

Jan BĄK

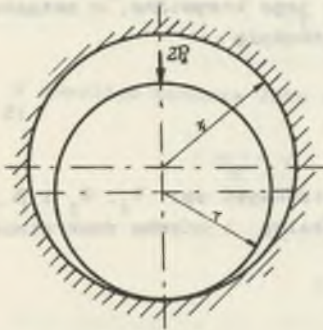
## OKREŚLENIE PODPORNOCI METALOWEJ OBUDOWY KOŁOWEJ Z ŁUKÓW SZTYWNYCH OBCIĄŻONEJ SIŁAMI SKUPIONYMI JAKO FUNKCJI JEJ ODKSZTAŁCALNOŚCI

**Streszczenie.** W pracy przeprowadzono analizę wytrzymałościową metalowej obudowy kołowej sztywnej dla określenia jej podporności przy obciążeniu siłami skupionymi. W rozważaniach uwzględniono ograniczoną odkształcalność górotworu i wykładki, a więc i obudowy, przez przyjęcie modelu, w którym odrzwie obudowy współpracuje z górotworem nieodkształcalnym o większym promieniu.

### 1. Wprowadzenie

W pracy [3] podano zakres możliwych dopuszczalnych obciążeń metalowej obudowy kołowej sztywnej obciążonej siłami skupionymi  $2P_2$ , przy czym wyznaczono jej górną granicę  $2P$  dla przypadku, gdy odkształcalność górotworu można praktycznie pominąć oraz jej dolną granicę  $2P_1$ , gdy obudowę potraktowano jako wolno stojącą. W wyniku rozważań otrzymano przedział wartości obciążenia:

$$P_1 \leq P_2 \leq P$$

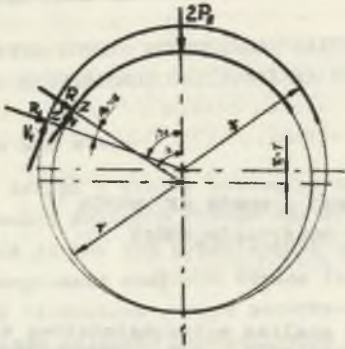


Rys. 1. Model pracy odrzwia obudowy w wyrobisku

W niniejszej pracy poczyniono próbę uchwycenia odkształcalności wykładki i górotworu, który współpracując z obudową odkształca się do wartości promienia  $r_1$  i staje się dostatecznie nieodkształcalny. Dopuszczalne obciążenie skupione  $2P_2$  uzależniono od wartości odkształcalności górotworu i obudowy przyjmując model, w którym odrzwia obudowy o promieniu  $r$  umieszczono w górotworze nieodkształcalnym o większym promieniu wynoszącym  $r_1$  (rys. 1).

### 2. Analiza wytrzymałościowa łuku obciążonego siłą skupioną

Pod wpływem obciążenia pierścien obudowy ulega odkształceniu, w wyniku którego punkt  $Z$  pierścienia przemieści się w położenie  $Z'$ . Promień łączący punkt  $Z$  ze środkiem pierścienia nachylony jest do pionu pod kątem  $\beta$  zaś promień łączący punkt  $Z'$  ze środkiem otworu nachylony jest do pionu pod kątem  $\beta_1$  (rys. 2).



Rys. 2. Odrzwie przed i po odkształceniu

lub

Celem określenia sił wewnętrznych działających w łuku, rozpatrywany pierścień przecięto, dzieląc go na dwa łuki, jeden, który po odkształceniu styka się z górotworem oraz drugi obciążony siłą  $2P_2$ . Łuk górny, którego równowagę rozpatrzono, pokazano na rys. 3, przy czym składowe siły wewnętrznych poprzeczną i podłużną nazwano  $R, V$  (składowe dla położenia nieodkształconego) i  $R_1, V_1$  (składowe dla położenia odkształconego).

Warunki równowagi mają postać

$$P_2 + R \cos \beta - V \sin \beta = 0 \quad (1)$$

$$P_2 + R_1 \cos \beta_1 - V_1 \sin \beta_1 = 0 \quad (2)$$

Zależności pomiędzy poszczególnymi składowymi wynoszą:

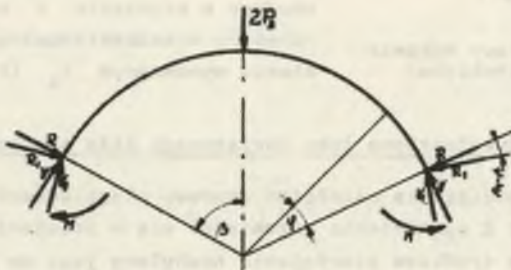
$$V = V_1 \cos(\beta_1 - \beta) + R_1 \sin(\beta_1 - \beta) \quad (3)$$

$$R = R_1 \cos(\beta_1 - \beta) - V_1 \sin(\beta_1 - \beta) \quad (4)$$

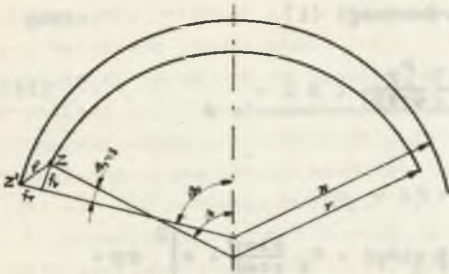
W wyniku obciążeń łuku siłą  $2P_2$  zmieniła się jego krzywizna, w związku z czym moment zginający  $M$  określony jest zależnością

$$M = E I \frac{r_1 - r}{r r_1} \quad (5)$$

Ostatecznie w rozpatrywanym zagadnieniu niewiadomymi są:  $V_1, R_1$  i  $\beta$ . Układ jest więc dwukrotnie statycznie niewyznaczalny i trzeba dwukrotnie stosować twierdzenie Castigliano.



Rys. 3. Schemat obliczeniowy



Rys. 4. Schemat przemieszczeń

Uogólnione przemieszczenia składowe określono na podstawie znanych położenia punktu Z przed i po odkształceniu Z' (rys. 4). Twierdzenie Castigliano zastosowano dla siły  $V_1$  i momentu M

$$\frac{\partial U}{\partial V_1} = -fv \tag{6}$$

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \theta \tag{7}$$

gdzie:

$$fv = r \sin(\beta_1 - \beta) - (r_1 - r) \sin \beta_1 \tag{8}$$

$$\theta = \beta - \beta_1 \tag{9}$$

Kąty  $\beta_1$  i  $\beta$  związane są ze sobą następującą zależnością

$$(\pi - \beta) r = (\pi - \beta_1) r_1 - \frac{(\pi - \beta) V \cdot r}{ES}$$

skąd

$$\beta_1 = \pi - \frac{(\pi - \beta) r}{r_1} \left(1 - \frac{V}{ES}\right) \tag{10}$$

W dowolnym punkcie łuku możemy napisać wartości sił wewnętrznych:

$$M_g = V \cdot r(1 - \cos\varphi) - R \cdot r \sin\varphi + M$$

$$T = V \sin\varphi - R \cos\varphi \tag{11}$$

$$N = V \cos\varphi - R \sin\varphi$$

dla  $0 \leq \varphi \leq \beta$ .

Energia sprężysta rozpatrywanego układu jest równa sumie energii wszystkich sił wewnętrznych i wynosi:

$$U = \frac{2}{2EI} \int_0^\beta M_g^2 r d\varphi + \frac{1}{2ES} \int_0^\beta N^2 r d\varphi + \frac{\beta T}{2GS} \int_0^\beta T^2 r d\varphi \tag{12}$$

Po podstawieniu do równań (11)

$$\frac{1}{r} M = m \tag{13}$$



oraz zależności wynikającej z warunku równowagi (1)

$$R = V \operatorname{tg} \beta - \frac{P_2}{\cos \beta} \quad (14)$$

otrzymano wzór na energię sprężystości

$$\begin{aligned} \frac{2}{r^3} \frac{E J}{3} U &= \int_0^\beta \left[ V(1 - \cos \varphi - \operatorname{tg} \beta \sin \varphi) + P_2 \frac{\sin \varphi}{\cos \beta} + m \right]^2 d\varphi + \\ &+ C \int_0^\beta \left[ -V(\cos \varphi + \operatorname{tg} \beta \sin \varphi) + P_2 \frac{\sin \varphi}{\cos \beta} \right]^2 d\varphi + C_1 \int_0^\beta \left[ V \sin \varphi + \right. \\ &\left. + \operatorname{tg} \beta \cos \varphi + P_2 \frac{\cos \varphi}{\cos \beta} \right]^2 d\varphi \quad (15) \end{aligned}$$

gdzie:

$$C = \frac{n I}{S \cdot r^2} \quad (16)$$

$$C_1 = \frac{\beta I E}{G S \cdot r^2}$$

Po scałkowaniu i podstawieniu zależności jak w pracy [3]  $C_1 = 3 C$  otrzymano po przekształceniach wzór na energię sprężystości:

$$\begin{aligned} U &= \frac{r^3}{2EI} \left\{ V^2 \left( \frac{3}{2} \beta + \frac{\beta}{2} \operatorname{tg}^2 \beta - \frac{3}{2} \operatorname{tg} \beta \right) + \frac{P_2^2}{\cos^2 \beta} \left( \frac{\beta}{2} + \right. \right. \\ &- \frac{1}{2} \sin \beta \cos \beta \left. \right) + m^2 \beta + \frac{2VP}{\cos \beta} \left( 1 - \cos \beta - \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \beta \right) + \\ &+ 2 V m (\beta - \operatorname{tg} \beta) + \frac{2P_2 m}{\cos \beta} \left( 1 - \cos \beta \right) + C \left[ V^2 (2\beta + 2\beta \operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg} \beta) + \right. \\ &\left. - 4 \frac{P_2 V}{\cos \beta} \beta \operatorname{tg} \beta + \frac{P_2^2}{\cos^2 \beta} (2\beta + \sin \beta \cos \beta) \right] \quad (17) \end{aligned}$$

Stosując twierdzenie Castigliano (6) po przekształceniach otrzymano:

$$V = \frac{1}{a_2} (k - e_1 m - g_2 P_2) \quad (18)$$

gdzie:

$$k = \frac{-2 E I \cos \beta_1 \left[ \sin(\beta_1 - \beta) - \left( \frac{r_1}{r} - 1 \right) \cos \beta_1 \right]}{r^2 \cos \beta}$$

$$b_1 = 3\beta + \beta \operatorname{tg}^2 \beta - 3 \operatorname{tg} \beta$$

$$e_1 = 2(\beta - \operatorname{tg} \beta)$$

$$d_1 = \beta + \beta \operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg} \beta$$

19

$$g_1 = \beta + \beta \operatorname{tg}^2 \beta$$

$$g_2 = \frac{1}{\cos \beta} \left[ 2(1 - \cos \beta) - \beta \operatorname{tg} \beta (1 + 4 C) \right]$$

$$a_2 = b_1 + 2 C (d_1 + g_1)$$

Po podstawieniu do wzoru (17) uzyskanego wzoru na  $V$  (18) i stosując zasadę Castigliano (7), otrzymano po przekształceniach:

$$\beta - \beta_1 = \frac{r^2}{2 E I} (m e_2 + P_2 e_3) \quad (20)$$

gdzie:

$$e_2 = \frac{1}{a_2} 2(\beta a_2 - e_1^2)$$

$$e_3 = \frac{1}{a_2} (a_2 d_2 - e_1 g_1) \quad (21)$$

$$d_2 = 2 \cdot \frac{1 - \cos \beta}{\cos \beta}$$

skąd po podstawieniu z równania (5) zależności:

$$m = E I \frac{r_1 - r}{r_1 r^2} \quad (22)$$

otrzymano ostatecznie wzór na  $P_2$

$$P_2 = \frac{E I \left[ e_1^2 (r_1 - r) - 2 a_2 (r_1 \beta_1 - r \beta) \right]}{r^2 r_1 (a_2 d_2 - e_1 g_2)} \quad (23)$$

### 3. Wyznaczanie obciążeń dopuszczalnych

Dla wyznaczenia obciążeń dopuszczalnych wyliczono ze wzorów (23), (18), (14) wartości  $P_2$ ,  $V$  i  $R$ . Aby wyznaczyć wartość  $P_2$  (23), która jest funkcją  $\beta_1$  (10), a ta z kolei funkcją  $V$ , rozwiązanie przeprowadzono drogą kolejnych przybliżeń. Dla dowolnych wartości promienia  $r$  wyznaczono szukane wartości  $P_2$ ,  $V$ ,  $R$  w zależności od kąta  $\beta$  oraz promienia  $r_1$ .

Przykładowo dla promienia  $r = 175$  cm, profilu G 110 i różnych promieni łuku sztywnego  $r_1 = 176, 177, 178, 179$  i  $180$  cm wyznaczono wartości  $P_2$ ,  $V$  i  $R$ , które zestawiono w tablicach 1, 2 i 3 oraz przedstawiono na wykresach (rys. 5, 6 i 7).

Tablica 1

Wartości  $P_2 = P_2(\beta)$  dla różnych promieni  $r_1$ 

Wartość $P_2$					
$r_1$ [cm]	176	177	178	179	180
$\beta$ [°]					
160	618	1235	1845	2448	3044
140	1165	2333	3489	4631	5761
120	2230	4477	6699	8896	11068
100	4350	8746	13077	17339	21555
80	8911	17718	26429	35045	43568
60	19778	39311	58641	77771	96705

Tablica 2

Wartości  $V = V(\beta)$  dla różnych promieni  $r_1$ 

Wartości $V$					
$r_1$ [cm]	176	177	178	179	180
$\beta$ [°]					
160	187	374	559	742	923
140	608	1219	1823	2421	3012
120	1566	3145	4707	6251	7777
100	3870	7782	11636	15428	19178
80	10069	20022	29868	39607	49241
60	29420	58499	87298	115822	144073

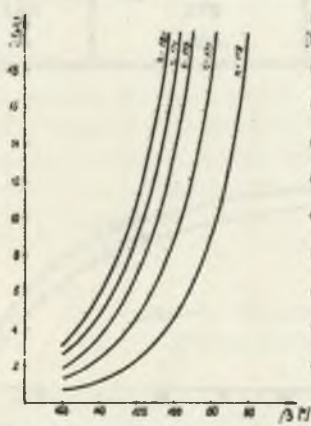
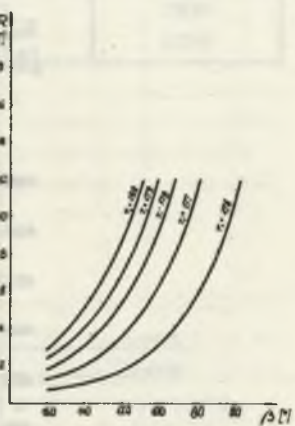
W celu wyznaczenia obciążenia dopuszczalnego wyznaczono naprężenia zredukowane

$$\sigma_{red} = \left| \frac{N}{S} \right| + \left| \frac{M_g}{W_g} \right| \leq k_r$$

Wartości  $R = R(\beta)$  dla różnych promieni  $r_1$ 

Tablica 3

Wartość R					
$r_1$ [cm] \ $\beta$ [°]	176	177	178	179	180
160	590	1178	1760	2335	2903
140	1011	2023	3025	4014	4993
120	1748	3407	5245	6965	8666
100	3103	6232	9316	12355	15366
80	5788	11516	17191	22806	28361
60	11401	22701	33922	45067	56132

Rys. 5. Wykres  $P_2 = P_2(\beta)$  dla różnych promieni  $r_1$ Rys. 6. Wykres  $V = V(\beta)$  dla różnych promieni  $r_1$ Rys. 7. Wykres  $R = R(\beta)$  dla różnych promieni  $r_1$ 

Z uwagi na duże wymiary odrzwi w stosunku do wymiarów poprzecznych przekroju łuku pominięto wpływ sił poprzecznych. W przekroju nachylonym względem osi pionowej odrzwi pod kątem  $\beta - \varphi$  (rys. 3) występują siły wewnętrzne:

$$M_g = V \cdot r(1 - \cos\varphi) - R r \sin\varphi + m r = r(V + N + m) \quad (25)$$

$$N = -(V \cos\varphi + R \sin\varphi) \quad (26)$$

przy czym  $0 < \varphi \leq \beta$

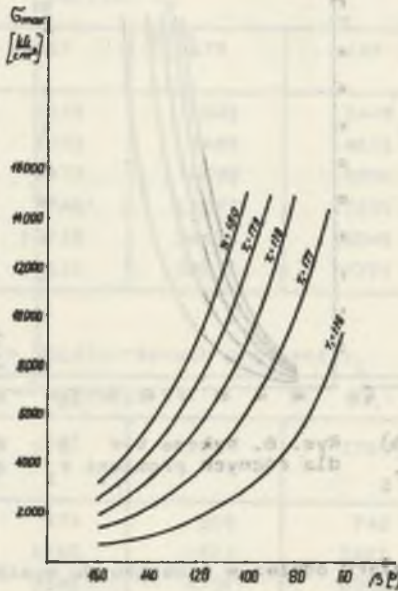
Korzystając z wyznaczonych wartości  $V$  i  $R$  wyznaczono w zależności od  $r_1$  i  $\beta$  wartości maksymalnych naprężeń zredukowanych, które zestawiono w tabelicy 4 oraz przedstawiono w formie wykresu na rys. 8 dla wszystkich wymienionych promieni  $r_1$ .



Tablica 4

Wartości naprężeń maksymalnych

		Wartości $ \sigma_c(\varphi)  +  \sigma_g(\varphi)  =  \sigma_{red}(\varphi) $				
$r_1$ [cm]		176	177	178	179	180
$\beta$ [°]						
160		653	1290	1927	2553	3190
140		1124	2190	3289	4368	5447
120		1815	3597	5454	7239	9007
100		2980	5989	8728	11871	14743
80		4924	10113	14992	19863	24682
60		9380	18605	27702	36660	45496



Rys. 8. Wykres naprężeń maksymalnych

Z rysunku 8 dla rozpatrywanych wielkości naprężenia dopuszczalnego  $k_r = 2000 \text{ kg/cm}^2$  oraz  $k_r = 3000 \text{ kg/cm}^2$  odczytano wartości kąta  $\beta$ . Mając te wartości z wykresu (5) odczytano wartości  $P_2$  dla odpowiednich promieni  $r_1$  i  $k_r$ . Wyniki te zestawiono w tablicy 5.

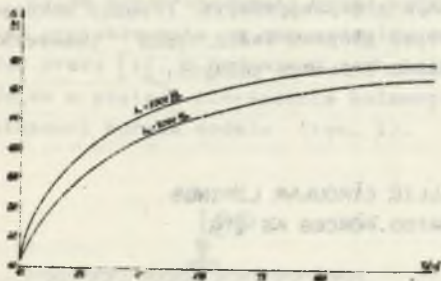
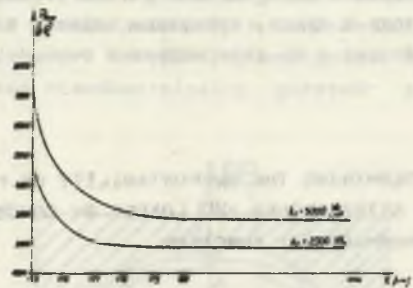
W tablicy tej zaznaczono także wartości  $\beta$  i  $P_2$  dla promieni  $r_1 = 175$  i  $r_1 = \infty$  jako krańcowe wartości obciążenia dopuszczalnego, które zostały wyznaczone w pracy [3]. Otrzymane wyniki przedstawiono na rysunkach 9 i 10. Wykazują one pełną zgodność obliczeń przedstawionych w niniejszej pracy i pracy [3], pomimo tego że podejście do rozwiązania jest całkowicie różne.



Tablica 5

Wartości obciążeń dopuszczalnych

$r_1$ [cm]	$\beta$ [°]		$F_2$ [kg]	
	$k_r = 2000 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right]$	$k_r = 3000 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right]$	$k_r = 2000 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right]$	$k_r = 3000 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right]$
175	43	43	4976	7465
176	116	100	2600	4400
177	143	128	2100	3500
178	158	143	1950	3200
179	168	153	1900	3000
180	175	162	1870	2850
$\infty$	180	180	1850	2775

Rys. 9. Wykres  $\beta = \beta(r_1)$ 

Rys. 10. Wykres obciążeń dopuszczalnych

#### 4. Zakończenie

Na podstawie przeprowadzonej analizy dochodzi się do wniosku, że obciążenie dopuszczalne odrzwia maleje gwałtownie wraz z minimalnym wzrostem wartości  $r_1 - r$ , uzyskując już dla  $\Delta r = 4$  cm praktycznie wartości obciążeń dla łuku wolno stojącego ( $r_1 = \infty$ ).

Uzyskane na drodze teoretycznej wyniki wymagają doświadczalnej weryfikacji w badaniach stanowiskowych. Przeprowadzone badania stanowiskowe zostaną omówione w oddzielnej pracy. Jak z powyższego wynika, dla małych odkształceń poprawne było stosowanie metody Menabrea-Castigliano w pracach [1], [2].

## LITERATURA

- [1] Chudek M.: Obudowa wyrobisk. Wydawnictwo Śląsk, Katowice 1968.
- [2] Chudek M.: Niektóre problemy kształtowania i obliczania podatnej obudowy metalowej wyrobisk korytarzowych. Prz. Górń. 1964 nr 3.
- [3] Szusić W., Bąk J.: Określenie podporności metalowej obudowy kołowej z łuków sztywnych obciążonej siłami skupionymi. ZN Pol. Śl. Górnictwo 7. 71.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНОСТИ СТАЛЬНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ КРЕПИ  
 ИЗ ЖЕСТКИХ АРКОВ НАГРУЖЕННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ  
 КАК ФУНКЦИИ ЕЁ ДЕФОРМИРУЕМОСТИ

## Резюме

В статье производится анализ сопротивляемости металлической кольцевой жесткой крепи для определения её опорности при нагружении сосредоточенными силами. В рассуждениях учтено ограниченную деформируемость горного массива а тоже и крепи, принятием модели, в которой дверной оклад крепи совместно работает с не деформируемым горным массивом большого радиуса.

DETERMINING THE SUPPORTABILITY OF METALLIC CIRCULAR LININGS  
 OF STIFF ARCHES AND LOADED BY CONCENTRATED FORCES AS ITS  
 DEFORMABILITY FUNCTION

## Summary

A straight analysis for the linings has been carried out to determine its supportability when loaded by concentrated forces. A limited orogenic and facing strain has been assumed.