ENERGETYKA z. 42

P. 3349/71

BOGDAN MOCHNACKI

METODA WARSTWICOWA NUMERYCZNEGO MODELOWANIA POLA TEMPERATUR W CIAŁACH STAŁYCH

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYT NAUKOWY Nr 326 – GLIWICE 1971

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 326

BOGDAN MOCHNACKI

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA

P. 3349 | 71

METODA WARSTWICOWA NUMERYCZNEGO MODELOWANIA POLA TEMPERATUR W CIAŁACH STAŁYCH

PRACA HABILITACYJNA Nr 111

Przewód habilitacyjny otwarto w dniu 22 listopada 1971 r.

GLIWICE 1971

REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Iwo Pollo

REDAKTOR DZIAŁU

Ryszard Petela

SEKRETARZ REDAKCJI

Witold Gużkowski

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Kujawska 2

Nakł. 50+170 Ark. wyd. 3 Ark. druk. 4,37 Papier offsetowy kl. III, 70x100, 80 g
Oddano do druku 18. 12. 1971 Podpis. do druku 22. 1. 1972 Druk ukończ. w lutym 1972
Zamówienie 1477 18. 12. 1971 C-23 Cena zł 4,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

PJ-74/72

SPIS TREŚCI

Str.

Wstęp 5

1. Ogólny opis metody doboru współczynników wielomianów interpolujących pole temperatur 11

2. Szczególne przypadki równania przewodnictwa cieplnego 24

2.1. Ustalone przewodzenie ciepła w ciałach stałych bez źródeł wewnętrznych 24

2.2. Obszary niejednorodne 28

2.3. Wewnętrzne źródła ciepła 32

2.4. Nieustalone przewodzenie ciepła w ciałach stałych bez źródeł wewnętrznych 33

2.5. Równanie Kirchoffa-Fouriera..... 34

3. Metoda warstwicowa z wędrującym warunkiem początkowym..... 37

3.1. Liniowa interpolacja zmienności temperatury w czasie..... 37

3.2. Interpolacja paraboliczna 41

3.3. Interpolacja wielomianem stopnia K 44

4. Modelowanie pola temperatur przy zmiennej wartości współczynnika przewodzenia ciepła 46

5. Zagadnienie błędu metody, problemy właściwej interpolacji..... 52

6. Przypisy 55

WSTĘP

Problemy przewodzenia ciepła w ciałach stałych o współczynniku przewodzenia λ sprowadzają się do poszukiwania rozkładu temperatur w postaci funkcji $\vartheta(P)$, $P \in \Omega$ spełniającej równanie:

$$\nabla \cdot \lambda \nabla \vartheta + q_v(P) = C_p \gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \tag{1}$$

w obszarze Ω ograniczonym konturem Γ, przy zadanym warunku początkowym:

$$\vartheta(P)\Big|_{\tau=\tau_0} = \vartheta_0(P) \tag{2}$$

oraz warunku brzegowym:

$$A\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n}\right)_P + B\vartheta(P) = C; \quad P \in \Gamma \tag{3}$$

Dla przypadków $A=0$; $B=0$; $A,B \neq 0$ przyjęto w literaturze nazwy warunków brzegowych pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju.

Równanie przewodzenia ciepła sprowadza się w przypadku szczególnym (dla stanu ustalonego przy λ =idem) do równania Poissona:

$$\nabla^2 \vartheta + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \tag{4}$$

Dla $q_v = 0$ otrzymuje się z kolei równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 \vartheta = 0 \tag{5}$$

Zaś dla stanu niestacjonarnego klasyczne równanie paraboliczne Fouriera:

$$a\nabla^2\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} \tag{6}$$

gdzie:

a - jest współczynnikiem przewodzenia temperatury.

Ścisłe rozwiązanie zadania przewodzenia jest możliwe tylko dla nielicznej klasy problemów stanowiących często zbyt duże uproszczenie warunków rzeczywistych [4,6,8,9,13,14,22,23]. W związku z tym w odniesieniu do większości zagadnień inżynierskich otrzymane tą drogą wyniki nie mogą stanowić podstawy ilościowej analizy procesu, mogą służyć jedynie do oceny jakościowej.

W pierwszej połowie XX wieku, obok znacznego rozwoju metod analitycznych opartych na rachunku infinitezymalnym, rozpoczął się intensywny rozwój badań w dziedzinie problemów przewodzenia ciepła za pomocą metod numerycznych.

Pierwsza grupa metod numerycznych stosowanych dotychczas w zagadnieniach cieplnych bazuje ogólnie rzecz biorąc na zastąpieniu procesu ciągłego, procesem zmian skokowych, przy czym podstawowym narzędziem tej transformacji jest różnica skończona, przekształcająca równanie różniczkowe na różnicowe, dzięki czemu zadanie sprowadza się do poszukiwania tablicy przybliżonych wartości funkcji w pewnym zbiorze punktów izolowanych zwanych siatką.

Metody różnicowe różnią się między sobą zasadami doboru siatek i budowania odpowiednich równań różnicowych.
W praktyce obliczeń cieplnych spotyka się szereg odmian [1,9,15,16,18, 19,29,31,32] metod różnicowych, zdeterminowanych przyjęciem jednego z niżej wymienionych operatorów:

1° Różnica przednia

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x) \tag{7}$$

2° Różnica wsteczna:

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x - h) \tag{8}$$

3° Różnica centralna

$$\delta f(x) = f(x + \frac{1}{2} h) - f(x - \frac{1}{2} h) \tag{9}$$

4° Różnica średnia

$$\mu f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+h) - f(x - h)\right] \tag{10}$$

Analogicznie definiuje się różnice rzędów wyższych. Przykładowo:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta\left[\Delta f(x)\right] = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \tag{11}$$

Szczególną popularność zyskały sobie metody oparte na ilorazie różnicowym przednim i wstecznym [1,9,16,19,29,31,32] oraz metoda Cranka-Nicolsona bazująca na operatorach μ^2 i Δ. Bardzo dogodną do rozwiązywania szeregu problemów przewodzenia ciepła jest metoda bilansów elementarnych (Waniczewa) [26,27,30] stanowiąca uogólnienie metod, w których korzysta się z transformacji typu Δ. Metoda bilansów dopuszcza występowanie wewnętrznych źródeł ciepła, zmianą właściwości fizycznych obszaru (np. pod wpływem temperatury), reprezentuje więc uniwersalność trudno osiągalną w innych systemach modelowania. Otrzymanie podstawowego równania wymaga zastosowania dla elementu siatki równania bilansu energii. J. Madejski w pracy [10] przedstawia pewną odmianę omówionych wyżej metod numerycznych, polegających na zastąpieniu pochodnych przestrzennych operatorami Δ^2 przy zachowaniu pochodnej czasowej. Metoda wymaga uprzedniego określenia przybliżonego przebiegu powierzchni izotermicznych w rozpatrywanym ośrodku. W najprostszych przypadkach przewodzenia ciepła metody różnicowe prowadzą do rozwiązań, które można wyznaczać graficznie (metoda Bindera-Schmidta [14]). Wymienione wyżej metody prowadzą w zależności od przyjętego operatora do otwartych lub zamkniętych schematów różnicowych (nazywanych też schematami jawnymi i niejawnymi) [31]. Układ równań różnicowych nazywamy otwartym, jeżeli w każdym z równań występuje tylko jedna poszukiwana wartość funkcji, zaś zamkniętym gdy wartości tych jest więcej.

Metoda Waniczewa i inne metody różnicowe, w których korzysta się z przekształcenia typu Δ nie są bezwzględnie zbieżne. Zakres stabilności tych metod ograniczony jest związkiem między krokiem siatki przestrzennej a tzw. krytycznym interwałem czasu (maksymalnym dopuszczalnym krokiem w kierunku zmiennej τ). Pozostałe metody są dla przypadków określonych równaniami (1), (4), (5), (6) zbieżne - sprowadzają zagadnienie do oznaczonego układu równań liniowych.

Podstawy metody różnic skończonych w odniesieniu do zagadnień przewodzenia ciepła podał w 1908 roku C. Runge.
W ciągu pierwszych czterdziestu lat zastosowanie tych metod było znacznie ograniczone, ze względu na trudności natury rachunkowej. Rozwój elektronicznej techniki obliczeniowej spowodował w ostatnim dwudziestoleciu szybki rozwój metod numerycznych i coraz powszechniejsze wykorzystanie ich w praktyce.

Elektroniczne maszyny cyfrowe wpłynęły nie tylko na intensywny rozwój istniejących metod obliczeniowych, ale spowodowały powstanie nowych metod. Jedną z nich jest znajdująca zastosowanie w dziedzinie zagadnień cieplnych metoda Monte - Carlo. Modelowanie pola temperatur podług tej metody polega na realizacji pewnego eksperymentu statystycznego, jest to więc metoda jakościowo różna od wcześniej opisanych. Wykorzystuje się bowiem podobieństwo między formą różnicową pewnych klas równań różniczkowych a modelami probabilistycznymi procesów losowych typu błądzenia. Symulowanie takich procesów na elektronicznej maszynie cyfrowej i statystyka rezultatów prowadzi do znalezienia wartości oczekiwanych funkcji w węzłach siatki różnicowej [2,3,12,20,21,24,25].

Obok metod numerycznych opartych na zasadzie aproksymacji różnicami skończonymi, istnieją liczne metody przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, nazywane metodami minimalizacji [1,5,7, 16,17,31]. Zasada ta polega na aproksymacji szukanego rozwiązania pewnego zagadnienia granicznego za pomocą n parametrowej funkcji.

W zależności od określonego kryterium minimalizacji otrzymujemy jedną ze znanych metod omawianej grupy.

Jeżeli warunki graniczne danego zagadnienia brzegowego opisane są równaniami:

$$P(x_1 \dots x_k, \vartheta, \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} \dots) = 0$$
$$R_i \vartheta \Big|_{\Gamma} = \Phi_i \tag{12}$$

gdzie:

R_i - operatory warunków brzegowych

Φ_i - funkcje zadane na brzegu Γ obszaru Ω,

zaś funkcję aproksymującą zapiszemy w postaci:

$$\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}(x_1 \dots x_k, a_1 \dots a_n) \tag{13}$$

to podstawiając ją w miejsce ϑ do równania różniczkowego otrzymuje się po prawej stronie pewną różną od zera wielkość ε - residuum:

$$P(x_1 \dots x_k, \bar{\vartheta}, \frac{\bar{\vartheta}}{x_1} \dots) = \varepsilon(x_1 \dots x_k, a_1 \dots a_n) \tag{14}$$

W zależności od sposobu minimalizacji residuum dochodzi się do metod nazywanych w literaturze metodami kollokacji (zerowanie się residuum w wybranych punktach), najmniejszych kwadratów, rzutów ortogonalnych oraz metodą podobszarów.

Metody minimalizacji znalazły zastosowanie przy rozwiązywaniu pewnych klas zagadnień brzegowych, w szczególności w dziedzinie teorii sprężystości (metoda Bubnowa - Galerkina) oraz hydromechanice.

Analiza doboru postaci funkcji aproksymującej musi, ze względu na praktycznie nieograniczoną ilość wariantów, iść po linii ograniczania i zawężania do pewnych specjalnych problemów.

W naukach technicznych metody minimalizacji stosowano zazwyczaj bez uzasadnienia zbieżności, uzyskując całkiem zadowalające wyniki. Pozytywne rozwiązanie zagadnienia zbieżności metod minimalizacji dla niektórych zagadnień przedstawiono w pracach [5,7].

W pracy niniejszej przedstawiono nowy sposób numerycznego rozwiązywania problemów przewodzenia ciepła w ciałach stałych. Metoda ta, dla której proponuje się nazwę metody doboru współczynników wielomianów interpolujących pole temperatur może być stosowana dla wszystkich przypadków przewodzenia w ośrodkach o stałej przewodności λ, bez względu na warunki brzegowe i geometryczne zadania. Metodę doboru współczynników można stosować również w przypadku problemów z IV warunkiem brzegowym.

W drugiej części pracy omówiono metodę numerycznego rozwiązywania równania:

$$\nabla \cdot \lambda \nabla \vartheta = 0 \tag{15}$$

opisującego stacjonarne pole temperatur w ośrodku O zmiennej przewodności.

Aproksymacja rozwiązania zadania granicznego funkcją zależną od parametrów przybliża w jakimś sensie metodę doboru współczynników wielomianów do grupy metod minimalizacyjnych. Zarówno jednak sposób aproksymacji, jak i procedura obliczeniowa tak istotnie różnią metodę od wyżej opisanych, że nie można jej zaliczyć do żadnej z grup metod numerycznych omówionych w niniejszym rozdziale.

Liczbowe przykłady rozwiązań podano w przypisach.

1. OGÓLNY OPIS METODY DOBORU WSPÓŁCZYNNIKÓW WIELOMIANÓW INTERPOLUJĄCYCH POLE TEMPERATUR

1.1. Równania przewodnictwa cieplnego w ośrodkach o stałej przewodności należą do tej klasy równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, które można zapisać w postaci ogólnej:

$$L\vartheta = 0 \tag{16}$$

gdzie:

L - jest operatorem różniczkowym działającym na funkcję ϑ.

W przypadku zagadnienia płaskiego zorientowanego w prostokątnym układzie współrzędnych:

$$L\vartheta = a\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} + c\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} + d = 0 \tag{17}$$

Metoda doboru współczynników zostanie w rozdziale niniejszym opisana dla zadania dwuwymiarowego. Opis procedury dla zagadnienia płaskiego jest wystarczająco dokładny, a rozszerzenie metody na problemy przestrzenne nie zmienia istoty rzeczy*)

---

*) Metodę doboru współczynników można stosować dla równań różniczkowych cząstkowych typu:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^j\vartheta}{\partial x_i^j} = f(x_1 \ldots x_k),$$

których szczególnym przypadkiem jest rozpatrywane równanie (17).

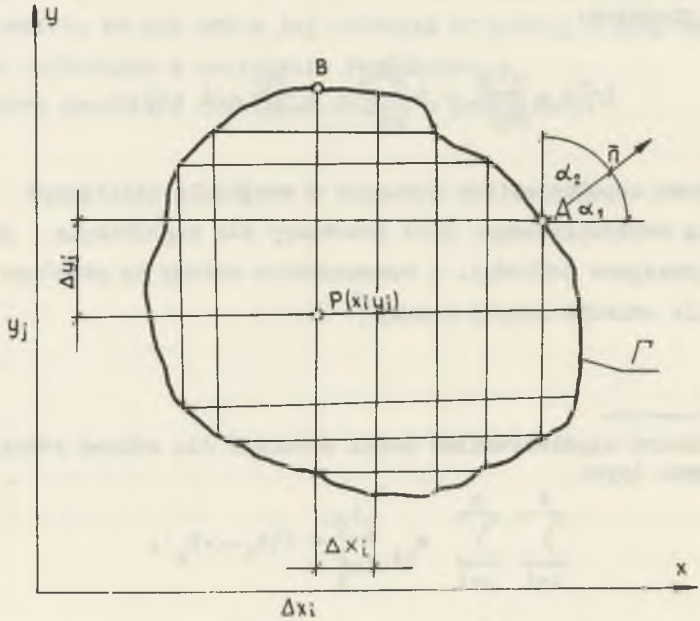
Załóżmy, że w każdym punkcie brzegu Γ obszaru płaskiego Ω zadany jest warunek brzegowy I, II lub III rodzaju, przy czym na poszczególnych wycinkach konturu Γ warunki brzegowe mogą być różnorodne.

W przypadku przewodzenia niestacjonarnego znany jest również warunek początkowy w postaci równania (2). Współczynniki a,b,c,d mają wartość stałą, lub też, co zostanie wyjaśnione w dalszej części pracy, mogą być jawnymi funkcjami współrzędnych punktów obszaru Ω, określonymi w każdym punkcie tego obszaru.

Dopuszcza się również możliwość zadań z obszarami niejednorodnymi. Na styku obszaru przepływ ciepła determinuje wówczas warunek brzegowy IV rodzaju.

1.2. Rozpatrywany obszar płaski Ω pokrywamy siatką prostokątną o dowolnym skoku (rys. 1):

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i; \quad i = 0,1...n$$
$$\Delta y_i = y_{j+1} - y_j; \quad j = 0,1...m \tag{18}$$



Rys. 1. Podział siatkowy obszaru Ω.

gdzie:

i,j - indeksy kolejnych węzłów siatki.

Jak wynika ze wzoru (18), skok siatki w obu kierunkach może się zmieniać na poszczególnych wycinkach obszaru, wielkość skoku determinują warunki geometryczne zadania oraz żądana dokładność obliczeń.

Dwie rodziny linii, wzajemnie prostopadłych tworzących siatkę, traktować będziemy jako ślady płaszczyzn prostopadłych do płaszczyzny $\{x,y\}$ o równaniach:

$$x = x_i = \text{idem}$$
$$y = y_j = \text{idem} \tag{19}$$

Poszukiwane rozwiązanie $\vartheta = \vartheta(x,y,\tau)$ odwzorowuje się geometrycznie jako rodzina izoparametrycznych powierzchni $\tau = \text{idem}$, określonych i ciągłych nad obszarem Ω, zaś w przypadku $\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = 0$, jako jedna powierzchnia określona i ciągła nad rozpatrywanym obszarem.

Z nieskończonej ilości powierzchni ϑ można wybrać skończoną ilość przyjmując dowolny skok argumentu τ:

$$\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k \qquad k = 0,1\ldots p \tag{20}$$

gdzie:

k - indeksy wybranych wartości argumentów zmiennej τ.

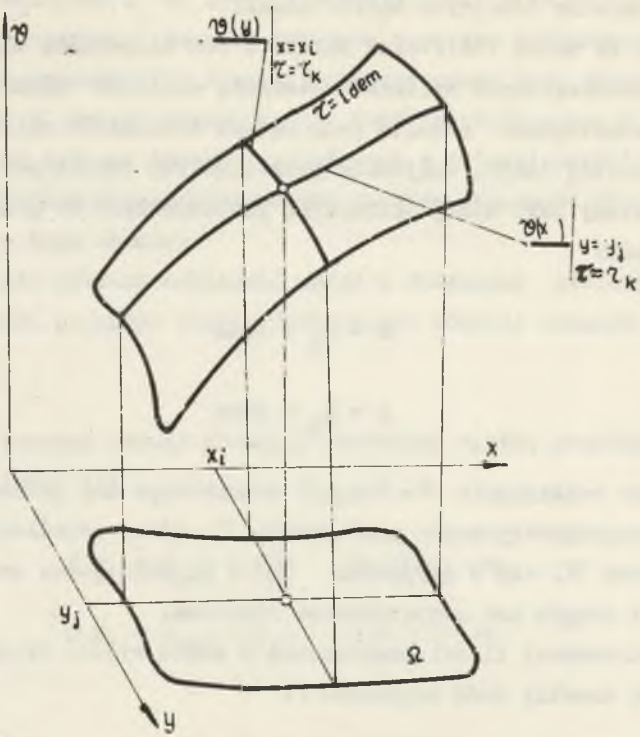
Zauważmy, że dla k = 0:

$$\vartheta(x_i,y_j\,\tau_o) = \vartheta_o(x_i,y_j)\Big|_{\tau=\tau_o} \tag{21}$$

otrzymuje się warunek początkowy zadania.

Zdeterminowane przyjęciem podziału siatkowego płaszczyzny (19) wyróżniają na powierzchniach $\tau = \text{idem}$ warstwice krzywoliniowe (rys. 2), równoległe do osi x lub y. Otrzymane w ten sposób krzywe są funkcjami tylko jednej zmiennej:

$$\vartheta = \vartheta(x)$$
$$\vartheta = \vartheta(y) \tag{22}$$



Rys. 2. Warstwice krzywoliniowe pola temperatur

Na wycinku krzywej $\vartheta = \vartheta(x)$ lub $\vartheta = \vartheta(y)$ leżącym nad odpowiednim odcinkiem obszaru Ω, wyróżniono uprzednio pewną ilość punktów węzłowych (rys. 3).

Wykorzystując warunek interpolacji (zerowe wartości odchyłek wielomianów od wartości funkcji w wybranych punktach), równania warstwic można zapisać w postaci:*)

$$\vartheta(x)\Big|_{\substack{y=y_j \\ \tau=\tau_k}} = \sum_{i=0}^{n} a_{ijk} x^i \tag{23}$$

*) Rozważania w tym miejscu można uogólnić, wprowadzając w miejsce wielomianów algebraicznych, wielomiany funkcyjne w postaci:

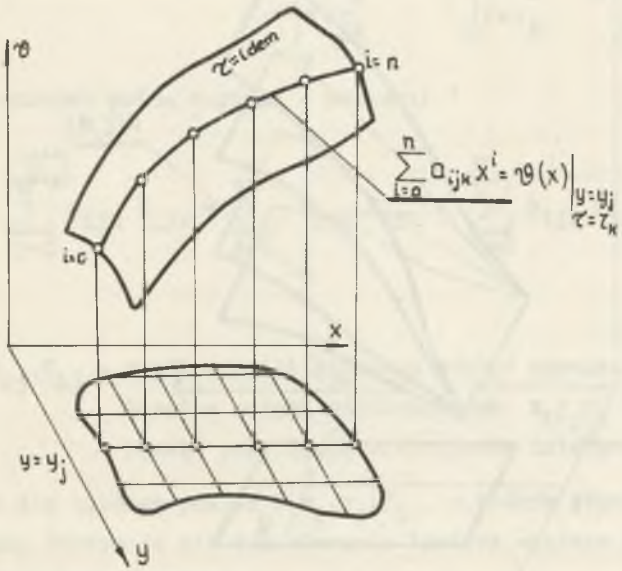
$$\vartheta_x = \sum_{i=0}^{n} a_i f_i(x)$$

$$\vartheta(y)\Big|_{\substack{x=x_i\\ \tau=\tau_k}} = \sum_{j=0}^{m} b_{ijk} y^j \qquad (24)$$

gdzie:

x_i, y_j, τ_k - ustalone dla danej warstwicy dwie z trzech współrzędnych

n, m - liczone od zera ilości węzłów w kierunkach osi x i y w przekrojach $y = y_j$ i $x = x_i$.



Rys. 3. Węzły interpolacyjne warstwicy $\vartheta(x)\Big|_{\substack{y=y_j\\ \tau=\tau_k}}$

---

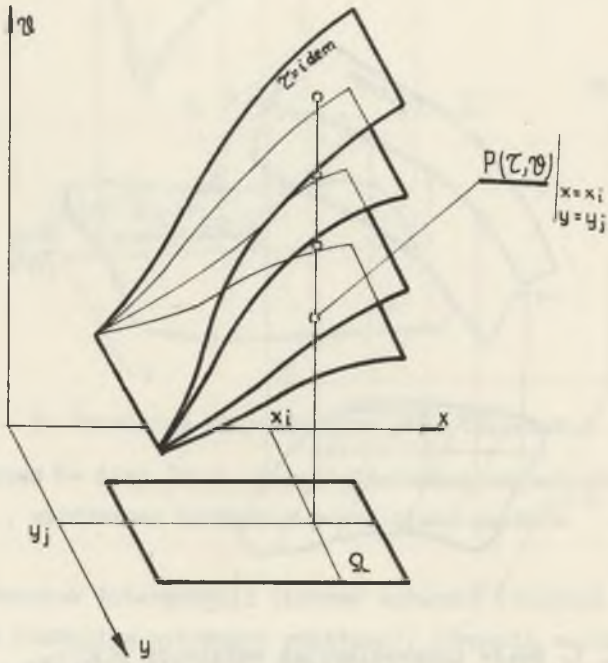
cd notki ze strony 14

Takie przybliżenie, może w niektórych przypadkach być nawet lepsze (dokładniejsze), ale ze względu na nieograniczoną praktycznie ilość możliwości doboru funkcji $f_i(x)$ należałoby problem ich wyboru rozpatrywać dla konkretnie rozwiązywanych zadań.

W ogólnym przypadku liczba węzłów n i m jest dla każdego przekroju inna, tzn. $n = n(y_j, \tau_k)$ oraz $m = m(x_i, \tau_k)$.

Zmienność funkcji ϑ nad wybranymi węzłami obszaru można opisać analogicznie (rys. 4):

$$\vartheta(\tau)\Big|_{\substack{x=x_i\\ y=y_j}} = \sum_{k=0}^{p} c_{ijk}\tau^k \tag{25}$$



Rys. 4. Węzły dla interpolacji w kierunku zmiennej τ

Warstwicowy opis pola temperatur znacznie upraszcza się dla przypadku $\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = 0$.

Wówczas mamy:

$$\vartheta(x)\Big|_{y=y_j} = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}x^i \tag{26}$$

$$\vartheta(y)\Big|_{x=x_i} = \sum_{j=0}^{m} b_{ij}y^j \tag{27}$$

1.3. Istotą nowej metody obliczeniowej jest znalezienie wartości współczynników $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}$ wielomianów interpolacyjnych.

W pierwszej kolejności przedstawiony zostanie warunek wynikający z ciągłości funkcji ϑ. Na powierzchniach $\tau = \tau_k$ wyróżnione są punkty $P(x_i y_j \tau_k)$, których położenie zdeterminowane jest przyjętym podziałem siatkowym obszaru Ω. W każdym z tych punktów przecinają się trzy wielomiany interpolacyjne, więc wartości funkcji obliczone z każdego z tych wielomianów muszą być jednakowe.

$$\vartheta(x_i, y_j, \tau_k) = \vartheta(x_i)\Big|_{\substack{y=y_j \\ \tau=\tau_k}} = \vartheta(y_j)\Big|_{\substack{x=x_i \\ \tau=\tau_k}} = \vartheta(\tau_k)\Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} \tag{28}$$

Ostatni warunek można zapisać w postaci:

$$\sum_{j=0}^{n} a_{ijk} A_{ijk} = \sum_{j=0}^{m} b_{ijk} B_{ijk} = \sum_{k=0}^{0} c_{ijk} C_{ijk} \tag{29}$$

gdzie:

A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} - współczynniki liczbowe równań warunkowych (kolejne naturalne potęgi współrzędnych $x_i y_j \tau_k$ rozpatrywanego punktu przecięcia wielomianów interpolacyjnych).

Tak więc dla każdego punktu $P(x_i, y_j, \tau_k)$, w którym przecinają się trzy wielomiany otrzymuje się dwa równania liniowe wiążące wartości parametrów odpowiednich warstwic.

Dla $\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = 0$ mamy:

$$\vartheta(x_i y_j) = \vartheta(x_i)\Big|_{y=y_j} = \vartheta(y_j)\Big|_{x=x_i} \tag{30}$$

czyli

$$\sum_{i=0}^{n} a_{ij} A_{ij} - \sum_{j=0}^{m} b_{ij} B_{ij} = 0 \tag{31}$$

Kolejną grupę równań warunkowych dla wyznaczenia wartości współczynników a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}, otrzymuje się wykorzystując równanie różniczkowe opisujące pole temperatur.

Aproksymując pochodne cząstkowe funkcji ϑ pochodnymi odpowiednich wielomianów otrzymujemy:

$$L\vartheta_{ijk} \cong a \frac{d^2}{dx^2}\vartheta(x_i)\Big|_{\substack{y=y_i\\ \tau=\tau_k}} + b\frac{d^2}{dy^2}\vartheta(y_j)\Big|_{\substack{x=x_i\\ \tau=\tau_k}} + c\frac{d}{d\tau}\vartheta(\tau_k)\Big|_{\substack{x=x_i\\ y=y_j}} + d=0 \qquad (32)$$

Zależność (32) jest równaniem algebraicznym liniowym względem współczynników a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}, co wynika bezpośrednio ze struktury operatora L.

Należy zauważyć, że rząd pochodnych w równaniu różniczkowym określa minimalną ilość węzłów w danym kierunku, a więc najmniejszy dopuszczalny stopień wielomianów interpolujących warstwice.

Ostatnią grupę równań tworzą warunki brzegowe i warunek początkowy zadania.

Na brzegu Γ obszaru Ω należy odróżnić dwa rodzaje węzłów brzegowych. W pierwszym przypadku (pkt A na rys. 1) na brzegu stykają się dwie linie podziału siatkowego: x = idem oraz y = idem. Węzły tego typu nazywane będą w dalszym ciągu węzłami brzegowymi podwójnymi. Nie wnikając w tej chwili w szczegóły ich lokalizacji należy stwierdzić, że:

1° W węźle brzegowym podwójnym musi być spełnione równanie (28)

2° W omawianym węźle musi być spełniony odpowiedni warunek brzegowy.

Tak więc dla każdego węzła podwójnego istnieją trzy równania liniowe, które muszą spełniać współczynniki wielomianów przechodzących przez ten punkt.

Równocześnie na brzegu Γ mogą występować węzły powstałe w wyniku przecięcia konturu obszaru Ω linią x=idem lub y=idem (pkt. B na rys.1). W każdym węźle tego typu (pojedynczym) musi być spełniony warunek brzegowy zadany na wycinku konturu do którego rozpatrywany punkt należy.

Przy ustalaniu siatki*) dla danego obszaru należy dążyć do tego, aby węzły brzegowe podwójne znalazły się przede wszystkim w punktach, gdzie kierunek wektora normalnego do konturu znacznie odbiega od kierunków osi współrzędnych x lub y.

Na tych wycinkach brzegu, gdzie wektor normalny jest w przybliżeniu prostopadły do jednej z osi - rodzaj węzła nie odgrywa większej roli. Dowolność wyboru węzłów istnieje również na brzegu z zadanym warunkiem I rodzaju.

Dla siatki skonstruowanej w oparciu o podane wyżej postulaty warunek brzegowy (3) można zapisać w postaci:

$$A\left[\cos\alpha_1 \frac{d}{dx}\,\vartheta(x_i)\Big|_{\substack{y=y_j\\ \tau=\tau_k}} + \cos\alpha_2 \frac{d}{dy}\,\vartheta(y_j)\Big|_{\substack{x=x_i\\ \tau=\tau_k}}\right] + B\vartheta(x_i)\Big|_{\substack{y=y_j\\ \tau=\tau_k}} = C \qquad (33)$$

gdzie:

$\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$ - cosinusy kierunkowe wektora normalnego do konturu ograniczającego rozpatrywany obszar w punkcie brzegowym $P_\Gamma(x_i y_j)$.

Pierwszy człon po lewej stronie równania (33) jest pochodną w kierunku wektora normalnego do brzegu w punkcie $P_\Gamma(x_i y_j)$. Jeżeli wycinek konturu zadany jest równaniem:

$$\varphi(x,y) = 0 \qquad (34)$$

to:

$$\cos\alpha_1 = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{P_\Gamma}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2_{P_\Gamma} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2_{P_\Gamma}}} \qquad (35)$$

*) Można udowodnić, że dla dowolnego jednorodnego obszaru istnieje nieskończenie wiele dowolnie gęstych siatek składających się z węzłów wewnętrznych i podwójnych oraz dwóch węzłów pojedynczych.

oraz

$$\cos\alpha_2 = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{P_\Gamma}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2_{P_\Gamma} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2_{P_\Gamma}}} \tag{36}$$

Wartości cosinusów kierunkowych można obliczyć również bezpośrednio metodą graficzną (rys. 1).

W węzłach brzegowych pojedynczych warunki brzegowe znacznie upraszczają się, gdyż jeden z cosinusów kierunkowych jest bliski zera.

Mamy wówczas:

$$A \frac{d}{dx} \vartheta(x_i)\Big|_{\substack{y=y_j \\ \tau=\tau_k}} + B\vartheta(x_i)\Big|_{\substack{y=y_j \\ \tau=\tau_k}} = C \tag{37}$$

Zaś dla $\alpha_1 \approx \frac{\pi}{2}$:

$$A \frac{d}{dy} \vartheta(y_j)\Big|_{\substack{x=x_i \\ \tau=\tau_k}} + B\vartheta(y_j)\Big|_{\substack{x=x_i \\ \tau=\tau_k}} = C \tag{38}$$

Ostatnią grupę równań otrzymuje się z zadanego przebiegu funkcji ϑ dla $\tau=\tau_o$.

Wykorzystując bowiem warunek początkowy można bezpośrednio obliczyć wyrazy wolne wielomianów $\sum_{k=0}^{p} c_{ijk}\tau^k$.

Zakładając $\tau_o = 0$ mamy:

$$C_{ijo} = \vartheta(o)\Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} \tag{39}$$

Równania wynikające z ciągłości funkcji ϑ, z postaci równania różniczkowego, z warunków brzegowych i początkowych tworzą oznaczony i liniowy układ względem współczynników wielomianów interpolacyjnych. Po roz-

wiązaniu otrzymanego układu można bezpośrednio z zależności (23), (24) (25) obliczyć wartości funkcji w punktach węzłowych.

1.4. Należy jeszcze wykazać, że bez względu na przyjętą siatkę ilość warunków jest wystarczająca do jednoznacznego obliczenia wartości współczynników a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}.
Oznaczmy przez W liczbę wszystkich węzłów w obszarze Ω, zaś indeksami 0,1,2 ich przynależność do wnętrza obszaru lub brzegu (węzły pojedyncze i podwójne), czyli:

$$W = W_0 + W_1 + W_2 \tag{40}$$

Ślady płaszczyzn x = idem, y = idem, wyznaczają na powierzchni τ=idem W punktów odpowiadających węzłom utworzonym przez nałożenie siatki na obszar Ω. Wykorzystanie zbioru tych punktów daje:

$$R = 2(W_0 + W_2) + W_1 \tag{41}$$

równań do wyznaczenia współczynników funkcji interpolujących powierzchnię τ= idem.

Sumę węzłów wewnętrznych i podwójnych należy pomnożyć przez dwa, ponieważ w punkcie leżącym na powierzchni τ= idem nad węzłem wewnętrznym spełniony jest warunek ciągłości tej powierzchni oraz odpowiednie równanie różniczkowe, zaś w punkcie odpowiadającym węzłowi podwójnemu - warunek brzegowy i równanie ciągłości.

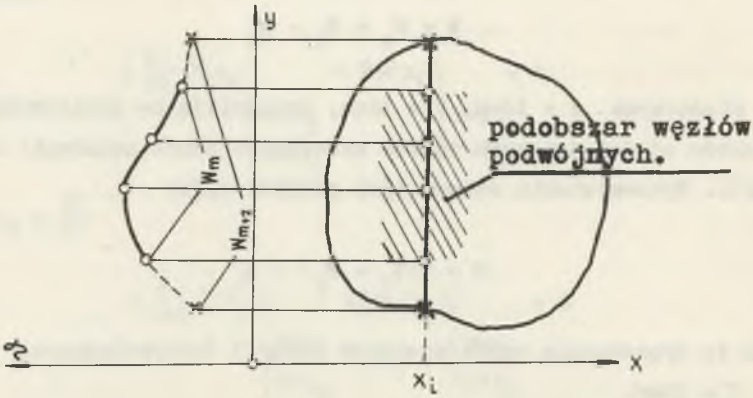
Obliczmy z kolei ilość niewiadomych współczynników wielomianów interpolujących powierzchnie τ= idem.

Gdyby obszar Ω pokryć siatką składającą się wyłącznie z węzłów wewnętrznych i brzegowych podwójnych, to ilość współczynników a_{ijk}, b_{ijk} byłaby dwukrotnie większa od ilości węzłów:

$$N = 2(W_0 + W_2) \tag{42}$$

Przez każdy punkt takiej siatki przechodzą bowiem dwa wielomiany, zaś ilość współczynników wielomianu interpolacyjnego jest równa ilości punktów, przez które prowadzi się wielomian (np. przez trzy punkty przechodzi jedna i tylko jedna parabola $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$).

Węzeł brzegowy pojedynczy leżący w punkcie przecięcia konturu linią o kierunku x lub y zwiększa o jeden element zbiór punktów leżących na danej warstwicy (rys. 5), więc stopień wielomianu interpolującego rozpatrywaną krzywą wzrośnie o jedność. Tak więc każdy węzeł brzegowy pojedynczy zwiększa o 1 ilość niewiadomych współczynników.



Rys. 5. Wpływ węzłów pojedynczych na stopień wielomianu interpolacyjnego

Dla dowolnej siatki ilość współczynników wielomianów interpolujących powierzchnię τ = idem wynosi:

$$N = 2\,(W_0 + W_2) + W_1 \tag{43}$$

Wykazano więc, że wobec R = N, interpolacja powierzchni τ = idem prowadzi zawsze do oznaczonego układu równań. Równocześnie udowodniono jednoznaczność rozwiązania zadania dla $\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = 0$. Odrzucenie pozostałych przypadków układów typu R=N, wynika bezpośrednio z geometrycznej interpretacji modelu warstwicowego.

Rozpatrując z kolei zagadnienie niestacjonarne należy zauważyć, że obok dostatecznie uwarunkowanych wielomianów aproksymujących powierzchnie

τ = idem, dołączamy zbiór $R_o + R_2$ funkcji $\vartheta(\tau)\Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}}$ interpolujących zmienność temperatury nad węzłami wewnętrznymi i podwójnymi obszaru Ω.

Każda z tych funkcji jest wielomianem tego samego stopnia, wyrazy wolne tych wielomianów określone są jednoznacznie warunkiem początkowym zadania.

Jeżeli przez N_3 oznaczymy ilość współczynników tych wielomianów to:

$$N_3 = (W_o + W_2)\,(p + 1) \tag{44}$$

gdzie:

p - jest stopniem wielomianów $\vartheta(\tau)$.

Z warunku początkowego można obliczyć:

$$R_3' = W_o + W_2 \tag{45}$$

parametrów (wyrazów wolnych), zaś z warunku ciągłości funkcji :

$$R_3'' = (W_o + W_2)p \tag{46}$$

otrzymujemy taką ilość równań, ile jest punktów przez które przechodzą trzy warstwice $\vartheta(x)$, $\vartheta(y)$, $\vartheta(\tau)$.

Wobec $R_3' + R_3'' = N_3$ problem numerycznego rozwiązania zadania przewodzenia w ośrodku o stałej przewodności sprowadza się zawsze do oznaczonego liniowego układu równań algebraicznych.

Przedstawiona w rozdziale niniejszym metoda przybliżonego rozwiązywania równań przewodnictwa cieplnego jest szczególnie przydatna do obliczeń procesów stacjonarnych. Dla zagadnień z dziedziny nieustalonego przewodzenia ciepła znacznie wzrasta rząd macierzy układu równań. Aczkolwiek nie jest to istotną przeszkodą w realizacji obliczeń na nowoczesnych maszynach cyfrowych, to jednak do rozwiązywania tych problemów można stosować uproszczony wariant przedstawionej metody, który zostanie omówiony w dalszej części pracy (metoda interpolacji z wędrującym warunkiem początkowym).

2. SZCZEGÓLNE PRZYPADKI RÓWNANIA PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO

2.1. Ustalone przewodzenie ciepła w ciałach stałych bez źródeł wewnętrznych

W omawianym przypadku równanie przewodnictwa sprowadza się do równania Laplace'a

$$\nabla^2 \vartheta = 0 \tag{47}$$

Szukana funkcja ϑ spełniająca równanie (43) oraz warunki brzegowe na brzegu Γ obszaru Ω odwzorowuje się geometrycznie w przypadku zadania płaskiego w prostokątnym układzie współrzędnych, jako powierzchnia krzywoliniowa $\vartheta = \vartheta(x,y)$.

Na dowolnej części konturu Γ może zachodzić jeden z następujących warunków:

1° Określony rozkład temperatur na brzegu:

$$\vartheta(x,y) = t(x,y); \quad P(x,y) \in \Gamma \tag{48}$$

gdzie:

$t(x,y)$ - funkcja określająca temperaturę płynu otaczającego ciało stałe.

2° Określony rozkład strumienia cieplnego na brzegu:

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = q(x,y) \tag{49}$$

gdzie:

$q(x,y)$ - funkcja określająca wielkość strumienia cieplnego na brzegu obszaru.

3° Określony związek między temperaturą i jej gradientem ma powierzchni:

$$-\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial n} = \alpha\left[\vartheta(x,y) - t(x,y)\right] \tag{50}$$

gdzie:

α - współczynnik wnikania ciepła

n - kierunek normalny do konturu w danym punkcie P(x,y)

Zgodnie z opisaną w rozdziale poprzednim procedurą na obszar płaski Ω nanosimy siatkę prostokątną (18).

Z kolei należy rozwiązać układ równań:

$$\vartheta(x_i)\Big|_{y=y_j} - \vartheta(y_j)\Big|_{x=x_i} = 0 \tag{51}$$

$$\frac{d^2\vartheta(x_i)\Big|_{y=y_j}}{dx^2} + \frac{d^2\vartheta(y_j)\Big|_{x=x_i}}{dy^2} = 0 \tag{52}$$

Dla odcinka konturu z zadanym I warunkiem:

$$\vartheta(x_i)\Big|_{y=y_j} = t(x_i, y_j) \tag{53}$$

$$\vartheta(y_j)\Big|_{x=x_i} = t(x_i, y_j) \tag{54}$$

W przypadku wystąpienia warunku brzegowego I rodzaju w węźle podwójnym spełnione są w tym punkcie trzy równania - warunek ciągłości (51) oraz wynikające z I warunku równania (53) i (54) czyli:

$$\vartheta(x_i)\Big|_{y=y_j} = \vartheta(y_j)\Big|_{x=x_i} = t(x_i,y_j) \tag{55}$$

Oczywiście tylko dwa z tych równań są do siebie liniowo niezależne.

Dla wycinka konturu z zadanym warunkiem brzegowym II rodzaju

$$-\lambda\left[\frac{d\vartheta(x_i)\Big|_{y=y_j}}{dx}\cos\alpha_1 + \frac{d\vartheta(y_j)\Big|_{x=x_i}}{dy}\cos\alpha_2\right] = q(x_i y_j) \tag{56}$$

Przy warunku III rodzaju:

$$\lambda\left[\frac{d\vartheta(x_i)\Big|_{y=y_j}}{dx}\cos\ _1 + \frac{d\vartheta(y_j)\Big|_{x=x_i}}{dy}\cos\alpha_2\right] =$$

$$=\alpha\left[t(x_i y_j) - \vartheta(x_i)\Big|_{y=y_j}\right] \tag{57}$$

W przypadku węzła brzegowego podwójnego po prawej stronie równania (57) można zgodnie z równaniem (51) kłaść również $\vartheta(y_j)\Big|_{x=x_i}$. Dla węzłów pojedynczych mamy:

$$\lambda\frac{d\vartheta(x_i)\Big|_{y=y_j}}{dx} = \left[t(x_i,y_j) - \vartheta(x_i)\Big|_{y=y_j}\right] \tag{58}$$

lub

$$\frac{d\ (y_j)\Big|_{x=x_i}}{dy} = \left[t(x_i,y_j) - \vartheta(y_j)\Big|_{x=x_i}\right] \tag{59}$$

W zależności od kierunku warstwicy przechodzącej przez ten węzeł.

Jak wykazano w poprzednim rozdziale, równania (51) ÷ (59) tworzą układ oznaczony, z którego można jednoznacznie obliczyć wartości współczynników a_{ij}, b_{ij}, a w dalszej kolejności wartości funkcji ϑ w wybranych węzłach $P(x_i\ y_j)$.

Rozkład temperatur w obszarze przestrzennym zorientowanym w układzie współrzędnych xyz opisuje równanie:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = 0 \tag{60}$$

Funkcja ϑ spełnia na brzegu warunki analogiczne do równań (48), (49), (50). Metoda obliczeń zadania przestrzennego jest bezpośrednim uogólnieniem przedstawionej wyżej procedury.

Należy wprowadzić dodatkowo zbiór wielomianów interpolacyjnych w kierunku osi z:

$$\vartheta(z)\Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} = \sum_{k=0}^{p} c_{ijk}\, z^k \tag{61}$$

W omawianym przypadku obok węzłów brzegowych pojedynczych i podwójnych definiowanych jako punkty przebicia powierzchni ograniczającej obszar przestrzenny Ω jedną, lub dwoma wzajemnie prostopadłymi liniami podziału siatkowego, na brzegu obszaru mogą również wystąpić węzły potrójne. Należy umieszczać, na tych elementach powierzchni brzegowej, gdzie wektor normalny do konturu nie pokrywa się kierunkiem z żadną osią współrzędnych. Na brzegu, gdzie jeden z cosinusów kierunkowych jest w przybliżeniu równy zero, winny znaleźć się węzły podwójne, zaś w przypadku gdy tylko jeden z cosinusów kierunkowych jest różny od zera, można umieścić na brzegu węzeł pojedynczy.

Warunek ciągłości funkcji ϑ w obszarze Ω prowadzi dla węzłów wewnętrznych i potrójnych do dwóch liniowo niezależnych równań wynikających z zależności:

$$\vartheta(x_i)\Big|_{\substack{y=y_j \\ z=z_k}} = \vartheta(y_j)\Big|_{\substack{x=x_i \\ z=z_k}} = \vartheta(z_k)\Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} \tag{62}$$

Pozostałe zależności są analogią równań (52) ÷ (59) rozszerzoną na układ przestrzenny.

2.2. Obszary niejednorodne

Zagadnienie ustalonego przewodzenia ciepła w przypadku płaskiego obszaru $\Omega_{1,2}$ składającego się z dwu różnych podobszarów Ω_1 i Ω_2 sprowadza się do poszukiwania dwu funkcji $\vartheta_1(x,y)$ i $\vartheta_2(x,y)$ spełniających równanie:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_m}{\partial y^2} = 0; \quad m = 1,2 \tag{63}$$

Na styku podobszarów Ω_1 i Ω_2 funkcje $\vartheta_m(x,y)$ muszą spełniać warunek w postaci:

$$\vartheta_1(x,y) = \vartheta_2(x,y) \tag{64}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial n} \tag{65}$$

gdzie:

$P(x,y) \in \Gamma_{1,2}$.

Na pozostałym wycinku brzegu zadane są równania (48) ÷ (50).

Rozpatrywany niejednorodny obszar płaski pokrywamy siatką prostokątną o dowolnym skoku $\Delta x_i, \Delta y_j$ (rys. 6). Pochodne kierunkowe na wspólnym brzegu występujące w warunku (65) determinują taki podział obszaru $\Omega_{1,2}$, aby na styku podobszarów Ω_1 i Ω_2 znalazły się węzły brzegowe podwójne (za wyjątkiem wycinków konturu, na którym kierunek pochodnej pokrywa się z kierunkiem osi x lub y).

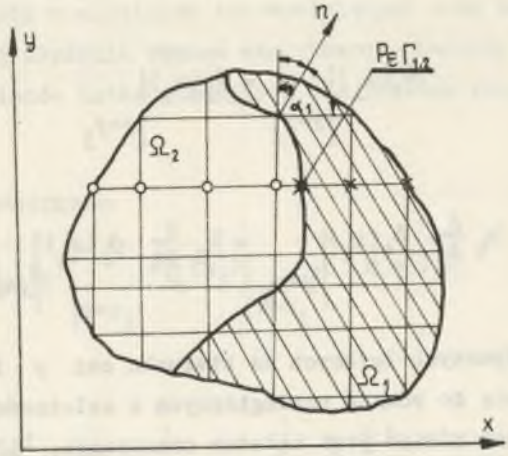
Pole temperatur w podobszarach Ω_1 i Ω_2 interpolujemy dwoma rodzinami wielomianów:

$$\vartheta_m(x)\Big|_{y=y_j} = \sum_{i=0}^{I_m} a_{ij}^m x^i \tag{66}$$

$$\vartheta_m(y)\Big|_{x=x_i} = \sum_{j=0}^{J_m} b_{ij}^m y^j \tag{67}$$

gdzie:

$m = 1,2$.



Rys. 6. Obszar niejednorodny

Dla obu podobszarów rozpisuje się jak poprzednio równania warunkowe wynikające z ciągłości funkcji $\vartheta_m(x,y)$, postaci równania różniczkowego i warunków brzegowych. Zamykającą grupę równań stanowią:

1° Warunek ciągłości pola temperatur na wspólnym brzegu:

$$\vartheta_1(x_i)\Big|_{y=y_j} = \vartheta_1(y_j)\Big|_{x=x_i} = \vartheta_2(x_i)\Big|_{y=y_j} = \vartheta_2(y_j)\Big|_{x=x_i} \tag{68}$$

gdzie:

$P(x,y) \in \Gamma_{1,2}$.

2° Warunek ciągłości strumienia cieplnego:

$$\lambda_1\left[\frac{d}{dx}\vartheta_1(x_i)\Big|_{y=y_j}\cos\alpha_1 + \frac{d}{dy}\vartheta_1(y_j)\Big|_{x=x_i}\cos\alpha_2\right] = \tag{69}$$

$$= \lambda_2\left[\frac{d}{dx}\vartheta_2(x_i)\Big|_{y=y_j}\cos\alpha_1 + \frac{d}{dy}\vartheta_2(y_j)\Big|_{x=x_i}\cos\alpha_2\right]$$

Dla węzłów brzegowych pojedynczych leżących na kierunku osi x:

$$\vartheta_1(x_i)\Big|_{y=y_j} = \vartheta_2(x_i)\Big|_{y=y_j} \tag{70}$$

$$\lambda_1 \frac{d}{dx}\ \vartheta_1(x_i)\Big|_{y=y_j} = \lambda_2 \frac{d}{dx}\ \vartheta_2(x_i)\Big|_{y=y_j} \tag{71}$$

Dla węzłów pojedynczych leżących na kierunku osi y IV warunek brzegowy sprowadza się do równań analogicznych z zależnościami (70), (71).

Otrzymany układ równań jest układem oznaczonym. Liczba równań jest równa liczbie niewiadomych współczynników a^1_{ij}, b^1_{ij}, a^2_{ij}, b^2_{ij}. Każdy węzeł leżący na styku dwóch podobszarów zwiększa bowiem o jedności w stosunku do identycznego obszaru jednorodnego liczbę współczynników wielomianów interpolujących daną warstwicę (w miejsce jednego wielomianu interpolującego, mamy teraz dwa wielomiany dla dwóch podobszarów). Równocześnie jednak zwiększa się ilość równań warunkowych - o jedno w przypadku węzła brzegowego pojedynczego i o dwa dla węzła podwójnego, tak że równowaga między ilością równań i niewiadomych zostaje zachowana.

Omówiony wyżej przypadek zadania z IV warunkiem brzegowym na granicy ośrodków występuje przy idealnym styku dwóch podobszarów. W praktyce mamy często do czynienia z zagadnieniami przewodzenia ciepła w ośrodku niejednorodnym, przy czym na wspólnym brzegu występuje dodatkowy opór cieplny styku R(x,y).

W takim przypadku pole temperatur na brzegu charakteryzuje się nieciągłością typu skokowego tzn. $\vartheta_1(x,y) \neq \vartheta_2(x,y)$; $P(x,y) \in \Gamma_{1,2}$. Pozostaje więc warunek brzegowy w postaci:

$$\lambda_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} = \frac{1}{R(x,y)} \left[\vartheta_2(x,y) - \vartheta_1(x,y) \right] = \lambda_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial n}, \quad P(x,y)_{1,2} \tag{72}$$

wynikający z ciągłości strumienia cieplnego na wspólnym brzegu.

Metodą obliczeniową dla zagadnienia kontaktowego z oporem cieplnym polega na rozpisaniu wielomianów interpolujących pole temperatur w obydwu podobszarach i ułożeniu równań warunkowych. Związki między współczynnikami wielomianów interpolacyjnych dla punktów brzegowych przyjmą postać:

1° Dla węzłów podwójnych:

$$\vartheta_m(x_i)\Big|_{y=y_j} = \vartheta_m(x_j)\Big|_{x=x_i} \; ; \quad m = 1,2 \tag{73}$$

oraz

$$\lambda_m\left[\frac{d}{dx}\vartheta_m(x_i)\Big|_{y=y_j}\cos\alpha_1 + \frac{d}{dy}\vartheta_m(y_j)\Big|_{x=x_i}\cos\alpha_2\right] = \frac{\vartheta_2(x_i)\Big|_{y=y_j} - \vartheta_1(x_i)\Big|_{y=y_j}}{R(x_i y_j)}, \quad m = 1,2 \tag{74}$$

2° Dla węzłów pojedynczych:

$$\lambda_1 \frac{d}{dx}\vartheta_1(x_i)\Big|_{y=y_j} = \lambda_2 \frac{d}{dx}\vartheta_2(x_i)\Big|_{y=y_j} = \frac{\vartheta_2(x_i)\Big|_{y=y_j} - \vartheta_1(x_i)\Big|_{y=y_j}}{R(x_i y_j)} \tag{75}$$

lub

$$\lambda_1 \frac{d}{dy}\vartheta_1(y_j)\Big|_{x=x_i} = \lambda_2 \frac{d}{dy}\vartheta_2(y_j)\Big|_{x=x_i} = \frac{\vartheta_2(y_j)\Big|_{x=x_i} - \vartheta_1(y_j)\Big|_{x=x_i}}{(R(x_i y_j)} \tag{76}$$

Równanie (75) odnosi się do węzłów leżących na kierunku osi x, zaś równanie (76) do węzłów leżących na kierunku osi y.

Ponieważ ilość dodatkowych warunków wynikających z równania (72) jest taka sama jak w przypadku styku idealnego, otrzymany układ równań jest oznaczony względem współczynników wielomianów interpolujących pole temperatur.

2.3. Wewnętrzne źródła ciepła

Stacjonarne pole temperatur w ośrodku z wewnętrznymi źródłami ciepła opisane jest w przypadku stałej przewodności równaniem Poisona:

$$\nabla^2 \vartheta + \frac{q_v(p)}{\lambda} = 0 \tag{77}$$

i warunkami brzegowymi (48) ÷ (50).

Dla obszarów płaskich zorientowanych przy pomocy prostokątnego układu współrzędnych mamy:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{q_v(x,y)}{\lambda} = 0 \tag{78}$$

W przypadku równomiernie rozłożonych źródeł funkcja:

$$q_v(x,y) = q_v = \text{idem} \tag{79}$$

Załóżmy, że funkcja $q_v(x,y)$ jest ciągła i określona w każdym punkcie obszaru Ω.

Dla takiego przypadku przedstawiona w pracy metoda obliczania pola temperatur sprowadza się do rozwiązania układu równań (51) ÷ (59), przy czym równanie (52) przyjmie postać:

$$\frac{d^2}{dx^2}\vartheta(x_i)\Big|_{y=y_j} + \frac{d^2}{dy^2}\vartheta(y_j)\Big|_{x=x_i} + \frac{q_v(x_i y_j)}{\lambda} = 0 \tag{80}$$

W miejsce równania Laplace'a należy bowiem przyjąć równanie Poissona. Po znalezieniu wartości współczynników a_{ij}, b_{ij}, na podstawie otrzymanych równań interpolujących warstwice, znajdujemy wielkości temperatur w węzłach przyjętej siatki.

2.4. Nieustalone przewodzenie ciepła w ciałach stałych bez źródeł wewnętrznych

Omawiany problem sprowadza się do znalezienia funkcji $\vartheta(P,\tau)$, $P \in \Omega$, 0 spełniającej w obszarze Ω równanie Fouriera:

$$C_p \gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \lambda \nabla^2 \tag{81}$$

przy warunku początkowym:

$$\vartheta(P,0) = \vartheta_0(P) \tag{82}$$

i warunkach brzegowych (48) ÷ (50).

W równaniu (80) oznaczono:

C_p - właściwa pojemność cieplna ośrodka

γ - gęstość masy

τ - czas.

Rozwiązanie zadania metodą wielomianów polega na rozpisaniu wielomianów interpolujących pole temperatur i wykorzystaniu warunków ciągłości funkcji ϑ, równania różniczkowego, warunku początkowego i warunków brzegowych.

Dla obszaru płaskiego zorientowanego w układzie xy mamy:

$$C_p \gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right) \tag{83}$$

Po przyjęciu siatki przestrzenno-czasowej rozpisujemy równanie warstwic w postaci (22) (23) (25).

Z warunku ciągłości otrzymujemy dla węzłów wewnętrznych i brzegowych podwójnych dwa liniowo niezależne równania:

$$\vartheta(x_i)\Big|_{\substack{y=y_j \\ \tau=\tau_k}} = \vartheta(y_j)\Big|_{\substack{x=x_i \\ \tau=\tau_k}} = \vartheta(\tau_k)\Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} \tag{84}$$

Równanie Fouriera można zapisać w postaci:

$$\frac{1}{a}\left.\frac{d\,\vartheta(\tau_k)}{d\tau}\right|_{\substack{x=x_i\\ y=y_j}} = \left.\frac{d^2}{dx^2}\vartheta(x_i)\right|_{\substack{y=y_j\\ \tau=\tau_k}} + \left.\frac{d^2}{dy^2}\vartheta(y_j)\right|_{\substack{x=x_i\\ \tau=\tau_k}} \tag{85}$$

Wykorzystując warunek początkowy mamy:

$$\vartheta(0)\Big|_{\substack{x=x_i\\ y=y_j}} = \vartheta_o(x_i y_j) \quad . \tag{86}$$

Zaś ostatnią grupę równań tworzą wynikające z zadanych warunków brzegowych zależności (53) ÷ (59).

Jak wykazano w rozdziale 1 otrzymany zbiór warunków tworzy oznaczony układ równań liniowych względem a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}.

2.5. Równanie Kirchoffa - Fouriera

Problem ten w zasadzie nie mieści się w ramach wyznaczonych dla niniejszej pracy; której tematem są problemy przewodnictwa cieplnego w ciałach stałych, ale stosowane w większości przypadków o znaczeniu praktycznym równanie energii dla przepływu płynu, które sprowadza się do postaci znanej pod nazwą równania Kirchoffa - Fouriera:

$$c_p\gamma\frac{D\vartheta}{D\tau} = \lambda\nabla^2\vartheta \tag{87}$$

należy do klasy równań cząstkowych typu (17), które w sposób przybliżony można rozwiązywać metodą warstwic.

W równaniu (87) symbolem $\frac{D\vartheta}{D\tau}$ oznaczono pochodną substancjalną temperatury.

Dla obszaru płaskiego zorientowanego w prostokątnym układzie współrzędnych:

$$\frac{D\vartheta}{D\tau} = \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} + W_x\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + W_y\frac{\partial\vartheta}{\partial y} \tag{88}$$

gdzie:

W_x, W_y - składowe prędkości płynu.

W szczególnym przypadku ustalonego przepływu dwuwymiarowego i ustalonej wymiany ciepła mamy:

$$W_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + W_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = a \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right] \tag{89}$$

Jeżeli składowe W_x i W_y są w obszarze Ω zadanymi jawnymi funkcjami współrzędnych:

$$\begin{aligned} W_x &= W_x(x,y) \\ W_y &= W_y(x,y) \end{aligned} \tag{90}$$

lub mają w rozpatrywanym obszarze wartość stałą, to równanie energii i jego szczególne przypadki można w sposób przybliżony rozwiązać stosując procedurę podobną do opisanej w punkcie 2.4., z tym, że warunek wynikający z postaci równania różniczkowego sprowadza się do zależności:

$$\frac{d}{d\tau} \vartheta(\tau_k) \Bigg|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} + W_x(x_i y_j) \frac{d}{dx} \vartheta(x_i) \Bigg|_{\substack{y=y_j \\ \tau=\tau_k^j}} + W_y(x_i y_j) \frac{d}{dy} \vartheta(y_j) \Bigg|_{\substack{x=x_i \\ \tau=\tau_k}} =$$

$$= a \left[\frac{d^2}{dx^2} \vartheta(x_i) \Bigg|_{\substack{y=y_j \\ \tau=\tau_k^j}} + \frac{d^2}{dy^2} \vartheta(y_j) \right]_{\substack{x=x_i \\ \tau=\tau_k}} \tag{91}$$

Równanie (93) jest liniowe względem współczynników interpolujących warstwice pola temperatur.

Dla stanu ustalonego

$$W_x(x_i y_j) \frac{d}{dx} \vartheta(x_i)\Big|_{y=y_j} + W_y(x_i y_j) \frac{d}{d_y} \vartheta(y_j)\Big|_{x=x_i} =$$

$$= a\left[\frac{d^2}{dx^2} \vartheta(x_i)\Big|_{y=y_j} + \frac{d^2}{dy^2} \vartheta(y_j)\Big|_{x=x_i}\right] \tag{92}$$

3. METODA WARSTWICOWA Z WĘDRUJĄCYM WARUNKIEM POCZĄTKOWYM

Przedstawiona w rozdziale niniejszym metoda obliczania niestacjonarnego pola temperatur jest uproszczonym wariantem metody interpolacji warstwic. Kosztem niewielkiego pogorszenia dokładności uzyskuje się znacznie zmniejszenie rzędu macierzy współczynników układu równań, chociaż z drugiej strony podobnie jak w metodach różnicowych opartych na operatorach ∇, lub μ układ równań należy rozwiązywać wielokrotnie. Metoda doboru współczynników z wędrującym warunkiem początkowym może być stosowana do przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych opisanych zależnością (17).

Szczegóły dotyczące nowej metody zostaną niżej wyjaśnione na przykładzie rozwiązywania problemu nieustalonego przewodzenia ciepła w płaskim obszarze Ω, bez wewnętrznych źródeł ciepła, zorientowanego w układzie prostokątnym:

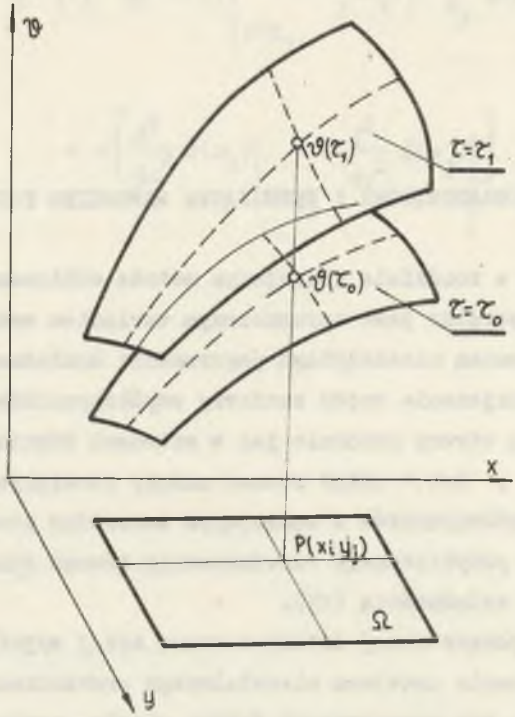
$$\frac{1}{a}\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \tag{93}$$

przy dowolnych warunkach brzegowych i warunku początkowym:

$$\vartheta(\tau_o, x, y) = \vartheta_o(x, y) \tag{94}$$

3.1. Liniowa interpolacja zmienności temperatury w czasie

Warunek początkowy zadania odwzorowuje się w układzie $xy\vartheta$ jako izoparametryczna powierzchnia $\tau = \tau_o$. Przyjmując pewien interwał czasu $\Delta\tau_o$ otrzymuje się dla wartości $\tau_1 = \tau_o + \Delta\tau_o$ nową powierzchnię będącą obrazem pola temperatur w rozpatrywanym obszarze w chwili τ_1 (rys. 7).



Rys. 7. Liniowa interpolacja zmienności temperatury

Linie przenikania powierzchni τ_1 = idem z płaszczyznymi podziału siatkowego x_i = idem oraz y_j = idem interpolować będziemy jak poprzednio wielomianami, których stopień zdeterminowany jest ilością węzłów w danym przekroju czyli:

$$\vartheta(x)\Big|_{\substack{y=y_j\\ \tau=\tau_1}} = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}^{1} x^{i} \tag{95}$$

$$\vartheta(y)\Big|_{\substack{x=x_i\\ \tau=\tau_1}} = \sum_{j=0}^{n} b_{ij}^{1} y^{j} \tag{96}$$

Ponieważ rozpatrujemy tylko dwie powierzchnie τ_o = idem oraz τ_1 = idem, więc zmienność temperatury w punktach węzłowych należy interpolować liniowo:

$$\vartheta(\tau)\Big|_{\substack{x=x_i\\ y=y_j}} = A_{ij} + B_{ij}\tau \tag{97}$$

Wykorzystując warunek początkowy mamy:

$$A_{ij} = \vartheta_o(x_i y_j) \tag{98}$$

czyli

$$\vartheta(\tau)\Big|_{\substack{x=x_i\\ y=y_j}} = \vartheta_o(x_i y_j) + B_{ij}\tau \tag{99}$$

Na powierzchni τ_1 = idem musi być spełniony warunek ciągłości funkcji ϑ:

$$\vartheta(x_i)\Big|_{\substack{y=y_j\\ \tau=\tau_1}} = \vartheta(y_j)\Big|_{\substack{x=x_i\\ \tau=\tau_1}} = \vartheta_o(x_i y_j) + B_{ij}\tau_1 \tag{100}$$

Warunek wynikający z równania Fouriera przyjmuje postać:

$$\frac{1}{a} B_{ij} = \frac{d^2}{dx^2}\vartheta(x_i)\Big|_{\substack{y=y_j\\ \tau=\tau_1}} + \frac{d^2}{dy^2}\vartheta(y_j)\Big|_{\substack{x=x_i\\ \tau=\tau_1}} \tag{101}$$

zaś ostatnią grupę równań otrzymuje się z warunków brzegowych zadania - (53) ÷ (57).

Otrzymany, liniowy względem współczynników a^1_{ij}, b^1_{ij}, B_{ij} układ równań posiada jednoznaczne rozwiązanie.

Ilość niewiadomych współczynników a^1_{ij}, b^1_{ij} wynosi bowiem (por.wz.43):

$$N' = 2(W_o + W_2) + W_1 \tag{102}$$

Ponieważ parametrów B_{ij} jest tyle, ile węzłów wewnętrznych i podwójnych w obszarze Ω, więc:

$$N = 3(W_o + W_2, + W_1 \tag{103}$$

Z warunku ciągłości funkcji otrzymujemy:

$$R' = 2(W_o + W_2) \tag{104}$$

zaś z równania Fouriera:

$$R'' = W_o \tag{105}$$

równań warunkowych.

W węzłach brzegowych siatki otrzymuje się:

$$R''' = W_2 + W_1 \tag{106}$$

zależności wynikających z zadanych warunków brzegowych.

Po dodaniu stronami równań (104) ÷ (106) mamy $N = R$, co dowodzi oznaczoności układu równań.

Obliczone z wielomianów interpolacyjnych wartości $\vartheta(x_i y_j)\Big|_{\tau=\tau_1}$ stanowią nowy warunek początkowy zadania, na podstawie którego można znaleźć wartość funkcji w chwili $\tau = \tau_2$. Powtarzanie przedstawionej wyżej procedury określoną ilość razy daje przybliżone rozwiązanie równania nieustalonego przewodzenia ciepła.

Liniowa aproksymacja zmienności funkcji ϑ w punktach $P(x_i y_j)$ stanowi w pewnym stopniu analogię licznych metod numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych [1], polegających na aproksymacji całki równania linią łamaną. We wszystkich metodach tego typu błąd przybliżenia rośnie ze wzrostem argumentu funkcji (w rozpatrywanym przypadku zmiennej τ). Przyjęcie w obliczeniach stałej wartości interwału czasu $\Delta\tau = \tau_{k+1} - \tau_k$ znacznie upraszcza algorytm modelowania. Poprzez eliminację z równań ciągłości i warunków (101) parametrów B_{ij}, otrzymu-

je się liniowy układ równań, w którym wartości elementów macierzy współczynników nie zmieniają się w czasie. Dołączenie do standartowego programu odwracania macierzy prostego podprogramu obliczeń wektora wyrazów wolnych pozwala wydatnie skrócić czas pracy maszyny cyfrowej.

3.2. Interpolacja paraboliczna

Powierzchnia $\tau = \tau_0$ (warunek początkowy) oraz $\tau = \tau_1$, $\tau = \tau_2$ tworzą zbiór, który można opisać następującymi równaniami:

$$\vartheta(x)\Big|_{\substack{y=y_j\\ \tau=\tau_1}} = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}^{1}\, x^{i} \tag{107}$$

$$\vartheta(y)\Big|_{\substack{x=x_i\\ \tau=\tau_1}} = \sum_{j=0}^{m} b_{ij}^{1}\, y^{j} \tag{108}$$

$$\vartheta(x)\Big|_{\substack{y=y_j\\ \tau=\tau_2}} = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}^{2}\, x^{i} \tag{109}$$

$$\vartheta(y)\Big|_{\substack{x=x_i\\ \tau=\tau_2}} = \sum_{j=0}^{m} b_{ij}^{2}\, y^{j} \tag{110}$$

$$\vartheta(\tau)_{\substack{x=x_i\\ y=y_j}} = A_{ij} + B_{ij}\tau + C_{ij}\tau^{2} \tag{111}$$

oraz równanie (94).

Wartości współczynników a_{ij}^{1}, b_{ij}^{1}, a_{ij}^{2}, b_{ij}^{2}, B_{ij}, C_{ij} obliczamy z układu równań

$$\vartheta(x_i)\Big|_{\substack{y=y_j\\ \tau=\tau_1}} = \vartheta(y_j)\Big|_{\substack{x=x_i\\ \tau=\tau_1}} = \vartheta_0(x_i y_j) + B_{ij}\tau_1 + C_{ij}\tau_1^{2} \tag{112}$$

$$\vartheta(x_i)\Big|_{\substack{y=y_i\\ \tau=\tau_2}} = \vartheta(y_j)\Big|_{\substack{x=x_i\\ \tau=\tau_2}} = \vartheta_o(x_i y_j) + B_{ij}\,\tau_2 + C_{ij}\,\tau_2^{\,2} \tag{113}$$

$$\frac{1}{a}\,(B_{ij} + 2\tau_1 C_{ij}) = \frac{d^2}{dx^2}\,\vartheta(x_i)\Big|_{\substack{y=y_j\\ \tau=\tau_1}} + \frac{d^2}{dy^2}\,\vartheta(y_j)\Big|_{\substack{x=x_i\\ \tau=\tau_1}} \tag{114}$$

$$\frac{1}{a}(B_{ij} + 2\tau_2 C_{ij}) = \frac{d^2}{dx^2}\,\vartheta(x_i)\Big|_{\substack{y=y_j\\ \tau=\tau_2}} + \frac{d^2}{dy^2}\,(y_j)\Big|_{\substack{x=x_i\\ \tau=\tau_2}} \tag{115}$$

oraz warunków (53) ÷ (57).

Na podstawie otrzymanych warstwic znajdujemy temperatury $\vartheta(x_i y_j)_{\tau=\tau_1}$, oraz $\vartheta(x_i y_j)_{\tau=\tau_2}$.

W następnym kroku przyjmujemy nowy interwał czasu $\Delta\tau_2$. Warstwice powierzchni $\tau_3 = \tau_2 + \Delta\tau_2$ opisujemy wielomianami:

$$\vartheta(x)\Big|_{\substack{y=y_j\\ \tau=\tau_3}} = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}^{3}\, x^i \tag{116}$$

$$\vartheta(y)\Big|_{\substack{x=x_i\\ \tau=\tau_3}} = \sum_{j=0}^{m} b_{ij}^{3}\, y^j \tag{117}$$

zaś zmienność temperatury w przedziale czasu $\tau_1 \div \tau_3$ parabolą:

$$\vartheta(\tau)\Big|_{\substack{x=x_i\\ y=y_j}} = A_{ij}^{1} + B_{ij}^{1}\,\tau + C_{ij}^{1}\,\tau^2 \tag{118}$$

Niewiadome wartości współczynników a_{ij}^{3}, b_{ij}^{3}, A_{ij}^{1}, B_{ij}^{1}, C_{ij}^{1} obliczamy z układu równań:

$$\vartheta(x_i)\Big|_{\substack{y=y_j\\ \tau=\tau_3}} = \vartheta(y_j)\Big|_{\substack{x=x_i\\ \tau=\tau_3}} = A^{1}_{ij} + B_{ij}^{1}\,\tau_3 + C_{ij}^{1}\,\tau_3^{2} \tag{119}$$

$$\frac{1}{a}(B^1_{ij} + 2\tau_3 C^1_{ij}) = \frac{d^2}{dx^2}\vartheta(x_i)\Big|_{\substack{y=y_j\\ \tau=\tau_3}} + \frac{d^2}{dy^2}\vartheta(y_j)\Big|_{\substack{x=x_j\\ \tau=\tau_3}} \tag{120}$$

$$\vartheta(x_i y_j)_{\tau=\tau_1} = A_{ij} + B^1_{ij}\,\tau_1 + C^1_{ij}\,\tau_1^2 \tag{121}$$

$$\vartheta(x_i y_j)_{\tau=\tau_2} = A_{ij} + B^1_{ij}\,\tau_2 + C^1_{ij}\,\tau_2^2 \tag{122}$$

i warunków brzegowych.

Rząd N macierzy układu równań liniowych:

$$N = 2(W_o + W_2) + W_1 + 3(W_o + W_2) \tag{123}$$

przy czym pierwsze dwa składniki sumy są ilością niewiadomych współczynników a^3_{ij}, b^3_{ij}, zaś trzeci wyraz określa ilość parametrów A^1_{ij}, B^1_{ij}, C^1_{ij}.

Z warunku ciągłości otrzymuje się:

$$R' = 2(W_o + W_2) \tag{124}$$

z równania Fouriera:

$$R'' = W_o \tag{125}$$

zaś z warunków brzegowych:

$$R''' = W_1 + W_2 \tag{126}$$

równań liniowych.

Zbiór obliczonych uprzednio wartości funkcji $\vartheta(x_i y_j)_{\tau=\tau_1}$ oraz $(x_i y_j)_{\tau=\tau_2}$ dostarcza:

$$R = 2(W_o + W_2) \tag{127}$$

warunków. Ponieważ $N = \sum_{1}^{4} R$, więc wartości $\vartheta(x_i y_j)_{\tau=\tau_3}$ można jednoznacznie określić.

Kontynuacja przedstawionej wyżej procedury określoną ilość razy daje przybliżone rozwiązanie problemu.

Uzależnienie zbioru wartości funkcji $\vartheta(x_i y_j)_{\tau=\tau_3}$ od wartości funkcji na powierzchniach $\tau = \tau_2$ i $\tau = \tau_1$ jest rzecz jasna założeniem mocniejszym niż interpolacja liniowa omówioną w punckie 3.1.

3.3. Interpolacja wielomianem stopnia K

Rozpatrywać będziemy zbiór powierzchni τ_k = idem, k = 0,1,...K. Stosując metodę opisaną w punkcie 2.4 znajdujemy wartości temperatur w węzłach danego obszaru dla $\tau = \tau_k$; k = 1,2...K. Przyjęcie kolejnego interwału czasu $\Delta\tau_k$ determinuje w układzie $\{xy\vartheta\}$ powierzchnię $\tau = \tau_K + \Delta\tau_K = \tau_{K+1}$.

Równanie warstwic tej powierzchni interpolujemy wielomianami:

$$\vartheta(x)\Big|_{\substack{y=y_j \\ \tau=\tau_{K+1}}} = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}^{K+1} x^i \tag{128}$$

$$\vartheta(y)\Big|_{\substack{x=x_i \\ \tau=\tau_{K+1}}} = \sum_{j=0}^{m} b_{ij}^{k+1} y^i \tag{129}$$

;aś zmienność temperatury w interwale $\tau_1 \div \tau_{K+1}$ funkcją:

$$\vartheta(\tau)\Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} = \sum_{k=0}^{K} A_{ijk} \tau^k \tag{130}$$

Zbiór warunków:

$$\vartheta(x_i)\Big|_{\substack{y=y_j \\ \tau=\tau_{K+1}}} = \vartheta(y_j)\Big|_{\substack{x=x_i \\ \tau=\tau_{K+1}}} = \vartheta(\tau_{K+1})\Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} \tag{131}$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\tau_{K+1}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_i\\ y=y_j}} = \frac{d^2}{dx^2}\vartheta(x_i)\Bigg|_{\substack{y=y_j\\ \tau=\tau_{K+1}}} + \frac{d^2}{dy^2}\vartheta(y_j)\Bigg|_{\substack{x=x_i\\ \tau=\tau_{K+1}}} \tag{132}$$

$$\vartheta(x_i y_j)\Bigg|_{\tau=\tau_K} = \vartheta(\tau_K)\Bigg|_{\substack{x=x_i\\ y=y_j}}, \quad k = 1,2\ldots K \tag{133}$$

oraz równań wynikających z warunków brzegowych, tworzy liniowy i oznaczony układ równań, z którego po obliczeniu współczynników wielomianów interpolujących powierzchnię $\tau = \tau_{K+1}$ można wyznaczyć temperatury w punktach węzłowych na tej powierzchni. Wprowadzając z kolei powierzchnię τ_{K+2}, zaś rozkład temperatur na powierzchni τ_2 = idem traktując jako nowy warunek początkowy powtarzamy obliczenia, postępując w ten sam sposób aż rozwiązanie zadania w założonym interwale czasu. Dowód jednoznaczności układu równań jest analogiczny jak w przypadku interpolacji parabolicznej.

Przedstawiona wyżej metoda interpolacji wielomianem stopnia K sprowadza się w granicznym przypadku do metody omówionej w rozdziałach 1 i 2 niniejszej pracy. Dzięki zastosowaniu tej metody można w pewnych granicach ingerować w rząd rozwiązywanego układu równań, kosztem wielokrotnego powtórzenia opisanej procedury. Równocześnie metoda umożliwia gęstszy podział siatkowy zarówno rozpatrywanego obszaru, jak i osi czasu, przy zachowaniu rzędu układu rozwiązywalnego na konkretnej maszynie cyfrowej.

Metodę interpolacji z wędrującym warunkiem początkowym przedstawiono na przykładzie równania Fouriera. Można ją, zmieniając odpowiednio warunki wynikające z postaci równania różniczkowego stosować również do innych przypadków przewodzenia niestacjonarnego. W pewnych szczególnych przypadkach (ośrodki półnieskończone) można używać metody do rozwiązywania zadań z dziedziny ustalonego przewodzenia ciepła.

4. MODELOWANIE POLA TEMPERATUR PRZY ZMIENNEJ WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKA PRZEWODZENIA CIEPŁA

Zagadnienie ustalonego przewodzenia ciepła w jednorodnym ośrodku Ω charakteryzującym się zmienną wartością współczynnika λ, sprowadza się do poszukiwania funkcji spełniającej równanie (15), przy warunkach brzegowych opisanych równaniami (48 ÷ (50).

Dla ośrodka płaskiego, zorientowanego w układzie współrzędnych prostokątnych równanie (15) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial}{\partial x}\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial y}=0 \tag{134}$$

Omawiając metodę warstwicową w odniesieniu do zagadnień tego typu należy w dalszej kolejności rozpatrywać dwa przypadki aproksymacji rzeczywistej zmienności współczynnika λ.

1°. Jeżeli współczynnik przewodzenia ciepła λ jest jawną funkcją współrzędnych punktów obszaru Ω, jednoznacznie określoną w każdym punkcie rozpatrywanego obszaru, to rozwiązanie zadania metodą warstwicową nie nastręcza większych trudności:

Zapisując ostatnie równanie w postaci:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\lambda\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}\right)=0 \tag{135}$$

otrzymuje się dla każdego węzła wewnętrznego liniowy związek między cząstkowymi pochodnymi funkcji ϑ, w którym wartości λ, $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial y}$ są współczynnikami liczbowymi.

Mamy bowiem:

$$\lambda_{ij}=\lambda(x_i,y_j)$$

$$\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\lambda(x_i y_j)$$

$$\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\lambda(x_i y_j) \tag{136}$$

gdzie:

$P(x_i y_j)$ - zbiór węzłów wewnętrznych obszaru Ω.

Tak więc problem sprowadza się w omawianym przypadku do rozwiązania układu utworzonego z równań (51), (53) ÷ (59) oraz wprowadzonych w miejsce zależności (52) warunków w postaci:

$$\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x}\frac{d}{dx}\vartheta(x_i)\Big|_{y=y_j} + \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial y}\vartheta(y_j)\Big|_{x=x_i} +$$

$$+ \lambda_{ij}\left[\frac{d^2}{dx^2}\vartheta(x_i)\Big|_{y=y_j} + \frac{d^2}{dy^2}\vartheta(y_j)\Big|_{x=x_i}\right] = 0 \tag{137}$$

skąd po znalezieniu wartości współczynników a_{ij}, b_{ij}, można bezpośrednio obliczyć rozkład temperatur w węzłach obszaru Ω.

Rozwiązanie problemu nieustalonego przepływu ciepła jest bezpośrednim uogólnieniem przedstawionego wyżej algorytmu (przy założeniu, że iloczyn $c_p\gamma$ ma wartość stałą).

2°. Zagadnienia z przepływu ciepła, dla których zmienność współczynnika λ można aproksymować jawną funkcją współrzędnych, stanowią jednak bardzo wąską grupę zagadnień, rzadko spotykanych w praktyce. Najczęściej rozwiązuje się problemy gdzie zadana jest zależność λ od temperatury:

$$\lambda = \lambda(\vartheta) \tag{138}$$

Bezpośrednie zastosowanie dla takiego przypadku metody warstwic prowadzi wówczas do trudno rozwiązywalnych układów równań algebraicznych nieliniowych. Można jednak wprowadzić pewne przekształcenie, które sprowadza równanie (134) do postaci równania Laplace'a.

Funkcję transformującą określamy jako:

$$F = \int_{t_o}^{\vartheta} \lambda(\vartheta)\, d\vartheta \tag{139}$$

gdzie:

t_o - wartość temperatury stanowiąca poziom odniesienia dla funkcji F; $F(t_o) = 0$. Zakładamy oczywiście, że w przedziale temperatur $[t_o, \vartheta]$ funkcja $\lambda(\vartheta)$ jest ciągła i nie zmienia znaku.

Z ostatniego równania wynika zależność:

$$\lambda = \frac{dF}{d\vartheta} \tag{140}$$

czyli równanie (134) można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \tag{141}$$

Zastosowanie metody warstwicowej dla rozpatrywanego przypadku sprowadza się więc do interpolacji powierzchni $F = F(x,y)$ określonej i ciągłej nad obszarem Ω i obliczenia z równań warunkowych wartości współczynników a_{ij} oraz b_{ij} wielomianów:

$$F(x)\Big|_{y=y_j} = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}\, x^i \tag{142}$$

$$F(y)\Big|_{x=x_i} = \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\, y^j \tag{143}$$

Wykorzystać należy warunek ciągłości funkcji F w postaci:

$$F(x_i)\Big|_{y=y_j} - F(y_j)\Big|_{x=x_i} = 0 \tag{144}$$

Równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2}{dx^2} F(x_i)\Big|_{y=y_j} + \frac{d^2}{dy^2} F(y_j)\Big|_{x=x_i} = 0 \tag{145}$$

oraz równania wynikające z zadanych warunków brzegowych.

W przypadku warunku brzegowego I rodzaju mamy:

$$F(x_i)\Big|_{y=y_j} = F_t(x_i y_j) \tag{146}$$

$$F(y_j)\Big|_{x=x_i} = F_t(x_i y_j) \tag{147}$$

w zależności od kierunku na jakim leży rozpatrywany węzeł.

Wartość funkcji $F_t(x_i y_j)$ obliczamy z zależności:

$$F_t(x_i y_j) = \int_{t_o}^{t(x_i y_j)} \lambda(\vartheta)\, d\vartheta \tag{148}$$

gdzie:

$t(x,y)$ - funkcja określająca rozkład temperatury na brzegu obszaru.

Warunek brzegowy II rodzaju przyjmuje postać:

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = q(x,y) = -\frac{dF}{d\vartheta}\,\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = -\frac{dF}{dn} \tag{149}$$

czyli:

$$\frac{dF(x_i)\Big|_{y=y_j}}{dx}\cos\alpha_1 + \frac{dF(y_j)\Big|_{x=x_i}}{dy}\cos\alpha_2 = -q(x_i y_j) \tag{150}$$

Otrzymanie liniowego i jednorodnego względem funkcji F równania wynikającego z III warunku brzegowego nie jest możliwe bez przyjęcia pewnych uproszczeń.

Mamy bowiem:

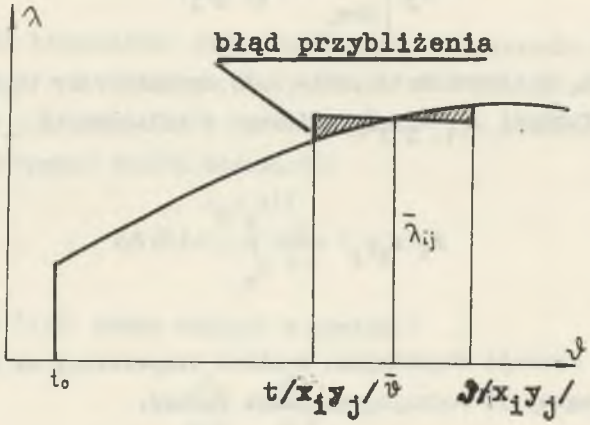
$$\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \frac{dF}{dn} = \alpha\left[t(x,y) - \vartheta(x,y)\right] \tag{151}$$

Przekształcając prawą stronę równania do postaci:

$$\alpha\left[t(x,y) - \vartheta(x,y)\right] = \frac{\alpha}{\lambda_m}\left[\int_{t_o}^{t(x,y)} \lambda(\vartheta)\, d\vartheta - \int_{t_o}^{\vartheta(x,y)} \lambda(\vartheta)\, d\vartheta\right] \tag{152}$$

gdzie:

λ_m - jest średnią wartością całki F w przedziale $\vartheta \in [t(x,y), \vartheta(x,y)]$ (rys. 8).



Rys. 8. Średnia wartość współczynnika przewodzenia ciepła dla III warunku brzegowego

Otrzymujemy jednorodny względem F liniowy związek:

$$\frac{dF}{dn} = \frac{\alpha}{\lambda_m}(F_t - F) \tag{153}$$

będący transformacją III warunku.

Zadanie można rozwiązać jedynie w sposób przybliżony, przyjmując w miejsce średniej całkowej wartość funkcji w dolnym krańcu przedziału lub jeszcze lepiej oszacować w sposób przybliżony średnią temperaturę $\bar{\vartheta}$ $\bar{\vartheta}$. Odpowiednie równanie warunkowe przyjmuje więc postać:

$$\frac{d}{dx}F(x_i)\Big|_{y=y_j} \cos\alpha_1 + \frac{d}{dy}F(y_j)\Big|_{x=x_i} \cos\alpha_2 = \frac{\alpha}{\lambda_m}\left[F_t - F(x_i)\Big|_{y=y_j}\right] \tag{154}$$

lub w przypadku węzłów pojedynczych formę analogiczną z (58), (59).

Jeżeli zmienność współczynnika przewodzenia w zakresie $\vartheta \in [t, \vartheta]$ nie jest duża, błąd wynikający z takiego przybliżenia jest znikomy. W pozostałych przypadkach proces modelowania pola temperatur można poprawić poprzez zastosowanie algorytmu iteracyjnego.

5. ZAGADNIENIE BŁĘDU METODY, PROBLEMY WŁAŚCIWEJ INTERPOLACJI

Oszacowanie wielkości błędu oraz wykazanie zbieżności opisanej w pracy metody jest problemem niezwykle skomplikowanym. Na wielkość błędu wpływa bowiem zarówno sposób interpolacji (w sensie stopnia wielomianów), jak i rozmieszczenie węzłów w rozpatrywanym obszarze. Istotną rolę odgrywa również niejednorodność warunków na brzegu obszaru i niejednorodność pola (dla stanów nieustalonych).

Spotykane w literaturze oszacowanie błędu metod typu minimalizacyjnego, do których w pewnym stopniu zbliżona jest metoda warstwicowa bazują na aparacie analizy funkcjonalnej i dotyczą prostych przypadków warunków brzegowych i geometrycznych zadań opisanych równaniami różniczkowymi o pochodnych cząstkowych.

Wykazanie zbieżności metody wymaga udowodnienia, że norma defektu rozwiązania przybliżonego $\|\bar{\vartheta}-\vartheta\|$, gdzie $\bar{\vartheta}$ jest rozwiązaniem przybliżonym, zaś ϑ rozwiązaniem dokładnym jest ograniczona i nie rośnie ze wzrostem ilości węzłów w obszarze.

Skończona wartość normy wynika w omawianym przypadku z istoty samej metody. Wielomiany interpolacyjne są bowiem funkcjami ciągłymi, ograniczonymi od góry i od dołu wartościami wynikającymi z warunków brzegowych rozpatrywanego zadania, czyli różnica między wartością $\bar{\vartheta}$ obliczoną dla każdego węzła, a rzeczywistą wartością musi być ograniczona. Zmniejszanie się błędu metody ze wzrostem ilości węzłów jest trudne do udowodnienia, aczkolwiek praktyka każdorazowo potwierdza tę tendencję. Stosunkowo łatwo można wykazać, że w przypadku zagadnień jednowymiarowych metoda warstwicowa jest zbieżna, jednak dowodem tego nie można uogólniać na zadania wielowymiarowe, dlatego rozważania dotyczące tego przypadku zostały pominięte.

Rozwiązanie problemu przewodzenia ciepła metodą warstwicową wymaga rozwiązania układu równań utworzonego z warunku ciągłości, równania różniczkowego i warunków brzegowych, przy czym żąda się, aby funkcja spełniała wszystkie zadane warunki, jest to więc metoda deterministyczna. Należy zauważyć jednak, że nie wszystkie one są jednakowo mocne. Najsłabiej uwarunkowany jest brzeg z zadanymi warunkami II rodzaju, gdzie odpowiednie równania dotyczą tylko kierunku pochodnej, a wartość funkcji nie jest jednoznacznie określona. Dość słaby jest również warunek brzegowy III typu - szczególnie dla węzłów pojedyńczych.

Tak więc w metodzie warstwicowej największe błędy lokalizują się w pobliżu brzegu obszaru (za wyjątkiem oczywiście warunków I rodzaju). Analiza omawianego zjawiska, prowadzi do wniosku, że korzystne jest zagęszczanie warstwic interpolujących w podobszarach graniczących bezpośrednio z brzegiem. Stanowi to pewną analogię z rozmieszczeniem punktów kollokacji w metodach minimalizacyjnych grupy 1 (funkcja aproksymująca spełnia równanie różniczkowe, a nie spełnia warunków brzegowych) [1].

Stosując metodę warstwicową należy z jednej strony dążyć do uzyskania niskiego rzędu układu równań warunkowych, z drugiej zaś do otrzymania możliwie dokładnych wyników. Aby model uczynił zadość obu tym warunkom, konieczne jest przeprowadzenie przybliżonej analizy jakościowej rozpatrywanego problemu. Ilość węzłów w danym przekroju determinuje bowiem stopień wielomianu, a co za tym idzie ilość niewiadomych współczynników układu równań. Przyjęcie konkretnej siatki decyduje zaś w pewnych granicach o obrazie funkcji, która będzie aproksymacją funkcji rzeczywistej. Tak więc prawidłowy opis wielomianowy pola temperatur ma decydujące znaczenie dla wielkości błędów metody. Przykładowo: interpolacja paraboliczna jest niewystarczająca do opisu funkcji charakteryzującej się punktami przegięcia.

Z problemem zmniejszania nieuniknionego błędu wadliwej aproksymacji wiąże się również sposób interpolacji warstwic w obszarach nieregularnych, gdzie płaszczyzny wyróżniające warstwice mogą lokalnie stykać się z brzegiem (załącznik 6.2). Ponieważ w punkcie styku prawo i lewostronna pochodna wielomianu interpolacyjnego nie powinna być cią-

gła, gdyż odpowiednia warstwica nie jest w rzeczywistości krzywą gładką, lepsze wyniki daje interpolacja dwoma wielomianami stopni niższych.

Przy obliczeniach dotyczących stanów nieustalonych, zwiększenie dokładności uzyskuje się poprzez przyjęcie małych interwałów czasu na początku procesu, gdy zaś niejednorodność pola zmniejsza się, interwał czasu można znacznie powiększyć.

6. PRZYPISY

W przypisach przedstawione zostaną przykłady liczbowe ilustrujące praktyczne zastosowanie metody warstwicowej do modelowania stacjonarnego i niestacjonarnego pola temperatur w obszarach ciała stałego.

Większość zadań rozwiązano przy różnych siatkach, aby uzyskać informacje dotyczące wpływu rozmieszczenia węzłów i sposobu interpolacji na uzyskane rezultaty. Rozwiązania zadań porównywane były każdorazowo z wynikami uzyskiwanymi metodami typu różnicowego, korzystano tu z rozwiązań przedstawionych przez różnych autorów [20, 23], bądź z prac własnych.

Obliczanie prowadzone były na EMC ZAM 41, przy pomocy standartowych programów.

6.1. Ustalone przewodzenie ciepła w ciałach stałych bez źródeł wewnętrznych

Opisaną w pracy metodę zastosowano do wyznaczenia rozkładu temperatur w betonowej płycie grzejnej pokazanej na rys. 9. Temperatury czynnika grzejnego wynosi tg, temperatura otoczenia t_o. Założono, że temperatura na granicy obszaru płyty jest równa temperaturze płynu grzejnego (I warunek brzegowy).

Przepływ ciepła do otoczenia określony jest warunkiem III rodzaju, zaś w płaszczyznach symetrii płyty mamy $\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0$. Współczynnik wnikania $\alpha = 11,6$ $W/m^2 deg$, współczynnik przewodzenia $\lambda = 0,8$ W/m deg, tg = 100^oC, $t_o = 20^oC$.

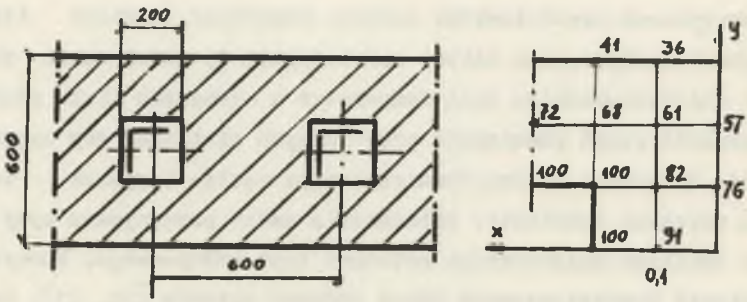
Wielomiany interpolacyjne dla przyjętych przekrojów pola temperatur:

$$\vartheta(x)\Big|_{y=0,1} = a_{01} + a_{11}x + a_{21}x^2$$

$$\vartheta(x)\Big|_{y=0,2} = a_{02} + a_{12}x + a_{22}x^2 + a_{32}x^3$$

$$\vartheta(y)\Big|_{x=0,1} = b_{10} + b_{11}y + b_{12}y^2 + b_{13}y^3$$

$$\vartheta(y)\Big|_{x=0,2} = b_{20} + b_{21}y + b_{22}y^2$$



Rys. 9. Rozkład temperatur w płycie grzejnej przy 14 węzłach

Niżej podano przykłady równań warunkowych.

a) równania ciągłości pola temperatur:

dla x = 0,1 y = 0,1

$b_{10} + 0,1\ b_{11} + 0,01\ b_{12} + 0,001\ b_{13} - a_{01} - 0,1\ a_{11} = 0,01\ a_{21} = 0$

.....

.....

b) równanie Laplace'a:

dla x = 0,1 y = 0,1

$2\ b_{12} + 0,6\ b_{13} - 2\ a_{21} = 0$

.....

.....

c) II warunek brzegowy:

dla x = 0,0 y = 0,1

$a_{11} = 0$

.....

.....

d) III warunek brzegowy:

dla $x = 0,1 \quad y = 0,3$

$$11,6\, b_{10} + 4,28\, b_{11} + 1,524\, b_{12} + 0,5292\, b_{13} = 0$$

.....

.....

e) I warunek brzegowy

dla $x = 0,2 \quad y = 0,1$

$$b_{20} + 0,1\, b_{21} + 0,01\, b_{22} = 100$$

Rozwiązanie układu równań:

$a_{01} = 75,7 \quad a_{11} = 0,0 \quad a_{21} = 608,0$

$a_{02} = 56,6 \quad a_{12} = 0,0 \quad a_{23} = 498,0 \quad a_{32} = -1107,0$

$b_{10} = 90,8 \quad b_{11} = 0,0 \quad b_{12} = -1051,0 \quad b_{13} = 1474,0$

$b_{20} = 135,5 \quad b_{21} = -372,0 \quad b_{22} = 166,0$

Wartości temperatur w węzłach przedstawiono na rysunku 9.

Ten sam przykład obliczono powtórnie przyjmując dodatkowo dwie wartwice w pobliżu brzegu obszaru (rys. 10).

Rozwiązanie układu równań warunkowych dla zbioru wielomianów w postaci:

$$\vartheta(x)\Big|_{y=0,1} = a_{01} + a_{11}x + a_{21}x^2 + a_{31}x^3$$

$$\vartheta(x)\Big|_{y=0,2} = a_{02} + a_{12}x + a_{22}x^2 + a_{32}x^3 + a_{42}x^4$$

$$\vartheta(x)\Big|_{y=0,25} = a_{03} + a_{13}x + a_{23}x^2 + a_{33}x^3 + a_{43}x^4$$

$$\vartheta(y)\Big|_{x=0,05} = b_{10} + b_{11}y + b_{12}y^2 + b_{13}y^3 + b_{14}y^4$$

$$\vartheta(y)\Big|_{x=0,1} = b_{20} + b_{21}y + b_{22}y^2 + b_{23}y^3 + b_{23}y^4$$

$$\vartheta(y)\Big|_{x=0,2} = b_{30} + b_{31}y + b_{32}y^2 + b_{33}y^3$$

$a_{01} = 78,5$ $a_{11} = 0,0$ $a_{21} = 507,2$ $a_{31} = 150,2$

$a_{02} = 60,5$ $a_{12} = 0,0$ $a_{22} = 255,0$ $a_{32} = 166,0$ $a_{42} = -1833,0$

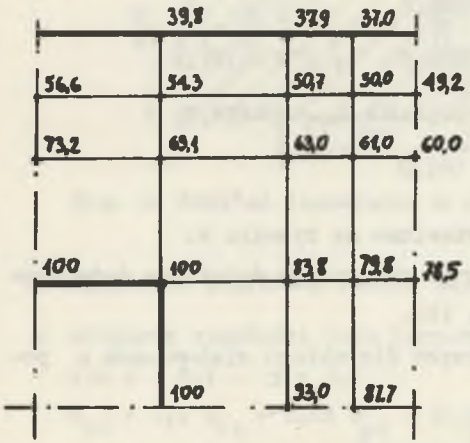
$a_{03} = 49,2$ $a_{13} = 0,0$ $a_{23} = 173,8$ $a_{33} = -68,0$ $a_{43} = -795,8$

$b_{10} = 87,7$ $b_{11} = 0,0$ $b_{12} = -934,0$ $b_{13} = 1548,0$ $b_{14} = -1000,0$

$b_{20} = 93,0$ $b_{21} = 0,0$ $b_{22} = -1147,7$ $b_{23} = 2381,6$ $b_{24} = -1984,5$

$b_{30} = 133,7$ $b_{31} = -354,8$ $b_{32} = 193,4$ $b_{33} = -180,6$

Pole temperatur przedstawiono na rysunku 10.



Rys. 10. Rozkład temperatur w płycie podział zagęszczony

Największe różnice między wartościami funkcji obliczonymi wg wariantu 1 i 2 występują na brzegu obszaru, przy czym maksymalna odchyłka wynosi ~ 4%.

Wprowadzenie dodatkowych warstwic zwiększyło blisko dwukrotnie rząd rozwiązywanego układu równań, zaś różnice między wartościami funkcji we wspólnych dla obu obszarów węzłach są niewielkie.

Prawidłowość taka wystąpiła również przy rozwiązywaniu innych zadań ze stacjonarnego przepływu ciepła, skąd można wnioskować, że wystarczającą dokładność uzyskuje się już przy stosunkowo rzadkim podziale siatkowym (interpolacja wielomianami stopnia II lub III).

Rozwiązanie omawianego zadania metodą różnicową przy skoku $\Delta x = \Delta y = 0,05$ m (40 węzłów) dało rozkład temperatury zgodny z rozwiązaniem przedstawionym na rysunku 10 z dokładnością do ok. 1%.

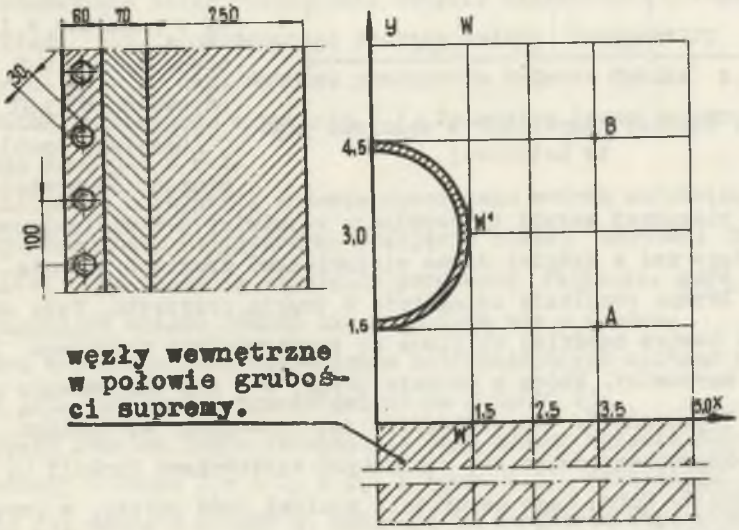
6.2. Ustalone przewodzenie ciepła z warunkiem brzegowym IV rodzaju

Ilustracją tego wariantu metody warstwicowej jest obliczenie rozkładu temperatur w płycie grzejnej zabudowanej w zewnętrznej ścianie budynku (np. 11).

Do obliczeń przyjęto:

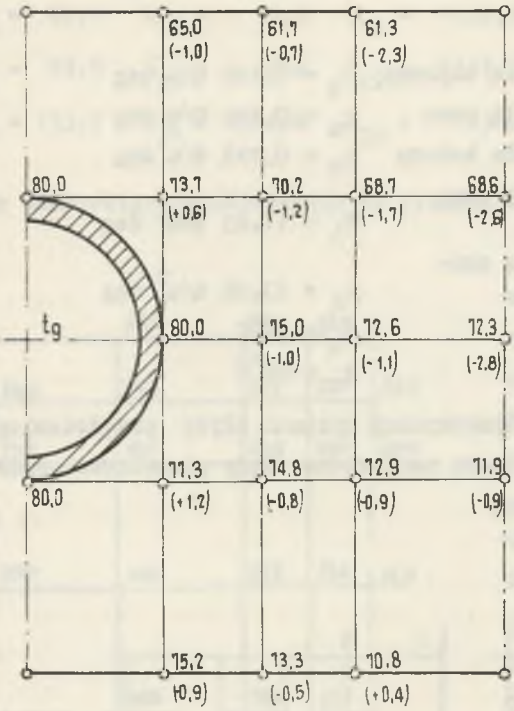
współczynnik przewodzenia ciepła supremy	λ_s = 0,105 W/m deg
współczynnik przewodzenia ciepła muru	λ_m = 0,704 W/m deg
współczynnik przewodzenia ciepła betonu	λ_b = 0,756 W/m deg
współczynnik wnikania ciepła na wewnętrznej powierzchni płyty	α_1 = 11,63 W/m^2 deg
współczynnik wnikania ciepła na zewnętrznej powierzchni ściany	α_2 = 23,26 W/m^2 deg
temperatura wnętrza	t_w = 20°C
temperatura na zewnątrz	t_z = -20°C

Obszarem siatkowym pokryto symetryczny wycinek płyty przedstawiony na rysunku 11. Na tym samym rysunku naniesiono ślady płaszczyzn wyróżniających odpowiednie warstwice.



Rys. 11. Płyta grzejna i podział różnicowy obszaru niejednorodnego

Założono, że w obszarze muru izotermy są równoległe do zewnętrznej powierzchni ściany i tą część układu potraktowano jako dodatkowy opór cieplny R_m na drodze strumienia cieplnego.



Rys. 12. Rozkład temperatur w obszarze płyty betonowej

Wartości współczynników wielomianów interpolacyjnych (w obszarze płyty betonowej) zebrano w tablicy 1.

Na rysunku 12 przedstawiono otrzymane wyniki. Liczby w nawiasach oznaczają różnice między obliczonymi wartościami funkcji, a rozwiązaniem różnicowym (50 węzłów) przedstawionym w pracy [23]. Rozwiązanie tego samego przykładu metodą Monte - Carlo, przedstawiono w [15]. Dla porównania temperatury w punktach A i B obliczone metodą M-C wynoszą odpowiednio 73,8°C i 69,0°C.

Omawiany problem rozwiązano dwukrotnie, przyjmując w pierwszej wersji interpolację warstwicy W-W wielomianem stopnia piątego zaś w drugiej dwoma wielomianami drugiego stopnia. Zdecydowanie lepsze rezultaty osiągnięto w drugim przypadku. Taka aproksymacja jest bowiem bardziej zbliżona do rzeczywistego przebiegu interpolowanej warstwicy, która w punkcie styku W' obu wielomianów nie ma ciągłej I pochodnej. Rozwiązanie z zastosowaniem wielomianu stopnia piątego charakteryzowało się zaniżonymi wartościami funkcji na brzegu w punktach W. Wpływ tego zaburzenia zanikał dość szybko; w przekrojach $x \geqslant 3,5$ wartości temperatur niewiele różniły się od rozwiązania przedstawionego na rysunku 12.

Tablica 1

Wartości współczynników wielomianów dla obszaru betonu w płycie niejednorodnej

	Współczynniki przy kolejnych potęgach				
	0	1	2	3	4
x = 1,5g	75,2	1,17	0,044		
x = 1,5d	85,7	-0,39	-0,510		
x = 2,5	73,3	-0,41	1,077	-0,576	0,042
x = 3,5	70,8	1,62	0,033	-0,160	0,011
x = 1,5	80,0	-0,40	-1,420	0,357	-0,024
x = 3,0	93,8	-12,20	2,230	-0,134	
y = 4,5	80,0	-3,29	-1,310	0,555	-0,054

6.3. Nieustalone przewodzenie ciepła w ciałach bez źródeł wewnętrznych

Przedstawione niżej rozwiązanie dotyczy nagrzewania betonowej płyty z przykładu 6.1. spowodowanego skokową zmianą temperatury czynnika grzejnego Δt = 30 deg. Warunek początkowy zadania wynika z rozkładu temperatur obliczonego w punkcie 6.1. Parametry termofizyczne procesu są takie same jak w 6.1.

W pierwszej kolejności zadanie rozwiązano metodą warstwicową z wędrującym warunkiem początkowym. Przyjęcie stałej wartości interwału czasu $\Delta\tau$ = 1800s znacznie uprościło procedurę obliczeń, gdyż macierz współczynników układu równań nie zmieniała się w czasie.
Wartości współczynników wielomianów interpolujących zebrano w tablicy 2, zaś pole temperatur przedstawiono na rysunku 13.

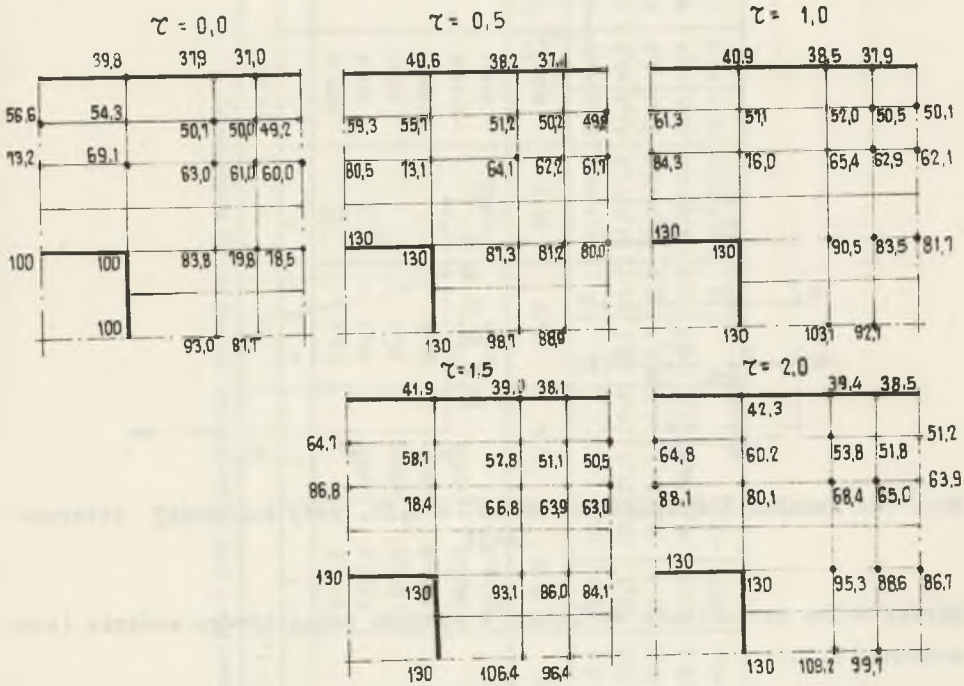
Podjęto również próbę rozwiązania tego samego zadania dla siatki kwadratowej o skoku $\Delta x = \Delta y$ = 0,1 m (por. 6.1). Obliczenia przeprowadzone dla węzła τ = 1800 s, wskazują na przyjęcie zbyt niskich stopni wielomianów interpolujących. Pole temperatur, które przedstawiono na rysunku 14, niewiele odbiega wewnątrz obszaru od rozwiązania dla

Tablica 2

Wartości współczynników wielomianów dla metody z wędrującym warunkiem początkowym

	$\tau = 0,5$					$\tau = 1,0$				
	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
y=0,10	80,0		210,0	5194,0		81,7		548,1	3295,4	
y=0,20	61,7		58,1	2408,0	-6342	62,1		184,1	2059,0	-6170
y=0,25	49,8		76,9	891,2	-2655	50,1		130,9	782,2	-2683
x=0,05	88,9		- 874,0	1026,0	- 58	92,7		-1123,9	2225,3	-1705
x=0,10	98,7		-1491,0	3895,0	-3890,0	103,1		-1665,0	4526,5	-4551
x=0,20	241,6	-1491,7	4253,0	- 5047,8		219,8	-1134	2632,3	-2801,0	
	$\tau = 1,5$					$\tau = 2,0$				
	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
y=0,10	84,1		661,4	2432,8		86,7		629,3	2267,2	
y=0,20	63,0		269,0	1734,3	-5830	63,9		400,5	913,5	-4509
y=0,25	50,5		213,9	375,9	-2128	51,2		240,0	352,7	-2215
x=0,05	96,4		-1299,5	2940,0	-2554	99,7		-1433,8	3462,8	-3171
x=0,10	106,4		-1768,5	4862,1	-4876	108,2		-1654,5	3968,2	-3330
x=0,20	205,9	-908,7	1646,4	-1466,3		197,6	-781,9	1140,6	-800,0	

siatki zagęszczonej, natomiast błędy na brzegu są znaczne (temperatura zamiast rosnąć maleje). Taki rozkład błędu wynika z jakościowego przebiegu funkcji kwadratowej. Przykładowo w przekroju W_1 W_2 położenie punktu W_1 było zdeterminowane warunkiem I rodzaju, punkt W' był mocno uwarunkowany, zaś w punkcie W_2 zadana była jedynie zerowa wartość po-

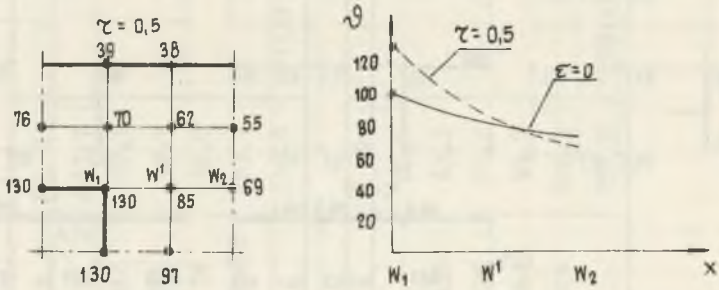


Rys. 13. Nieustalone pole temperatur w płycie grzejnej

chodnej (wierzchołek paraboli), w związku z czym wobec małego przyrostu temperatury w punkcie W', wartość funkcji w węźle W_2 musiała się zmniejszyć. Otrzymany wynik był więc bezpośrednim potwierdzeniem tezy o konieczności zagęszczania węzłów w pobliżu brzegu, w celu zmniejszenia błędów wynikających z niejednorodności pola temperatur przy obliczeniach stanów niestacjonarnych.

Rozkład temperatur w betonowej płycie grzejnej przy skokowej zmianie temperatury czynnika obliczono również metodą warstwicową dla równania Fouriera. Zmienność temperatury nad poszczególnymi punktami obszaru Ω interpolowano wielomianami stopnia trzeciego:

$$\vartheta(\tau)\Big|_{\substack{x=x_i\\ y=y_j}} = \sum_{k=0}^{3} c_{ijk}\tau^k$$



Rys. 14. Rozkład temperatur w chwili τ = 0,5h, przy zaniżonej interpolacji

Wyrazy wolne wielomianów obliczono z warunku początkowego zadania (rozwiązanie 6.1.):

$$c_{ij0} = \vartheta(x_i y_j)\Big|_{\tau=0}$$

Do interpolacji wielomianami $\vartheta(\tau)$ przyjęto węzły o wartościach τ_0 = 0 τ_1 = 1800 τ_2 = 3600 τ_3 = 5400 sekund.

W tablicy 3 zebrano wartości współczynników interpolujących pole temperatur dla węzłów τ_2 = 3600s i τ_3 = 5400s. Wartości funkcji dla τ_1 = = 1800s nieznacznie różniły się od obliczonych poprzednio.

Tablica 3

Wartości współczynników i pole temperatur dla ogólnej metody warstwicowej

	$\tau = 1,0$										$\tau = 1,5$									
	0		1		2		3		4		0		1		2		3		4	
y = 0,10	80,7				749,8		2412,5				82,1				1027,6		849,4			
y = 0,20	61,9				217,5		1923,0		-6017		62,3				371,0		1183,0		-5019	
y = 0,25	50,0				188,0		331,5		-1873		50,1				320,0		-742,0		772	
x = 0,05	91,7				-1057,4		1915,0		-1291		94,4				-1181,5		2401,6		-1845	
x = 0,10	103,5				-1716,6		4826,7		-5019		106,4				-1733,8		4566,0		-4301	
x = 0,20	214,3		-1036,6		214,6		-2055,0				184,9		-535,0		- 293,4		1557,6			
y / x	0,00		0,10		0,20		0,25		0,30		0,00		0,10		0,20		0,25		0,30	
0,00			80,7	-1,0	61,9	-0,2	50,0	-0,1					82,1	-2,0	62,3	-0,7	50,1	-0,4		
0,05	91,7	-1,0	82,9	-0,6	62,6	-0,3	50,4	-0,1	37,7	-0,2	94,4	-2,0	84,8	-1,2	63,3	-0,6	50,8	-0,3	38,0	-0,1
0,10	103,5	+0,4	90,6	+0,1	65,4	+0,0	52,0	+0,0	38,6	+0,1	106,4	+0,0	93,2	+0,1	66,6	-0,2	52,7	-0,1	38,9	-0,1
0,20	130,0	+0,0	130,0	+0,0	76,4	+0,4	57,2	+0,1	40,9	+0,0	130,0	+0,0	130,0	+0,0	28,5	+0,1	58,2	-0,6	41,9	+0,0
0,30			130,0	+0,0	84,7	+0,3	60,6	-0,7					130,0	+0,0	86,8	+0,0	65,1	+0,4		

W tej samej tablicy przedstawiono wartości temperatur dla węzłów τ_2 i τ_3 oraz różnice między wartościami obliczonymi ogólną metodą interpolacji i metodą z wędrującym warunkiem początkowym.

Zgodnie z przewidywaniami różnice między wartościami funkcji obliczonymi przy pomocy obu metod zwiększają się (w sensie normy) ze wzrostem czasu. Wydaje się jednak, że metoda z wędrującym warunkiem początkowym jest wystarczająco dokładna, zaś ze względu na znaczne obniżenie rzędu macierzy współczynników bardziej przydatna do obliczeń pól niestacjonarnych.

6.4. Nieustalony przepływ ciepła w nieskończonej płycie

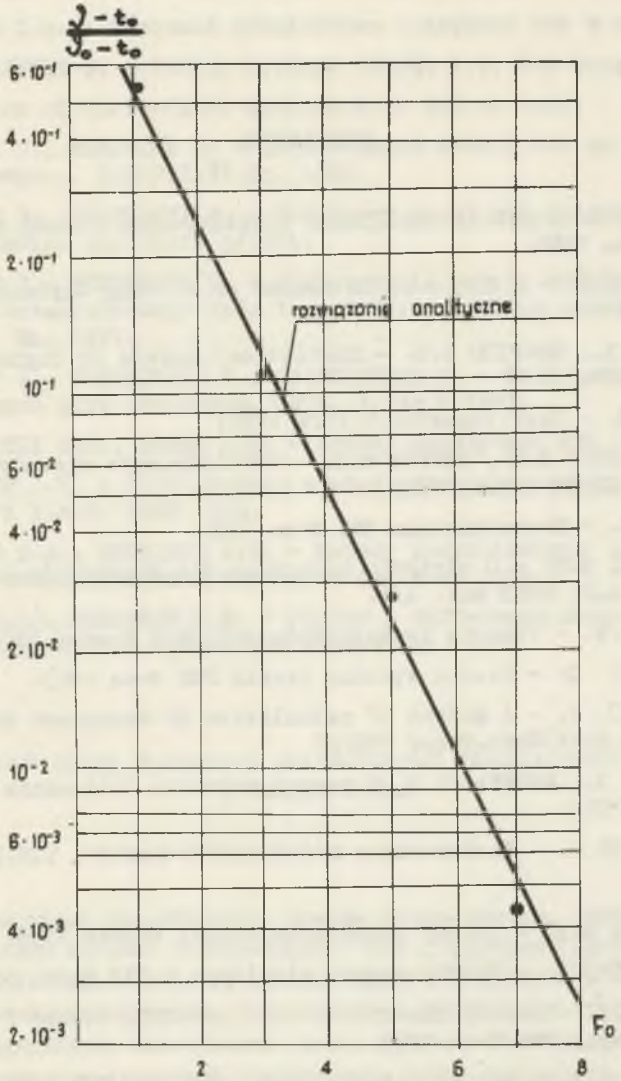
Zadanie dotyczące nieustalonego przepływu ciepła w nieskończonej płycie, rozwiązano interpolując wartości temperatur w przekroju płyty wielomianami stopnia 3:

$$\vartheta(x)\Big|_{\tau=\tau_k} = a_{0k} + a_{1k}\,x + a_{2k}\,x^2 + a_{3k}\,x^3$$

zaś zmienność temperatury w węzłach wielomianami stopnia 4:

$$\vartheta(\tau)\Big|_{x=x_i} = c_{i0} + c_{i1}\tau + c_{i2}\tau^2 + c_{i3}\tau^3$$

Do obliczeń przyjęto płytę o grubości $L/2 = 1$, węzły wzdłuż płyty rozmieszczono w odległościach $\Delta x = 1/3$.
Węzły dla zmiennej τ odpowiadały wartościom liczb Fouriera 0, 1, 3, 5, 7. Warunek brzegowy III rodzaju determinował wartość liczby Biota - Bi = 1.
Rozwiązanie zadania porównano z rozwiązaniem analitycznym przedstawionym w postaci wykresu dotyczącego zmienności zredukowanej temperatury w osi płyty [18]. Rozwiązanie analityczne i rozwiązanie przybliżone przedstawiono na rysunku 15.



Rys. 15. Rozwiązanie analityczne i numeryczne nieustalonego przepływu ciepła w nieskończonej płycie

LITERATURA

[1] COLLATZ L. - Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych PWN W-wa 1960.

[2] YOWELL E.C. - A Monte-Carlo method of solving Laplace's equation IBM 1951.

[3] HAHN G.I., SHAPIRO S.S. - Statistical models in Engineering I.W. ands 1967.

[4] JACOB M. - Heat transfer N.York 1957.

[5] KANTOROWICZ L.W., KRYŁOW W.I. - Pribliżennyje mietody wyższewo analiza GITTL Moskwa 1949.

[6] KĄCKI E. - Termokinetyka WNT W-wa 1967.

[7] KIBŁDYSZ M.W. - O mietodie Galerkina dla rieszenija krajewych zadacz I.A.N. SSSR Mat. 4/6.

[8] ŁYKOW A.W. - Tieoria tepłoprowodnosti GNTI Moskwa 1966.

[9] MADEJSKI J. - Teoria wymiany ciepła PWN W-wa 1963.

[10] MADEJSKI J. - A method of calculation of trancient heatconduction process Arch.Mech.Stos. 1962/4

[11] MARSZAŁ J., MOCHNACKI B. O pewnej metodzie obliczania... Z.N.Pol. Śl.En. 1971.

[12] MOCHNACKI B. - Zastosowanie metody Monte-Carlo.. Z.N.Pol.Śl.En. 1971.

[13] MICHEJEW M.A. - Osnowy tiepłopieriedaczi Moskwa 1956.

[14] OCHĘDUSZKO S. - Teoria maszyn cieplnych t.III W-wa 1955.

[15] PANOW D.J. - Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych PWN W-wa 1955.

[16] POŁOŻNY G.N. - Metody przybliżonych obliczeń WNT W-wa 1967.

[17] PIETROW G.J. - Primiennienije mietoda Galerkina...Prikładnaja matiematika T.IV 8/1949.

[18] Praca zbiorowa - Matematyka T. "O" W-wa 1971.

[19] ROSENBERG D. - Methods for the numerical solution of partial differential equations. N.York 1969.

[20] ROZEWICZ J. - Zastosowanie metody Monte-Carlo do zagadnień przewodzenia ciepła. Z.N.Pol.Śl. En. praca hab.

[21] SAWYER A. - Modele matematyczne a rzeczywistość PWN W-wa 1968.

[22] SNEDDON I.N. - Równania różniczkowe cząstkowe PWN W-wa 1963.

[23] STANISZEWSKI B. - Teoria wymiany ciepła t.I. PWN W-wa 1963.

[24] Symposium of Monte-Carlo Methods J.W. and.s. 1956.

[25] SZARGUT J., ROZEWICZ J. - Zastosowanie metody M-C do II warunku brzegowego... Z.N.Pol.Śl.En. 1966.

[26] SZARGUT J., MOCHNACKI B. - Różnicowy model matematyczny procesu krzepnięcia. Arch.Hut. 3/1971.

[27] SZARGUT J., MOCHNACKI B. - Zastosowanie metody różnicowej do obliczeń niestacjonarnego pola temperatur w ciekłym ośrodku... Z.N. Pol.Śl. En. 1971.

[28] SZARGUT J., MIERWIŃSKI S., GARWOLIŃSKI E. - Obliczanie wydajności betonowych płyt grzejnych, GWTS, 11 nr 5 1957.

[29] DEMIDOWICZ B.P., MARON I.A. - Metody numeryczne PWN 1965.

[30] WANICZEW A.P. - Priblizennyj mietod rieszenija zadacz tiepłoprowodnosti I.A.N. SSSR 1946.

[31] MICHLIN S.G., SMELICKI G.L. - Metody przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych PWN W-wa 1970.

[32] WASOW W.R., FORSYTHE G.E. - Finite - difference method for partial differential equations, John Wiley 1959.

НОВЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Р е з ю м е

Излагаются общие теоретические основы нового метода, названного методом интерполяции сечений температурного поля. Приведены способы использования метода для приближенного решения задач стационарного и нестационарного режима теплопроводности, при различных краевых условиях. Рассмотрены системы с внутренними источниками тепла. Исследованы твёрдые тела отличающиеся переменной величиной коэффициента теплопроводности, а также неодиродной структурой.

Представлен вариант общего метода - особенно пригодный к вычислениям нестационарных режимов, названный методом с движущимся начальным условием.

Отмечены положительные особенности и недостатки приложения метода к рассматриваемым вопросам и приведены численные примеры определения температурных полей в теплотехнических устройствах.

A NEW NUMERICAL METHOD OF MODELING
OF TEMPERATURE FIELD IN SOLID BODIES

S u m m a r y

Paper presents theoretical base of the new numerical method, called interpolation method for temperatur field section. There are presented the examples of utilization of the method in approximate solution of steady and unsteady heat transfer problems, when arbitrary boundary and initial conditions are given. There are considered the areas with internal heat sources, not uniform areas and the bodies with variable values of physical properties.

Also is presented the variant of general method, particulary useful for computations of unsteady processes, called the method with wandering initial condition.

At the end, advantages and defects of method are discussed, advices for practical application of the method are given and some numerical examples are solved.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
ukazują się w następujących seriach:

A. AUTOMATYKA
B. BUDOWNICTWO
Ch. CHEMIA
E. ELEKTRYKA
En. ENERGETYKA
G. GÓRNICTWO
IS. INŻYNIERIA SANITARNA
JO. JĘZYKI OBCE
MF. MATEMATYKA-FIZYKA
M. MECHANIKA
NS. NAUKI SPOŁECZNE

Dotychczas ukazały się następujące zeszyty
z serii En.:

Energetyka z. 1, 1956 r., s. 174, zł 26,—
Energetyka z. 2, 1957 r., s. 118, zł 24,—
Energetyka z. 3, 1959 r., s. 62, zł 7,—
Energetyka z. 4, 1960 r., s. 113, zł 22,80
Energetyka z. 5, 1961 r., s. 103, zł 16,25
Energetyka z. 6, 1961 r., s. 55. zl 4,15
Energetyka z. 7, 1961 r., s. 60, zł 5.50
Energetyka z. 8, 1961 r., s. 50, zł 3,70
Energetyka z. 9, 1962 r., s. 127, zł 9,55
Energetyka z. 10, 1962 r., s. 73, zł 5,50
Energetyka z. 11, 1963 r., s. 178, zł 9,30
Energetyka z. 12, 1964 r., s. 89, zł 4,65
Energetyka z. 13, 1964 r., s. 109, zł 8,10
Energetyka z. 14, 1964 r., s. 104, zł 8,15
Energetyka z. 15, 1964 r., s. 69, zł 4,65
Energetyka z. 16, 1964 r., s. 149, zł 7,50
Energetyka z. 17, 1964 r., s. 152, zł 7,10
Energetyka z. 18, 1965 r., s. 128, zł 6,40
Energetyka z. 19, 1965 r., s. 92, zł 6,—
Energetyka z. 20, 1965 r., s. 90, zł 4,70
Energetyka z. 21. 1966 r., s. 120, zł 8,—
Energetyka z. 22. 1966 r., s. 111, zł 6,—
Energetyka z. 23, 1966 r., s. 64, zł 5,—
Energetyka z. 24, 1967 r., s. 100, zł 5,—
Energetyka z. 25, 1967 r., s. 176, zł 10,—
Energetyka z. 26, 1967 r., s. 106, zł 6,—
Energetyka z. 27, 1967 r., s. 132, zł 8,—
Energetyka z. 28, 1968 r , s. 239, zł 13,—
Energetyka z. 29, 1968 r., s. 191, zł 10,—
Energetyka z. 30, 1969 r., s. 129, zł 7,—
Energetyka z. 31, 1969 r., s 171, zł 8,50
Energetyka z. 32, 1969 r., s. 90, zł 4,50
Energetyka z. 33, 1969 r., s. 97, zł 5,50
Energetyka z. 34, 1970 r , s. 354, zł 14,50
Energetyka z. 35, 1970 r., s. 169, zł 10,50
Energetyka z. 36, 1970 r., s, 134, zł 8,—
Energetyka z. 37, 1970 r., s. 107, zł 6,—
Energetyka z. 38, 1971 r., s. 102, zł 7,—
Energetyka z. 39, 1971 r., s., 122 zł 8,—
Energetyka z. 40, 1971 r., s., 118 zł 8,—

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
P 3349 | 71