na podstawie założenia (74) dowód.

Żądanie (74) można osłabić, gdyby były podstawy do przyjęcia że rozkład gęstości prawdopodobieństwa procesu $\int_0^t \varkappa(s,\omega)ds$ jest unimodalny. Wówczas korzystając z nierówności Gaussa prawą stronę nierówności (74) można przemnożyć przez $\frac{9}{4}$.

Twierdzenie 8

Jeżeli

(i) istnieje stochastyczny funkcjonał $V(u,t,\omega)$, proces losowy $\lambda_1(t,\omega)$ oraz $\lambda_2(t,\omega)$ spełniające dla $t \in [0,T]$ nierówności:

z prawdopodobieństwem 1

$$V(u_0,0,\omega) \leqslant \alpha \| u_0,0\|_0^2, \quad (\alpha > 0) \tag{75}$$

wg prawdopodobieństwa dodatniego

$$V(u,t,\omega) \geqslant \lambda_1 (t,\omega) \| u,t\|^2, \tag{76}$$

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\lambda_2(t,\omega) \| u,t\|^2, \tag{77}$$

(ii) $$P\left\{\omega: \lambda_1(t,\omega) > \frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\alpha \cap \lambda_2(t,\omega) > 0\right\} = 1 - \varepsilon_0 \tag{78}$$

to rozwiązanie trywialne równania (1) jest technicznie stabilne względem dwu norm, względem obszarów D_ε i D_δ w przedziale czasu $[0,T]$ według prawdopodobieństwa $1 - \varepsilon_0$.

Dowód

Całkując nierówność (77) mamy

$$V(u,t,\omega) \leqslant V(u_0,0,\omega) - \int_0^t \lambda_2(s,\omega) \| u(x,s),s\|^2 ds.$$

Według prawdopodobieństwa $P\{\omega: \lambda_1(t,\omega) > 0 \cap \lambda_2(t,\omega) > 0\}$ funkcjonał V jest istotnie dodatnio określony i nierosnący wzdłuż trajektorii ruchu układu (1).

Według prawdopodobieństwa

$$p_e = P\{\omega: \lambda_1(t,\omega) > e \cap \lambda_2(t,\omega) > 0\}, \quad (e > 0),$$

na podstawie warunku (76) zachodzi

$$\|u,t\|^2 \leqslant \frac{V(u_0,0,\omega)}{e} - \frac{1}{e}\int_0^t \lambda_2(t,\omega)\,\|u(x,s),s\|^2\,ds \leqslant \frac{V(u_0,0,\omega)}{e}. \tag{79}$$

Korzystając z (75) i (79) napiszemy

$$\|u,t\|^2 \leqslant \frac{\alpha}{e}\,\|u_0,0\|_0^2. \tag{80}$$

Aby rozwiązanie $u(x,t) \equiv 0$ było stochastycznie stabilne technicznie, według prawdopodobieństwa $1 - \delta_0$ musi zachodzić $\|u,t\| < \varepsilon \wedge \|u_0,0\|_0 < \delta$, czyli na podstawie (80)

$$\|u,t\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \leqslant \frac{\alpha\delta^2}{e}$$

lub

$$e \leqslant \frac{\alpha\delta^2}{\varepsilon^2}.$$

Z założenia (ii) wynika teza twierdzenia.

Przy efektywnym wykorzystywaniu kryterium (78) można posługiwać się bezinercyjnymi przekształceniami procesów stochastycznych.

Przykład 3

Przedyskutujmy zagadnienie technicznej stabilności nieodkształconej powierzchni sprężystej płyty prostokątnej poddanej działaniu stochastycznym siłom ściskającym (rys. 3). Równanie małych drgań poprzecznych płyty ma budowę:

$$\varrho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\varrho h \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + D\nabla^4 u + S(\omega,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + T(\omega,t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{a}$$

gdzie:

D - sztywność zginania,

ϱ - gęstość materiału płyty,

h - grubość,

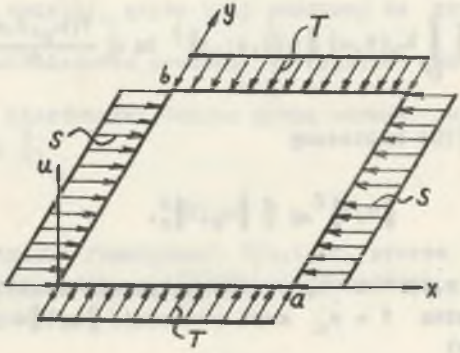
ζ - współczynnik tłumienia wiskotycznego,

u - przemieszczenie poprzeczne powierzchni środkowej,

t - czas,

xy - prostokątny układ współrzędnych,

S,T - stochastyczne siły działające w płaszczyźnie środkowej.



Rys. 3

Przyjmujemy przegubowe zamocowanie brzegów płyty, generujące następujące warunki brzegowe:

$$u(0,y,t) = u(a,y,t) = u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0,$$
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=b} = 0. \tag{b}$$

W celu zbudowania funkcjonału posłużymy się metodą PEYSERa-PARKSa-PRITCHARDa omówioną w rozdziale 2.3.

Operator L odpowiadający równaniu (a) ma budowę

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\zeta\frac{\partial}{\partial t} + d\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) + \beta(\omega,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma(\omega,t)\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{c}$$

gdzie

$$d = \frac{D}{\varrho h},$$
$$\beta(\omega,t) = \frac{S(\omega,t)}{\varrho h}, \quad \gamma(\omega,t) = \frac{T(\omega,t)}{\varrho h}. \tag{d}$$

Natomiast operator N ma postać

$$N = 2\frac{\partial}{\partial t} + 2\xi. \tag{e}$$

Całkując L(u) N(u) po cylindrze $C = B \times \Delta = \{(x,y): 0 < x < a,\ 0 < y < b\} \times \{s : 0 < s < t\}$ otrzymujemy wyrażenie

$$\int_C \Big[2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t} + 2\xi\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}u + 4\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\partial u}{\partial t}u +$$

$$+ 2d\nabla^4 u\frac{\partial u}{\partial t} + 2\xi d\nabla^4 u\, u + 2\beta(\omega,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t} +$$

$$+ 2\xi\beta(\omega,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u + 2\gamma(\omega,t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial t} + 2\xi\gamma(\omega,t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}u\Big]dC = 0. \tag{f}$$

Posługując się zależnościami:

$$\int_B u\nabla^4 u\, dB = \int_B \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right]dB,$$

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial t}\nabla^4 u\, dC = \frac{1}{2}\int_B \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right]dB\Big|_{s=0}^{s=t},$$

$$\int_C \beta(\omega,s)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial s}dC = -\frac{1}{2}\int_C\left\{\frac{\partial}{\partial s}\left[\beta(\omega,s)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] - \frac{\partial\beta(\omega,s)}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}dC,$$

$$\int_C \beta(\omega,s)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u\, dC = -\int_C \beta(\omega,s)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dC,$$

otrzymanymi za pomocą całkowania przez części i wykorzystania warunków brzegowych (b), równość (f) redukuje się do postaci:

$$\int_B \Big\{\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + 2\xi^2 u^2 + 2\xi u\frac{\partial u}{\partial s} + d\Big[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\Bigg] - \beta(\omega,s)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \gamma(\omega,s)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\Bigg\} dB\Bigg|_{s=0}^{s=t} +$$

$$+ \int_C \Bigg\{ 2\xi\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + 2\xi d\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial\beta(\omega,s)}{\partial s} - 2\xi\beta(\omega,s)\right]\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left[\frac{\partial\gamma(\omega,s)}{\partial s} - 2\xi\gamma(\omega,s)\right]\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\Bigg\} dC = 0. \tag{g}$$

Jako funkcjonał (stochastyczny) wybieramy pierwszy składnik wyrażenia (g) w punkcie $s = t$, to jest

$$V = \int_B \Bigg\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \xi u\right)^2 + \xi^2 u^2 + d\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right] +$$

$$- \beta(\omega,t)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \gamma(\omega,t)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\Bigg\} dB. \tag{h}$$

Zatem na podstawie (g) oraz (h) pochodna funkcjonału przedstawia się wzorem

$$\frac{dV}{dt} = -\int_B \Bigg\{ 2\xi\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + 2\xi d\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right] +$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left[\frac{\partial\beta(\omega,t)}{\partial t} - 2\xi\beta(\omega,t)\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\left[\frac{\partial\gamma(\omega,t)}{\partial t} - 2\xi\gamma(\omega,t)\right]\Bigg\} dB. \tag{i}$$

Posługując się rachunkiem wariacyjnym, można wykazać, że

$$\int_B \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right] dB \geqslant k_4 \int_B \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dB \geqslant k_1 \int_B u^2\, dB, \tag{j}$$

$$\int_B \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dB \geqslant k_2 \int_B u^2\, dB,$$

$$\int_B \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dB \geqslant k_3 \int_B u^2\, dB,$$

gdzie

$$k_4 = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right), \quad k_1 = k_4^2,$$
$$k_2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2, \qquad k_3 = \left(\frac{\pi}{b}\right)^2. \tag{k}$$

Wprowadzając zdarzenia

$$A_1 \equiv \left\{ \omega : d\, k_4 - \beta(\omega,t) > 0 \right\},$$
$$A_2 \equiv \left\{ \omega : d\, k_4 - \gamma(\omega,t) > 0 \right\}, \tag{l}$$

na podstawie ocen (j) według prawdopodobieństwa $P(A_1 \cap A_2)$ zachodzi

$$V \geq \lambda_1(\omega,t) \int_B u^2\, dB, \tag{m}$$

gdzie

$$\lambda_1(\omega,t) = \xi^2 + k_2\left[dk_4 - \beta(\omega,t)\right] + k_3\left[dk_4 - \gamma(\omega,t)\right].$$

Ponadto funkcjonał V z prawdopodobieństwem 1 spełnia ciąg nierówności (β i $\gamma > 0$)

$$V \leq \int_B \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + 2\xi^2 u^2 + 2\xi u \frac{\partial u}{\partial t} + d\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right]\right\} dB \leq \int_B \left\{ (1+\xi)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \xi(2\xi+1)u^2 + \right.$$
$$\left. + d\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right]\right\} dB \leq$$
$$\leq \int_B \left\{ (1+\xi)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left[d + \frac{\xi(2\xi+1)}{k_1}\right]\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right]\right\} dB \leq$$
$$\leq \alpha \left\{ \sup_B \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| + \sup_B \left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| + 2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right| + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|\right]\right\}^2, \tag{n}$$

gdzie

$$\alpha = \max\left\{1 + \zeta,\ \frac{\zeta(2\zeta+1)}{k_1} + d\right\} a\ b. \tag{o}$$

Pochodna funkcjonału V według prawdopodobieństwa $P(A_3 \cap A_4)$, gdzie

$$\begin{aligned} A_3 &= \left\{\omega : 2\zeta\left[dk_4 - \beta(\omega,t)\right] + \frac{\partial\beta(\omega,t)}{\partial t} > 0\right\}, \\ A_4 &= \left\{\omega : 2\zeta\left[dk_4 - \gamma(\omega,t)\right] + \frac{\partial\gamma(\omega,t)}{\partial t} > 0\right\} \end{aligned} \tag{p}$$

spełnia oszacowanie

$$\frac{dV}{dt} \leq -\int_B \left\{ 2\zeta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \left[2\zeta\left(dk_4 - \beta(\omega,t)\right) + \frac{\partial\beta(\omega,t)}{\partial t}\right] + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \left[2\zeta\left(dk_4 - \gamma(\omega,t)\right) + \frac{\partial\gamma(\omega,t)}{\partial t}\right]\right\} dB \leq$$

$$\leq -\left\{k_2\left[2\zeta(dk_4 - \beta(\omega,t)) + \frac{\partial\beta(\omega,t)}{\partial t}\right] + k_3\left[2\zeta(dk_4 - \gamma(\omega,t)) + \frac{\partial\gamma(\omega,t)}{\partial t}\right]\right\} \cdot$$

$$\cdot \int_B u^2\, dB \tag{q}$$

Wprowadzając normy

$$|u| = \int_B u^2\, dB, \tag{r1}$$

$$|u|_0 = \sup_B\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| + \sup_B\left[\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| + 2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right| + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|\right]\right], \tag{r2}$$

widzimy, że spełnione jest założenie (i) twierdzenia 8.
Kryterium technicznej stabilności według prawdopodobieństwa $1 - \varepsilon_0$ ma budowę

$$1 - \varepsilon_0 \leq P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5), \tag{s}$$

gdzie zdarzenie A_5 jest zdefiniowane w następujący sposób

$$A_5 = \left\{\omega : \xi^2 + k_2\left[dk_4 - \beta(\omega,t)\right] + k_3\left[dk_4 - \dot{\beta}(\omega,t)\right] > \left(\frac{\delta}{\xi}\right)^2 \alpha\right\}. \qquad (t)$$

Warunek (s) znacznie się upraszcza, jeżeli siły ściskające płytę w obu kierunkach są równe, to znaczy $S(\omega,t) = T(\omega,t)$. Wtedy

$$A_1 = A_2, \quad A_3 = A_4,$$

natomiast zdarzenia A_1 i A_5 posiadają część wspólną

$$A_6 = A_1 \cap A_5 = \left\{\omega : d\, k_4 - \beta(\omega,t) > \alpha_0\right\},$$

gdzie

$$\alpha_0 = \max\left\{0, \frac{\left(\frac{\delta}{\xi}\right)^2 \alpha - \xi^2}{k_4}\right\}. \qquad (u)$$

Jeżeli znana jest łączna dwuwymiarowa gęstość prawdopodobieństwa procesów $\beta(\omega,t)$ oraz $\frac{\partial\beta(\omega,t)}{\partial t}$ $g(x_1,x_2)$ nierówność (s) przybiera postać

$$1 - \varepsilon_0 \leq \int_0^{\infty}\int_{\alpha_0}^{\infty} g(dk_4 - y_1,\ y_2 - 2\xi\, y_1)\,dy_1\, dy_2. \qquad (v)$$

Warunek (s) lub w szczególności (v) nakłada na parametry rozkładu gęstości prawdopodobieństwa procesów $S(\omega,t)$, $T(\omega,t)$ oraz ich pochodnych ograniczenia.

Jeżeli wielowymiarowe gęstości prawdopodobieństwa procesów zaburzających są nieznane, można posłużyć się ich momentami pierwszego i drugiego rzędu oraz nierównościami Czebyszewa. Należy jednak pamiętać, że kryteria w ten sposób otrzymane będą bardzo ostre.

7. Uwagi końcowe

Zamieszczone w pracy twierdzenia formułują dostateczne warunki stabilności stochastycznej, pomijając zupełnie kwestię warunków koniecznych. Weryfikacja otrzymanych wyników jest możliwa zarówno doświadczalnie jak i numerycznie (symulowanie cyfrowe). W pracy starano się przedstawić możliwie ogólne metody obejmujące szeroką klasę stochastycznych obiektów dynamicznych. Niemniej jednak istnieją inne szczególne metody nadające się do badania stabilności układów opisanych równaniami pewnej postaci [7].

Znaczenie dyskutowanych w rozprawie problemów wynika z ich bezpośredniej stosowalności w różnych gałęziach techniki. Do takich zagadnień należy zaliczyć problem długich wirujących elementów urządzeń wiertniczych, dynamiczne zagadnienie Eulera, zagadnienie stabilności konstrukcji lotniczych, stabilność pracy reaktorów jądrowych i chemicznych oraz problemy sterowania wymienionymi obiektami.

W pracy ograniczono się do analizy klasy układów dynamicznych opisanych stochastycznymi cząstkowymi równaniami różniczkowymi z deterministycznymi warunkami brzegowymi. W związku z tym warto wymienić zarysowujące się kierunki dalszych badań.

1. Stabilność ciągłych układów dynamicznych, których modele matematyczne są różne od przyjętego w pracy, na przykład układy opisane równaniami całkowymi.

2. Uwzględnienie stochastycznych warunków brzegowych.

3. Układy ciągło-dyskretne, to znaczy składające się z podukładów opisanych równaniami cząstkowymi i zwyczajnymi.

4. Zbudowanie stochastycznego analogonu metod częstotliwościowych.

WYKAZ LITERATURY CYTOWANEJ

[1] Ariaratnam S.T., Dynamic Stability of Column under Random Loading, Stability of Structures, Proc. Internat. Conf., Pergamon Press, New York, 1967, str. 267-284.

[2] Beckenbach E.F., Bellman R., Inequalities, Springer Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1961.

[3] Bensoussan A., Equations integrales operationneles stochastiques, Compte rend.Acad.sci., Vol. 269, 1969, No 11.

[4] Bharucha-Reid A.T., On Random Operator Equations in Banach Spaces, Bulletin de Làcadèmie Polonaise des Sciences, Sèrie des sci. math. astr. et phys., Vol. VII, No 9, 1959, str. 561-569.

[5] Bogusz W., Stateczność techniczna układów stochastycznych, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 10, 1969, str. 279-86.

[6] Courant R., Partial Differential Equations, Interscience, New York-London, 1962.

[7] Czogała E., Tylikowski A., O stabilności stochastycznej rozwiązań pewnej klasy równań cząstkowych, III Sympozjon pod hasłem Metody Statystyczne w Mechanice, Streszczenia referatów, PTMTiS, Gliwice, 1972

[8] Gichman I.I., Skorochod A.W., Wstęp do teorii procesów stochastycznych, PWN, Warszawa, 1968.

[9] Hille E., Functional Analysis and Semigroups, American Mathematical Society, New York, 1948.

[10] Kampe de Feriet J., Random Solutions of Partial Differential Equations, Proceedings of the 3-Berkeley Symposium of Mathematical Statistics and Probability, Vol. 3. 1955, str. 199-208.

[11] Knops R.J., Wilkes E.W., On Movchan's Theorems for Stability Continuous Systems, Int.J.Eng.Sci., Vol. 4, 1966, No 4, str. 303-329.

[12] Krzyżański M., Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego, część I i II, PWN, Warszawa, 1957.

[13] Kushner H.J., On the Optimal Control of a System Governed by a Linear Parabolic Equations with White Noise Inputs, SIAM Journal on Control, Vol. 6, 1968, No 4, str. 569-614.

[14] Kushner H.J., Filtering for Linear Distibuted Parameter Systems, SIAM Journal on Control, Vol. 8, No 3, 1970, str. 346-59.

[15] Lepore J.A., Shah H.C., Dynamic Stability of Axially Loaded Columns Subjected to Stochastic Excitation, AIAA Journal, Vol. 6, No 8, str. 1515-21.

[16] Parks P.C., Pritchard A.J., On the Construction and Use of Liapunov Functionals, IFAC, Techn. session, 20, Stability, NOT, Warszawa, 1969, str. 59-73.

[17] Peyser G., Energy Integrals for the Mixed Problem in Hyperbolic Partial Differential Equations of Higher Order, Journal Math. and Mech. No 6, 1957, str. 641-53.

[18] Plaut R.H., Infante E.F., On the Stability of Some Sontinous Systems Subjected to Random Excitation, Trans. ASME, E 37, No 3, 1970, str. 623-38.

[19] Skalmierski B., Tylikowski A., Zagadnienie stabilności stochastycznej układów mechanicznych, VII Polsko-Czechosłowacka Konferencja Dynamiki Maszyn, Zbiór referatów t. 2, Gliwice, 1971, str. 395-407.

[20] Skalmierski B., Tylikowski A., Stabilność w mechanice, PTMTiS, Gliwice, 1972.

[21] Sobczyk K., Dynamical Systems with Random Initial Conditions, Bull. Acad.Polon.sci., ser.sci.techn., Vol. 16, No 2, 1968, str. 189-95.

[22] Tylikowski A., Uwagi na temat stabilności stochastycznej ciągłych układów mechanicznych, II Sympozjon pod hasłem Metody Statystyczne w Mechanice, Streszczenia referatów, PTMTiS, Gliwice, 1971.

[23] Wang P.K.C., On the Almost Sure Stability of Linear Stochastic Distributed Parameter Dynamical Systems, Trans. ASME, E 33, No 1, 1966, str. 182-6.

[24] Yosida K., Functional Analysis, Springer,Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1965.

[25] Кампе де Ферье, Статистическая механика непрерывных сред, Сб. Гидродинамическая неустойчивость, Мир, Москва, 1964, стр. 189-230.

[26] Мовчан А.А., Устойчивость процессов по двум метрикам, ПММ, т. 24, вып. 6, 1960, стр. 988-1001.

[27] Николаенко Н.А., Штоль А.Т., Динамическая устойчивость и статистический анализ колебаний параметрической системы, Строительная механика и прочность сооружений, Москва, 1979, No 1, (67), стр. 47-55.

[28] Огибалов П.М., Вопросы динамики и устойчивости оболочек, Изд. Московского Университета, Москва, 1963.

[29] Хасьминский Р.З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, Наука, Москва 1969.

Politechnika Śląska Biblioteka Gliwice

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
P 3341/72