

PL ISSN 0209-1593

3 1983



P. 4201/83

prace naukowo-badawcze

Instytutu Maszyn Matematycznych

rok XXV

U W A G A

Magazyn wydawnictw IMM przekaże nieodpłatnie bibliotekom lub osobom prywatnym niżej wym. egzemplarze wydawnictw IMM. Pisma w tej sprawie prosimy kierować na adres: Instytut Maszyn Matematycznych, ul. Krzywickiego 34, 02-078 Warszawa, BOINTE.

1. Algorytmy

nr 1-20 /lata 1962-1974/

2. Bibliografia API

1965 - nr 14-17

1966 - nr 1-17

1967 - nr 8-12

1968 - nr 1-12

1969 - nr 1-12

1970 - nr 1-12

1971 - nr 1-12

1972 - nr 1-12

1973 - nr 1-12

3. Informacja Ekspresowa

1974 - nr 1-12

1975 - nr 1-5

1977 - nr 1-12

1978 - nr 1-12

1979 - nr 1-12

1980 - nr 1-12

1981 - nr 1-12

3. Przegląd Dokumentacyjny

1977 - nr 2-6

1978 - nr 1-6

1979 - nr 1-6

1980 - nr 1-6

1981 - nr 1-6

4. Biuletyn Informacyjny

1966 - nr 1-2

1967 - nr 1-2

1968 - nr 2,4

1969 - nr 2-4

1970 - nr 3-4

1971 - nr 1-4

1972 - nr 3

1973 - nr 2,4

1974 - nr 1-4

1975 - nr 1-4

1977 - nr 1-6

1978 - nr 1-6

1979 - nr 1-6

1980 - nr 1-6

1981 - nr 1-6

5. Przegląd Patentów API

1967 - nr 5-8

1968 - nr 2-12

1969 - nr 2-12

1970 - nr 1-12

1971 - nr 1-12

6. Prace naukowo-badawcze IMM

roczniki i egzemplarze pojedyn-
cze z lat 1966-1981

I n s t y t u t M a s z y n M a t e m a t y c z n y c h



p r a c e n a u k o w o - b a d a w c z e

I n s t y t u t u

M a s z y n

M a t e m a t y c z n y c h

Mokrzycki W.: Całkowitoliczbowe dyskretyzacje krzywych
algebraicznych na jednorodnych siatkach
kwadratowych

W a r s z a w a 1 9 8 4

Copyright © 1983 - by Instytut Maszyn Matematycznych
Poland

Wszelkie prawa zastrzeżone

KOMITET REDAKCYJNY

mgr inż. Zdzisław GROCHOWSKI
mgr Aleksander KAMIŃSKI
dr inż. Bronisław PIWOWAR /redaktor naczelny/
mgr inż. Jerzy SŁAWIŃSKI
prof. dr inż. Maciej STOLARSKI
doc. dr inż. Zdzisław WRZESZCZ

Adres redakcyjny: Instytut Maszyn Matematycznych
Branżowy Ośrodek INTE
02-078 Warszawa, ul. Krzywickiego 34
tel. 28-37-29 lub 21-84-41 w. 244

Całkowitoliczbowe dyskretyzacje krzywych
algebraicznych na jednorodnych siatkach
kwadratowych

Wojciech MOKRZYCKI

Spis treści

Wykaz oznaczeń	4
1. WSTĘP	6
1.1. Uzasadnienie podjęcia tematu	6
1.2. Podstawowe pojęcia i definicje	8
1.3. Układ treści rozprawy	10
2. STRUKTURALNE, WARUNKOWE I STRUKTURALNO-WARUNKOWE DYSKRETYZACJE	11
2.1. Dyskretyzacje strukturalne	12
2.2. Dyskretyzacje warunkowe na siatkach kwadratowych 4- i 8-spójnych	16
2.3. Dyskretyzacje strukturalno-warunkowe na siatkach 8-spójnych	22
2.4. Dyskretyzacje warunkowe na siatkach k-spójnych	22
2.5. Problemy badawcze w dyskretyzacji krzywych	31
3. ALGORYTMY DYSKRETYZACJI KRZYWYCH ALGEBRAICZNYCH NA JEDNORODNYCH SIATKACH KWADRATOWYCH 4- i 8-SPÓJNYCH	32
3.1. Sformułowanie zagadnienia dyskretyzacji	32
3.2. Analiza zagadnienia	33
3.2.1. Dyskretyzacja na siatce 4-spójnej	36
3.2.2. Dyskretyzacja na siatce 8-spójnej	37
3.2.3. Dane początkowe dyskretyzacji	39
3.2.4. Izolowanie punktów osobliwych krzywych oraz wybór początkowych i końcowych punktów generowanego segmenta	39
3.3. Algorytm dyskretyzacji	40
3.3.1. Algorytm dyskretyzacji na siatce 4-spójnej	40
3.3.2. Algorytm dyskretyzacji na siatce 8-spójnej	43
3.3.3. Przypadek algorytmów dla krzywych 2-stopnia	44
4. ANALIZA ZŁOŻONOŚCI OBLICZENIOWEJ ALGORYTMÓW	44
4.1. Całkowitoliczbowość algorytmów	47
4.2. Złożoność obliczeniowa algorytmów	50

4.2.1. Złożoność obliczeniowa wyznaczenia jednego węzła ciągu dla $h=1$	50
4.2.2. Złożoność obliczeniowa wyznaczenia jednego węzła ciągu dla $h=1$	52
4.2.3. Złożoność obliczeniowa węzła ciągu na podstawie równania ogólnego	54
4.3. Porównanie złożoności obliczeniowej algorytmów	55
4.4. Złożoność dyskretyzacji krzywych	55
5. ANALIZA BŁĘDÓW DYSKRETYZACJI	57
5.1. Szczytowe błędy dyskretyzacji	58
5.1.1. Bezwzględne szczytowe błędy dyskretyzacji	58
5.1.2. Względne szczytowe błędy dyskretyzacji	62
5.2. Średnioglobalna ocena jakości dyskretyzacji	64
5.2.1. Średni moduł pola przylegającego do odcinka krótkiej odcinki jako względny połowy błąd	64
5.2.2. Średnie wartości modułu pola przylegającego do jednostkowego odcinka krzywej	66
5.3. Podstawowe rezultaty oceny jakości aproksymacji	67
6. ZAKOŃCZENIE	68
6.1. Podstawowe wyniki badań	68
6.2. Przewidywane zastosowania	69
6.3. Określenie kierunku dalszych badań	70
Literatura	70
Dodatek A: Dowody twierdzeń 1.4 oraz 3.1	74
Dodatek B: Implementacja algorytmów	76

Wykaz oznaczeń

a, b	- półosie krzywej 2-stopnia
a	- współczynniki równania uwikłanego krzywej
$\{ \}$	- zbiór algorytmów dyskretyzacji
A	- element zbioru \mathcal{A}
A_1, B_1	- nazwy podokresów w kodzie prostej dyskretnej
B	- zmienna logiczna
c_1, k_1, m_1, n_1	- wskaźniki pomocnicze, na ogół elementy ciągów liczb całkowitych
p_1, q_1, r_1	
$C(a, b)$	- przestrzeń funkcji ciągłych /Czebyszewa/
C, D	- zbiory parzystych i nieparzystych kierunków elementarnych ruchów wzdłuż linii siatki 8-spójnej
$C_1^1 D_1$	- podokres w kodzie prostej dyskretnej
d, d_1, d_{1j}	- odległości między punktami /stałe bądź zmienne/
e	- parametr krzywej 2-stopnia
$f_0(1)k, g_0(1)k$	- sekwencje liczb naturalnych ze wskaźnikami zmieniającymi się od 0 do k
$F(x, y) = 0$	- funkcja uwikłana opisująca krzywą dyskretyzowaną
$F_1(x, y), F(P_1)$	- wartości funkcji $F(x, y)$ w punktach o numerach "1" oraz " P_1 "
h	- moduł siatki
i, j, k, l, s, r, p, q	- wskaźniki /liczby całkowite/
\mathcal{K}	- zbiór /klasa/ krzywych dyskretyzowanych
K	- element zbioru \mathcal{K}
l^2	- przestrzeń nieskończonych ciągów
l_1	- długość odcinki wyznaczonej przez punkty dwóch kolejnych przecięć krzywej z łamaną
$L, L(1), L(P_1/P_j)$	- linia, linia o numerze "1", linia wyznaczona przez punkty P_1 oraz P_j
$L(A, K)$	- liczba operacji niezbędnych do przeprowadzenia dyskretyzacji krzywej K za pomocą algorytmu A

- L_1^0 - liczba operacji wyznaczenia pochodnych cząsteczkowych wg jednej zmiennej
- L_m^0 - liczba operacji wyznaczania pochodnych cząsteczkowych mieszanych
- L_L^0 - liczba operacji wyznaczania wszystkich pochodnych cząsteczkowych
- L_ϵ^0 - liczba operacji wyznaczania operatorów $L^{(\cdot)}F(x,y)$ oraz $L^{(\cdot)}F_{rxsy}(x,y)$ dla algorytmów z $h \neq 1$
- L_1^0 - liczba operacji wyznaczania operatorów $L^{(\cdot)}F(x,y)$ oraz $L^{(\cdot)}F_{rxsy}(x,y)$ dla algorytmów z $h=1$
- L_r^0 - liczba operacji wykonywanych w pętli algorytmu dyskretyzacji krzywej na podstawie jej równania ogólnego
- L_ϵ^p - liczba operacji wykonywanych w pętli algorytmu dyskretyzacji na siatce z modulem $h \neq 1$
- L_1^p - liczba operacji wykonywanych w pętli algorytmu dyskretyzacji na siatce z modulem $h=1$
- $L^X F(x,y), L^Y F(x,y)$ } operatory kierunkowe funkcji $F(x,y)$ odpowiednio x-owy, y-owy, przekątny oraz
- $L^P F(x,y), L^R F(x,y)$ } różnicowy
- $L^X_{rxsy} F(x,y)$ } - operatory kierunkowe pochodnych mieszanych / $r+s$ / - rzędu $F_{rxsy}(x,y)$ funkcji
- $L^Y_{rxsy} F(x,y)$ } $F(x,y)$ odpowiednio: x-owy, y-owy, przekątny i różnicowy
- $L^P_{rxsy} F(x,y)$ }
- $L^R_{rxsy} F(x,y)$ }
- τ_1 - długość łuku krzywej wyznaczonego przez punkty dwóch kolejnych przecięć krzywej z łamaną
- n - stopień krzywej /liczba naturalna/
- $n \times n$ - rozmiar obszaru dyskretnego
- p_0, q_0 - liczby całkowite p i q zredukowane do liczb względem siebie pierwszych
- $P, P(1), P(x,y)$ - punkt, punkt o numerze "1", punkt o współrzędnych (x,y) .
- Q - nachylenie linii na płaszczyźnie dyskretnej
- Q_h - funkcja siatkowa: zależność między odległościami węzłów ciągu od krzywej w ramach elementarnego pola siatki
- $r=1(1)n$ - zmiana wskaźnika r od wartości 1 do n co 1
- res - reszta z całkowitoliczbowego dzielenia liczb
- R - promień krzywizny krzywej /stały bądź zmienny/
- $R_{t,1}(\cdot)$ - wyrażenie /funkcja/ pomocnicze
- R^n - n -wymiarowa przestrzeń rzeczywista
- S_1 - pole powierzchni zawarte między krzywą i jej aproksymantą dla dwóch kolejnych wzajemnych przecięć
- S'_1 - pole powierzchni zawarte między cięciwą i aproksymantą krzywej dla dwóch kolejnych wzajemnych przecięć
- $S_1(\epsilon r)$ - średnia arytmetyczna sumy sprzężonych pól S'_1 oraz S'_{1+1}
- t - parametr
- $\frac{T, T_p, T_{ok}}{\sqrt{\sqrt{\quad}}}$ - pasmo tolerancji dyskretyzacji krzywej / T_p - dla prostej, T_{ok} - dla okręgu/
- \vec{V} - wektory kierunkowe stycznej
- w_x, w_y - wymiary powierzchni obrazowania
- (x_1, y_1) - współrzędne bieżące punktu na płaszczyźnie
- X, Y, Z - oznaczenia pomocnicze
- $Z(A)$ - złożoność obliczeniowa algorytmu A
- Z^* - złożoność obliczeniowa dyskretyzacji klasy \mathcal{X} ze względu na zbiór \bar{A}

- z^n - n-wymiarowa przestrzeń zespolona
- α, β, γ - kąty nachylenia stycznych do krzywej w dwóch kolejnych węzłach ciągu aproksymującego oraz kąt środkowy
- $\delta, \delta^1, \delta_1$ - funkcje pomocnicze
- Δ - nachylenie całkowitoliczbowe linii dyskretnej
- $\Delta F(x,y)$ - przyrost wartości funkcji $F(x,y)$ w trakcie ruchu do sąsiedniego węzła siatki
- Δt - przyrost parametru t
- $\Delta x, \Delta y$ - przyrosty wzdłuż współrzędnych x oraz y
- ϕ_1, ϕ_2 - odchylenia kątów nachylenia stycznych /od kąta środkowego/
- ψ - kąt nachylenia głównych linii siatki w stosunku do osi układu współrzędnych
- θ - kąt nachylenia stycznej w stosunku do głównych linii siatki
- $\left. \begin{matrix} \frac{\partial F}{\partial x}, F_x \\ \frac{\partial F}{\partial y}, F_y \end{matrix} \right\}$ - pochodne cząstkowe I-rzędu funkcji $F(x,y)$ względem zmiennych x oraz y odpowiednio
- $\left. \begin{matrix} \frac{\partial^r F}{\partial x^r}, F_{rx} \\ \frac{\partial^s F}{\partial y^s}, F_{sy} \end{matrix} \right\}$ - pochodne cząstkowe r - i s -rzędu względem zmiennych odpowiednio x i y
- $\frac{\partial^{r+s} F}{\partial x^r \partial y^s}, F_{rxsy}$ - pochodna cząstkowa mieszana $r+s$ -rzędu funkcji $F(x,y)$ względem zmiennych x / r -rzędu/ i y / s -rzędu/
- ϑ - bezwzględny błąd szczytowy dyskretyzacji krzywej mierzony prostopadłe do krzywej
- ϑ_p - średni moduł pola przylegający do odcinka krótkiej cięciwy
- ϑ_{sp} - wartość średnia modułu pola przylegającego do jednostkowego odcinka krzywej
- ϑ_w - względny szczytowy błąd aproksymacji
- $[x]$ - wartość liczby x zaokrąglona do najbliższej liczby całkowitej, nie większej od x
- $\lceil x \rceil$ - wartość liczby x zaokrąglona do najbliższej liczby całkowitej, nie mniejszej od x
- $\lfloor x \rfloor$ - wartość liczby x zaokrąglona do najbliższej liczby całkowitej
- \square - koniec dowodu

1. WSTĘP

1.1. Uzasadnienie podjęcia tematu

W wielu różnych dziedzinach nauki i techniki, również w mikroelektronice i informatyce /przenikających do wszelkich dziedzin działalności ludzkiej/, wynikają potrzeby doskonalszych lub nowych rozwiązań /s jakościowo nowymi wymaganiami/ w dziedzinie metod numerycznych, m.in. w zakresie dyskretyzacji i aproksymacji krzywych. Potrzeby te odnoszą się zwłaszcza do tych dziedzin zastosowań, w których zachodzące procesy opisują się prościej w przestrzeni dyskretnej, ze zdefiniowanymi węzłami całkowitoliczbowej siatki współrzędnych, np. w monitorach graficznych, kreślakach, koderach rysunków, cyfrowym sterowaniu obrabiarkami, mapach topograficznych, itp. Terminale obrazowe, w tym graficzne, w komputerowych systemach użytkowych: wielkich i małych, a nawet w mikrokomputerach osobistych, stają się bowiem coraz powszechniejsze, a ich znaczenie ciągle rośnie. Zwiększają się też wymagania dotyczące jakości zobrazowania: żąda się ergonomicznej formy przedstawienia opracowanych

wyników tzn. dostosowanej do cech psychofizycznych człowieka.

Dyskretyzacji stawia się więc szczególne i jakościowo nowe wymagania, jak np. bardzo duża szybkość wykonywania algorytmów, używanie jedynie najprostszych operacji /typu sumowania, przesuwania wartości binarnych w rejestrach, prostych operacji logicznych/, działania jedynie w arytmetyce całkowitoliczbowej, lub w najgorszym wypadku stałoprzecinkowej, brak zjawiska kumulacji błędów itp. Wymagań tych nie spełniają dobrze znane klasyczne metody dyskretyzacji /aproxymacji/ krzywych, w których punkty aproxymujące wyznacza się za pomocą podatawowych funkcji trygonometrycznych lub rozwinięć w szeregi potęgowe. Ich stosowanie jest przyczyną kumulujących się w procesie obliczeń błędów systematycznych, prowadzących do "degeneracji" krzywych, zwłaszcza przy długotrwałych obliczeniach.

W związku z tymi potrzebami opracowano kilka metod tzw. całkowitoliczbowych aproxymacji /dyskretyzacji/, które aproxymują krzywe ciągiem punktów mających współrzędne całkowitoliczbowe i ze swojej natury działania nie wnoszą błędów systematycznych. Odrzucone zostało założenie typowe dla klasycznych metod dyskretyzacji, że punkty aproxymujące powinny leżeć na konturze krzywej. W metodach całkowitoliczbowych punkty aproxymujące nie leżą na krzywej z założenia. Mają one jednak takie współrzędne całkowitoliczbowe, odchylenie których od punktów zadanej krzywej jest z góry ograniczone i nie przekracza odległości między sąsiednimi węzłami siatki, czyli nie przekracza jednej jednostki. Poza tym odchylenie to jest uwzględniane podczas wyznaczania kolejnego punktu ciągu. Istnieje bowiem zależność między warunkami wyboru kolejnego punktu ciągu a odchyleniem poprzedniego punktu od krzywej zadanej.

Funkcja dyskretyzowana opisana jest zwykle w kartezjańskim układzie współrzędnych. W tym układzie zapis większości funkcji oraz różne operacje i przekształcenia na funkcjach są tradycyjnie stosowane. Poza tym wyrażają się one w prosty sposób i realizują za pomocą stosunkowo prostych operacji. W tych wypadkach dla celów dyskretyzacji wprowadza się siatki prostokątne, najczęściej kwadratowe jednorodnie i na nich przeprowadza się dyskretyzację krzywych. Występują jednak zastosowania /np. rastrowe monitory graficzne z radialnym bądź koncentrycznym rozwinięciem obrazu/, w których zapis funkcji i realizowanych na nich operacji wyrażają się prościej w innych układach współrzędnych, np. w układzie trójkątnym czy biegunowym. Wprowadza się wtedy odpowiednie siatki: trójkątne, sześciokątne, koncentryczne, spiralne itp. i dyskretyzację krzywych przeprowadza się na tych właśnie siatkach.

W niektórych z zastosowań stawia się wymaganie układowej realizowalności dyskretyzacji, co oznacza, że algorytmy powinny prowadzić do łatwych i prostych rozwiązań technicznych. Wymaganie to wyklucza stosowanie funkcji trygonometrycznych, wykładniczych, pierwiastkowań, a nawet dzielenia i mnożenia przez dowolne liczby rzeczywiste, czy podobnego typu funkcje.

Ich realizowalność techniczna jest zwykle złożona i trudna, wymaga bowiem skomplikowanych rozwiązań układowych i z natury rzeczy wprowadza błędy systematyczne /zaokrąglanie do wartości całkowitych/. Wymaganie możliwej prostej realizowalności układowej algorytmu narzuca na niego ograniczenie stosowania jedynie prostych operacji, tzn. sumowania liczb całkowitych lub w najgorszym wypadku stałoprzecinkowych, mnożenia i dzielenia przez całkowite potęgi dwójki, proste operacje logiczne typu sumy i iloczynu na argumentach boolowskich, operacje porównywania argumentów stałoprzecinkowych lub inne podobnego typu.

Niektóre z metod są ukierunkowane wg ściśle określonego zastosowania, w których występują zwiększone wymagania w stosunku do określonego parametru dyskretyzacji, jak np. zwiększona dokładność czy gładkość w sterowaniu obrabiarkami, lub duża szybkość w monitorach graficznych. W niektórych z zastosowań pewne cechy mogą być pierwszoplanowe /kosztem innych/, np. dokładność i gładkość kosztem szybkości /w sterowaniu obrabiarkami/ lub też szybkość generacji kosztem dokładności /monitory graficzne/.

W dyskretyzacji złożonych krzywych wyższych stopni może wyniknąć problem niedostatecznej pojemności pamięci operacyjnej komputera, czy też niedostatecznego przedziału liczbowego dla różnych reprezentacji liczbowych. Powstać więc mogą dodatkowe utrudnienia, czy nawet nieprzewidziane wcześniej błędy /np. wynikię ze sposobu reprezentacji liczb w komputerze/.

1.2. Podstawowe pojęcia i definicje

Stosowany w teorii aproksymacji termin dyskretyzacja oznacza odwzorowanie przestrzeni funkcyjnej /rzeczywistej lub zespolonej/ w przestrzeń n -wymiarowych ciągów liczb rzeczywistych R^n , zespolonych Z^n bądź też w przestrzeń nieskończonych ciągów liczbowych l^2 .

W teorii sygnałów termin "dyskretyzacja" dotyczy konwersji sygnałów analogowych na dyskretne i obejmuje dwa przekształcenia, tzw. próbkowanie oraz kwantowanie /porcjowanie/. Próbkowanie polega na pomiarze wartości sygnału w określonych odstępach czasowych. Jest więc przekształceniem ciągłego przebiegu sygnału w odpowiadający mu dyskretny zbiór próbek. Kwantyzacja /porcjowanie/ polega na zamianie ciągłej wartości próbki najbliższym tej próbce poziomem wartości sporcjowanej /skwantowanej/. Kwantyzacja jest więc konwersją analogowo-cyfrową i w tym sensie jest podstawą techniki cyfrowej, techniki kodowania, techniki obliczeń, metrologii i innych dziedzin nauki i techniki.

W rozważanych w niniejszej rozprawie zagadnieniach termin "dyskretyzacja krzywych" rozumiemy z jednej strony jako jedną z metod aproksymacji krzywych, ale przede wszystkim jako odwzorowanie analitycznie zadanych, ciągłych wartości funkcji $F(x,y) = 0$ w dyskretny zbiór cyfrowych wartości. Zbiór ten jest dyskretnym obrazem krzywej ciągłej /analitycznej/ i aproksymuje /w sensie pewnej metryki np. metryki przestrzeni euklidesowej/ krzywą zadaną.

Motywacją do dyskretyzacji krzywych jest chęć stosowania technik i metod cyfrowych w różnych procesach technicznych /opisujących się za pomocą dyskretyzowanych funkcji $F(x,y) = 0$ /, a zwłaszcza w obrazowaniu informacji za pomocą graficznych urządzeń komputerowych.

Szczególnym zainteresowaniem obejmujemy dyskretyzację krzywych na dwuwymiarowych siatkach. Polega ona na zdefiniowaniu, na obrazującej krzywą płaszczyźnie, dwuwymiarowej siatki i wyborze węzłów tej siatki leżących wzdłuż krzywej i tworzących /po połączeniu ich kolejno aproksymantami/ krzywą dyskretną, przybliżającą krzywą zadaną.

Standaryzacja aproksymantów i ich ponumerowanie prowadzi, w zapisie krzywej dyskretnej, do pojęcia tzw. "łańcuchowo-kodowej reprezentacji linii". Jest to ciąg utworzony z numerów standardowego zbioru /np. 4- lub 8-elementowego/ odcinków tworzących krzywą dyskretną.

Powszechnie znaną techniką dyskretyzacji krzywych, prowadzącą wprost do łańcuchowo-kodowej reprezentacji linii jest wybieranie, dla każdego przecięcia krzywej z linią siatki, najbliższego temu przecięciu węzła i utworzenie łańcucha /ciągu/ z numerów odcinków łączących kolejno wybrane węzły.

W dalszych rozważaniach nad odwzorowaniem krzywych ciągłych na krzywe dyskretne używać będziemy /w wielu wypadkach zamiennie/ trzech następujących terminów:

- aproksymacja krzywej analitycznej /zadanej/ za pomocą krzywej dyskretnej,
- dyskretyzacja krzywej analitycznej /zadanej/ do postaci krzywej dyskretnej,
- generacja krzywej dyskretnej na podstawie /zadanych/ parametrów krzywej analitycznej.

Pojęcia "aproksymacja krzywej" będziemy używać w rozważaniach nad przybliżaniem krzywej ciągłej - krzywą dyskretną, szczególnie wtedy, gdy będziemy oceniać jakość tego przybliżenia.

Pojęcie "dyskretyzacja krzywej" oraz "generacja krzywej" będziemy używać w czasie rozważań nad dyskretnym zbiorem elementów, wykorzystywanych do tworzenia dyskretnego obrazu krzywej zadanej. Drugiego z tych terminów będziemy używać szczególnie w czasie omawiania algorytmów "generacji" ogniw krzywej dyskretnej /skończonego ciągu sporcjowanych i zestandaryzowanych wartości współrzędnych

kolejnych punktów - węzłów bądź odcinków prostej, tworzących krzywą dyskretną/.

W rozważaniach uwzględnimy więc trzy aspekty dyskretyzacji:

- formę /jednorodną kwadratową siatkę na płaszczyźnie/,
- rozmiar /moduł siatki/,
- aproksymant użyty do reprezentacji porcji /odcinek prostej bądź standardowy segment krzywej/.

W niniejszej rozprawie rozważania ograniczymy jedynie do dyskretyzacji krzywych algebraicznych płaskich na jednorodnych kwadratowych siatkach za pomocą prostoliniowych aproksymantów. Innymi słowy, rozważać będziemy aproksymację, w której aproksymantami mogą być jedynie odcinki linii siatki, na której jest ta aproksymacja dokonywana.

Zadajmy w płaskim układzie osy kwadratową jednorodną siatkę z modułem h za pomocą linii

$$\begin{aligned} x &= h \cdot i && /1.1/ \\ y &= (p/q) \cdot x + h \cdot i \end{aligned}$$

gdzie: h - liczba naturalna, $i = -\infty/1/ + \infty$, p, q - liczby całkowite, $q \neq 0$.

Pomocnicze definicje dotyczące struktury siatki.

Definicja 1. Węzłami siatki kwadratowej nazwiemy punkty przecinania się linii siatkowych.

Definicja 2. Rzędem spójności siatki nazwiemy liczbę półprostych siatkowych wychodzących z dowolnego węzła siatki.

Definicja 3. Bezpośrednio spójnymi węzłami siatki nazwiemy także dwa węzły, które linia siatkowa łączy bezpośrednio /bcz pośrednictwa innych węzłów tej siatki/.

Definicja 4. Głównymi liniami siatki nazwiemy te linie siatki, wzdłuż których odległość między bezpośrednio spójnymi węzłami siatki równa jest modułowi siatki h , dwu-przekątnymi - gdy ta odległość jest równa $\sqrt{2} h, \dots, (i+j)$ - przekątnymi - gdy jest ona równa $\sqrt{i^2 + j^2} h$.

Przyjmując za p i q różne liczby całkowite /ale $q \neq 0$ / otrzymujemy różne rodzaje siatek:

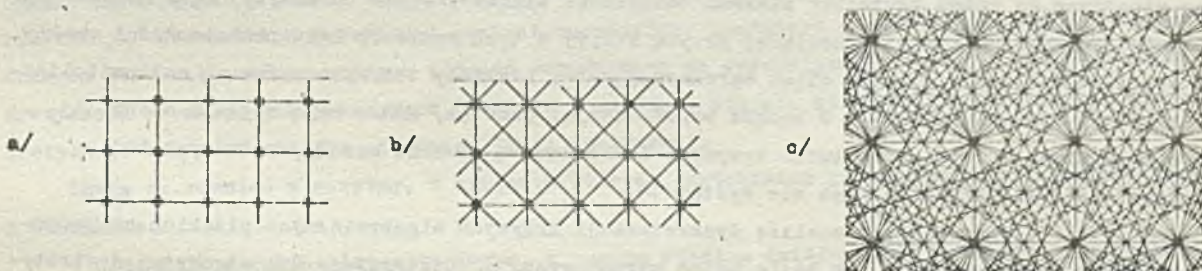
1/ $p=0$; otrzymujemy jednorodną kwadratową siatkę 4-spójną:

$$\begin{aligned} x &= h \cdot i \\ y &= h \cdot i \end{aligned}$$

2/ $p/q = \pm 1$; otrzymujemy jednorodną kwadratową siatkę 8-spójną:

$$\begin{aligned} x &= h \cdot i \\ y &= \pm x + h \cdot i \end{aligned}$$

3/ p i q dowolne liczby całkowite $q \neq 0$; otrzymujemy siatkę k -spójną / $k=2^i$, i - liczba naturalna/.



Rys. 1. Jednordne siatki kwadratowe: a/ 4-spójna, b/ 8-spójna, c/ 32-spójna

Zależnie od formy odcinka aproksymującego mogą mieć różne orientacje i długości: cztery orientacje i jedną długość równą modułowi siatki h /w wypadku aproksymacji na jednorodnych siatkach kwadratowych 4-spójnych/, osiem orientacji i dwie długości wynoszące h i $\sqrt{2} h$ /dla jednorodnych siatek kwadratowych 8-spójnych/, szesnaście orientacji oraz trzy długości wynoszące $h, \sqrt{2} h, \sqrt{5} h$ /dla jednorodnych kwadratowych siatek 16-spójnych/, ..., $2^i /i$ - liczba naturalna/ orientacji oraz $i-1$ długości, obejmujących wszystkie możliwe odległości między pewnym węzłem siatki i każdym innym węzłem tej siatki.

W Dodatku A dowodzi się następujące twierdzenie dotyczące struktury obszaru dyskretnego.

Twierdzenie 1.1

W obszarze dyskretnym $n \times n$ punktów, liczba możliwych do zdefiniowania odcinków prostych wyraża się wielomianem 2-stopnia względem n^2 - liczby punktów, tego obszaru; liczby odcinków mających różne długości, orientacje oraz długości bądź orientacje wyrażają się wielomianami 2-stopnia, względem n -rozmiaru liniowego tego obszaru.

Dowód w Dodatku A.

Aproksymanty na siatce mogą mieć długości obejmujące wszystkie możliwe odległości między węzłami siatki w całej przestrzeni dyskretnej. W praktyce najczęściej kilka - kilkanaście jednostek.

1.3. Układ treści rozprawy

Zawarte w niniejszej rozprawie wyniki analizy rozważanych zagadnień autor starał się uogólnić do poziomu twierdzeń zawartych w liczbie dziewięć w tekście rozprawy.

Rozprawa składa się z sześciu rozdziałów oraz dwóch dodatków.

Po wstępie, w rozdziale 2 omówimy znane z literatury algorytmy całkowitoliczbowej dyskretyzacji /aproksymacji/ krzywych. Algorytmy te podzielimy na grupy wg metodyki konstruowania ciągów aproksymujących, typu kryterium wyboru węzłów siatki na ciąg aproksymujący oraz rodzaju siatki aproksymacyjnej. W każdej z grup omówimy algorytmy zgodnie z kolejnością ich prezentacji w literaturze. Stan dotychczasowych badań przedstawimy więc jako zespół następujących zagadnień szczegółowych:

- rodzaju siatki, na której dokonywana jest dyskretyzacja,
- metodyk konstruowania ciągów aproksymujących /podejście warunkowe, strukturalne i strukturalno-warunkowe/,
- kryteriów wyznaczania węzłów ciągu aproksymującego.

Omawiając zależność aproksymacji od rodzaju siatki skupimy uwagę przede wszystkim na kwadratowych jednorodnych siatkach 4-, 8- i wielospójnych.

Analizując różne metodyki dyskretyzowania krzywych rozróżniamy algorytmy dyskretyzacji oparte na podejściu strukturalnym, warunkowym oraz strukturalno-warunkowym.

W warunkowej dyskretyzacji krzywych do wyznaczania całkowitoliczbowych punktów ciągu aproksymującego stosowane są różne kryteria: minimum odległości liniowej węzła od krzywej bądź minimum modułu wartości funkcji uwikłanej opisującej krzywą $F(x,y)$ w tych węzłach, bądź przemienności znaków funkcji $F(x,y)$ w kolejnych węzłach ciągu aproksymującego; niekiedy też wyznaczane są całkowitoliczbowe pierwiastki równania $F(x,y) = 0$ będące współrzędnymi punktów, które mają obydwie cechy, tj. są całkowitoliczbowe i leżą na konturze krzywej. Stosowane są również metody, w których żadna z omawianych wielkości kryterialnych nie występuje.

W rozdziale 3 przeprowadzimy analizę dyskretyzacji krzywych algebraicznych płaskich na jednorodnych siatkach kwadratowych i, na bazie metod warunkowych, zsyntetyzujemy dwa algorytmy dyskretyzacji tych krzywych na siatkach 4- i 8-spójnych. Metryką generacyjną w tych algorytmach będzie moduł wartości funkcji $|F(x,y)|$ opisującej krzywą.

W rozdziale 4 oszacujemy złożoność obliczeniową i wynikającą z niej szybkość realizacji zaproponowanych w rozdziale 3 algorytmów oraz wyprowadzimy wzory na liczbę tzw. "operacji głównych" wykonywanych w trakcie dyskretyzacji krzywych. Liczba ta określać się będzie wielomianem względem stopnia krzywej. Stopień wielomianu będzie zależał natomiast od zastosowanej metody dyskretyzacji oraz od wielkości modułu siatki h . Złożoność dyskretyzacji krzywych algebraicznych za pomocą opisywanych metod okaże się więc złożonością wielomianową.

W rozdziale 5 przeprowadzimy lokalną i średnioglobalną ocenę jakości aproksymacji krzywych algebraicznych na jednorodnych siatkach kwadratowych 4- i 8-spójnych. Dokładność aproksymacji wzrasta wraz ze wzrostem rzędu spójności siatki, na której jest dokonywana dyskretyzacja.

W rozdziale 6 podsumujemy uzyskane w pracy wyniki i wskażemy na potrzebę dalszych badań w dziedzinie całkowitoliczbowej aproksymacji /aproksymacji na siatkach/.

W Dodatku A zamieścimy dowody twierdzeń 1.1 i 3.1, które nie stanowią głównego materiału rozprawy, powinny jednak, zdaniem autora, znajdować się w tekście rozprawy.

W dodatku B omówimy implementację algorytmów na komputerach IRIS 80 oraz MERA 400 i przedstawimy rysunki zdyskretyzowanych krzywych 4- i 6-stopnia na siatkach 4- i 8-spójnych z różnymi wielkościami modułu siatki.

2. STRUKTURALNE, WARUNKOWE I STRUKTURALNO-WARUNKOWE Dyskretyzacje

Podział na dyskretyzację strukturalną, warunkową oraz strukturalno-warunkową wynika z zastosowanej metodyki konstrukcji linii dyskretnej /wyboru węzłów aproksymujących zadaną linię/.

W podejściu strukturalnym zakłada się występowanie określonej struktury linii dyskretnej, tj. występowanie w linii dyskretnej związków między długością i nachyleniem tworzących ją segmentów linii siatkowych oraz kolejnością ich występowania, zależnie bezpośrednio i jednoznacznie od parametrów linii zadanej.

W podejściu warunkowym zakłada się, że o wyborze punktu-węzła na węzeł aproksymujący decyduje wynik testowania pewnego warunku /zwykle arytmetycznego/, na podstawie którego wybiera się z sąsiadujących z krzywą węzłów kolejny węzeł aproksymujący. Warunek ten pozwala wybrać węzeł najbliższy krzywej zadanej według określonej /zwykle liniowej/ metryki.

Każda z metod dyskretyzacji ma swoje wady i zalety.

Metody strukturalne są bardziej skomplikowane, wymagają większej liczby złożonych operacji oraz długiego czasu realizacji, a także większych obszarów pamięci komputera. W zamian za to dają przejrzysty obraz struktury linii dyskretnej i występujących w niej uwarunkowań. Z literatury znanych jest jednak zaledwie kilka /sześć/ algorytmów dyskretyzacji opartych na podejściu strukturalnym i wszystkie dotyczą dyskretyzacji linii prostej na jednorodnej 8-spójnej siatce kwadratowej.

Metody warunkowe, opisywane w literaturze wcześniej i częściej są metodami prostszymi, szybszymi, używającymi prostych operacji arytmetycznych, wymagającymi /w ich komputerowej, programowej realizacji/ niewielkich pojemności pamięci operacyjnej komputera oraz są doskonalsze. Z literatury znanych jest kilkanaście różnych podejść warunkowych do dyskretyzacji linii, a dotyczą one tak dyskretyzacji prostej, jak i krzywych drugiego i wyższych stopni. Niestety, metody warunkowych dyskretyzacji nie uwidaczniają struktury linii dyskretnej.

Znane są również algorytmy, w syntezie których zastosowano zarówno metody strukturalne, jak i warunkowe.

W podejściu strukturalno-warunkowym, w pewnym stadium działania są wykonywane operacje charakterystyczne dla podejścia strukturalnego, a w stadium kolejnym - operacje typowe dla podejścia warunkowego. Algorytmy tego typu łączą w sobie zalety obydwu metod dyskretyzacji: prostotę obliczeniową metody warunkowej oraz przejrzystość struktury linii dyskretnej metody strukturalnej.

W dalszej części rozdziału zaprezentujemy znane w literaturze algorytmy dyskretyzacji krzywych: strukturalne, warunkowe oraz strukturalno-warunkowe. Omówimy również algorytmy dyskretyzacji krzywych algebraicznych na jednorodnych kwadratowych siatkach wielospójnych.

Na zakończenie rozdziału sformułujemy problemy badawcze w całkowitoliczbowej dyskretyzacji krzywych.

2.1. Dyskretyzacje strukturalne

Dyskretyzacje strukturalne opierają się na założeniu, że linia dyskretna ma ściśle określoną strukturę, tj. tworzące ją odcinki linii siatkowych o różnych długościach i nachyleniach są uszeregowane według ściśle określonej zasady, oraz, że typy tych odcinków, ich długości, nachylenia i kolejności występowania są całkowicie zdeterminowane parametrami linii zadanej.

Z literatury znana jest jedynie struktura prostych zdyskretyzowanych na 8-spójnej jednorodnej siatce kwadratowej, opisana przez Freemana w 1970 r. i sformułowana w postaci trzech podstawowych zasad:

- 1/ w strukturze prostej dyskretnej występują co najwyżej dwa różne kierunki elementarnych ruchów wzdłuż linii siatkowych,
- 2/ jeżeli w strukturze prostej dyskretnej są dwa różne kierunki, to są to kierunki sąsiednie,
- 3/ jeżeli w strukturze prostej dyskretnej są dwa różne kierunki, to są one wzdłuż tej prostej tak jednolicie uszeregowane, jak jest to tylko możliwe.

Nie są jednak znane struktury "krzywych dyskretnych".

Metody strukturalnej dyskretyzacji są stosunkowo złożone, wymagają wykonania znacznej liczby operacji oraz obszaru pamięci komputera na jednostkę długości linii dyskretyzowanej. Liczba ta jednak zależy w niewielkim tylko stopniu od długości dyskretyzowanej linii, zależy również od kąta nachylenia linii. Proces dyskretyzacji sprowadza się do określenia okresów i podokresów w strukturze linii dyskretnej i ewentualnie do wyóśrodkowania linii dyskretnej w stosunku do linii zadanej, w celu minimizacji błędów szczytowych dyskretyzacji.

Dotychczas opisanych zostało zaledwie kilka algorytmów strukturalnych i wszystkie dotyczą dyskretyzacji linii prostej.

Metzger R.A. w 1969 r. zaproponował /jako pierwszy/ algorytm strukturalnej dyskretyzacji prostej. Centralnym problemem w jego metodzie jest problem określenia wartości Δ - liczby /całkowitej/ elementarnych przyrostów wzdłuż osi x, przypadających na jednostkowy przyrost wzdłuż osi y /dla prostej o kącie nachylenia $0 \leq \alpha \leq 45^\circ$ /. Jeżeli Δ wyznaczona jest wg wzoru:

$$\Delta = [Q] = \left\lfloor \left| x_k - x_p \right| + \left| y_k - y_p \right| \right\rfloor$$

wtedy błąd δ dyskretyzacji w punkcie końcowym odcinka jest równy reszcie res całkowitoliczbowego dzielenia wartości przyrostów Δx i Δy określających dyskretyzowany odcinek prostej. Gdy $\Delta = [Q]$, wtedy błąd δ dyskretyzacji w punkcie końcowym dyskretyzowanego odcinka jest równy:

$$\delta = \begin{cases} \text{res} & \text{gdy } \text{res} < \Delta y / 2 \\ \Delta y - \text{res} & \text{gdy } \text{res} \geq \Delta y / 2 \end{cases}$$

W ogólności, gdy przyjmie się wartość $\Delta = [Q]$, wtedy po to, aby w punktach końcowych dyskretyzowanego odcinka był błąd zerowy, należy kod prostej złożyć z res przyrostów Δ równych $(Q+1)$ oraz z $(y-\text{res})$ przyrostów Δ równych Q . Otrzymujemy wtedy następującą zależność między parametrami dyskretnego odcinka krzywej:

$$\Delta x = (Q+1)\text{res} + (\Delta y - \text{res})Q = Q\Delta y + \text{res}$$

Metzger uważa jednak ten algorytm dyskretyzacji za zbyt złożony i proponuje stosowanie znacznie prostszych jego zdaniem algorytmów warunkowych.

R. Brons w 1974 r. proponuje algorytm tzw. równoległej generacji prostej. Wychodząc z trzech podstawowych stwierdzeń Freemana dotyczących ciągów kodowych reprezentujących linie proste na 8-spójnej siatce kwadratowej, a szczególnie na "jednolitości uszeregowania, jak to tylko możliwe", podaje poniższy rekursywny algorytm konstrukcji okresów i podokresów ciągu symboli reprezentujących prostą o nachyleniu p/q , $0 < p < q$, p, q - całkowite:

- 1/ zredukuj /gdy to możliwe/ p/q do p_0/q_0 ; p_0, q_0 - liczby względem siebie pierwsze,
- 2/ oblicz $r_0 = q_0 - p_0$; r_0 jest symbolem zera w okresie, p_0 - jest symbolem jedynki,
- 3/ oblicz $c_1 = \max(p_1, r_1)$; nazywaj symbolami C_1 symbole występujące c_1 razy,
- 4/ oblicz $m_1 = \min(p_1, r_1)$; nazywaj symbolami D_1 symbole występujące t_1 razy,
- 5/ gdy $m_1 = 1$ generuj okres $C_1^{c_1} D_1$ i zatrzymaj program,
- 6/ oblicz $n_1 = E(c_1/t_1)$,
- 7/ oblicz $p_{1+1} = c_1 - m_1 n_1$,
- 8/ oblicz $r_{1+1} = m_1 - p_{1+1}$,
- 9/ generuj r_{1+1} podokresów $C_1^{n_1} D_1$; nazywaj je B_{1+1} ,
- 10/ generuj p_{1+1} podokresów $C_1^{n_1+1} D_1$; nazywaj je A_{1+1} ,
- 11/ przejdź do kroku 3/.

Algorytm powyższy jest podobny do /znanego z teorii liczb/ algorytmu Euklidesa znajdowania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb.

Odmianą metodę strukturalnej dyskretyzacji prostej prezentuje Stamopoulos w 1974 r. Do dyskretyzacji prostej stosuje on komórkowy procesor obrazu oraz algorytmy pocieniania. Zasada działania algorytmu dyskretyzacji opartego na tej metodzie jest następująca.

Na punktach końcowych dyskretyzowanego odcinka buduje się równoległobok za pomocą linii, poprowadzonych w dwóch sąsiednich /na danej siatce/ kierunkach, ograniczających obustronnie kierunek, określony przez odcinek linii dyskretyzowanej. Tak zbudowany równoległobok rozważa się jako obraz dyskretny, w którym każdy węzeł siatki jest "czarną" komórką tego obrazu. Z kolei stosuje się algorytm pocieniania, który przekształca ciemny obszar płaszczyzny dyskretnej w dyskretny kontur /złożony z węzłów siatki/.

Jakość dyskretyzacji odcinka zależy praktycznie od doskonałości działania algorytmu pocieniania. Autor podaje dwa różniące się między sobą algorytmy pocieniania, stosowane w proponowanym algorytmie dyskretyzacji. Pierwszy z nich eliminuje czarne punkty, które mają czterech białych sąsiadów i czterech czarnych /na siatce 8-spójnej/. Drugi eliminuje te czarne punkty, które mają czterech białych sąsiadów oraz trzech lub czterech czarnych. Obydwa algorytmy są rotacyjne i asymetryczne, działają kolejno w jednym, a następnie w innym kierunku, usuwając selektywnie punkty spełniające warunek pocieniania.

Algorytm pierwszy generuje linię dyskretną podobną jak algorytmy warunkowe na siatce 4-spójnej. Algorytm drugi - podobną, jak algorytmy warunkowe na siatce 8-spójnej. Obydwie linie dyskretne są jednak mniej doskonałe niż linie generowane przez warunkowe algorytmy dyskretyzacji na siatkach odpowiednio 4- i 8-spójnych.

Podobnego typu algorytmy zaproponował Stamopoulos również dla siatki 6-spójnej /heksagonalnej/.

Arcelli i Mossarotti, wykorzystując uzyskane wyniki badań teoretycznych nad regularnymi łukami cyfrowych konturów, wykazują w 1978 r., za pomocą analizy strukturalnej, że algorytm prostej, zaproponowany przez Bronsa w 1974 r. rzeczywiście generuje prosty cyfrowy łuk, tj. dyskretyzuje segment prostej, a jej dyskretna postać spełnia tzw. zależność cięciwy.

Proces generacji linii za pomocą algorytmu Bronsa jest równoległy, przez co należy rozumieć, że w każdym stadium generacji cyfrowych łuków /tworzących generowany segment/ pozostają one niezależne /tj. nie połączone/. Segment otrzymuje się w końcowym stadium generacji.

Arcelli i Massarotti twierdzą, że algorytm Bronsa konstruuje tak regularne, jak i nieregularne łuki. Modyfikacja wymaga wprowadzenia funkcji pomocniczych:

$$\delta_1 \stackrel{\text{def}}{=} 1/(b_1 - r_1) \quad \text{dla } b_1 > r_1$$

$$\delta_1 \stackrel{\text{def}}{=} -1/(b_1 - r_1) \quad \text{dla } b_1 < r_1,$$

parametru t_1 , a także dodatkowych operacji wewnątrz algorytmu:

3a/ oblicz δ_1 ;

3b/ gdy $t=0$, przyjmij $t_1=1$, dla pozostałych t przyjmij $t_1 = t_{1-1} \cdot \delta_1$;

8a/ gdy $r_{i+1} = b_{i+1}$ generuj podokres $A_{i+1}B_{i+1}$, gdy $t_1=1$ lub podokres $B_{i+1}A_{i+1}$, gdy $t_1=-1$ i zatrzymaj program.

Natomiast operacje wyszczególnione w punktach 7/ i 8/ algorytmu Bronsa należy zastąpić poniższymi:

7/ generuj r_{i+1} podokresów $C_1^{n_1}D_1$, gdy $t_1=1$ lub podokresów $D_1C_1^{n_1}$ gdy $t_1=-1$, nazywaj je B_{i+1} ;

8/ generuj b_{i+1} podokresów $C_1^{n_1+1}D_1$, gdy $t_1=1$ lub podokresów $D_1C_1^{n_1+1}$ gdy $t_1=-1$, nazywaj je A_{i+1} .

Zmodyfikowany w ten sposób algorytm Bronsa generuje regularne i proste cyfrowe łuki w każdym stadium generacji.

Arcelli i Massarotti proponują również inną modyfikację algorytmu Bronsa. Twierdzą, że algorytm wyjściowy należy odwrócić i podzielić na dwie części. Część I powinna identyfikować hierarchiczną strukturę generowanej linii oraz generować sekwencje liczb naturalnych $f_0, f_1, \dots, f_k, g_0, g_1, \dots, g_k$, które w zapisie łańcucha kodowego są wykładnikami /odpowiednikami wielkości r_{i+1}, p_{i+1} /. Gdy tylko znane są kody wyjściowe /"0" i "1" dla pierwszej ósemki płaszczyzny/, w wyniku znajomości tych wykładników możliwa jest generacja wymaganej linii. Część II powinna odpowiadać z grubsza krokom 7/ i 8/ algorytmu Bronsa i generować łańcuch kodów w zwartej formie.

Rothstein i Weiman w 1976 r. proponują odmienny od poprzednich algorytm strukturalnej dyskretyzacji prostej, oparty na poniższej zasadzie.

Prosta przecinająca linie siatkowe przecina każdą parę przeciwległych bądź sąsiednich boków elementarnych pól siatkowych /komórek/. Generując kod takiej prostej /leżącej w I ósemce/ wstawiamy "0" na odpowiedniej pozycji kodu wówczas, gdy prosta przecina przeciwległe boki odpowiadającej tej pozycji komórki, oraz wstawiamy "1", gdy przecina ona sąsiednie boki tej komórki. Innymi słowy: wstawiamy "1" na pozycji j kodu linii, gdy kodowana linia przecina poziomą linię siatki na odcinku między j -tą i $j+1$ -pionowymi liniami siatki.

Z tej zasady wynika w sposób oczywisty maksymalnie możliwa jednolitość uszeregowania "1" w kodzie linii.

Otrzymany tym sposobem kod linii $y=(p_0/q_0)x$ jest periodyczny, gdy q_0 i p_0 są względem siebie pierwsze. Długość okresu jest wtedy q_0 , p_0 jest liczbą "1" w okresie. Ciąg (kq_0, kp_0) , $k=1, 2, 3, \dots$ wyznacza te węzły siatki, przez które przechodzi zadana linia.

Zasadniczą różnicą między kodem prostej otrzymanym powyższym sposobem i kodem prostej generowanym za pomocą algorytmu Bronsa jest przesunięcie w fazie okresów tych kodów. Cykliczne permutacje grup kodowych w opisywanym kodzie zależą od nachylenia linii. Zależność ta jest jednak dość złożona.

W 1979 r. Coderberg opisuje algorytm równoległej generacji linii prostej, w którym problemem centralnym jest jak najbardziej jednorodne uszeregowanie /rozstawienie/ elementów w kodowej reprezentacji linii oraz problem centrowania linii.

Rozstawienie elementów we freemanowskiej reprezentacji linii odbywa się wg następującej zasady.

Niech

$$C \in [0, 2, 4, 6], \quad D \in [1, 3, 5, 7], \quad |C-D|_{\text{mod}8} = 1$$

$$q_0 \stackrel{\text{def}}{=} \Delta x - \Delta y, \quad p_0 \stackrel{\text{def}}{=} \Delta y, \quad \text{dla } q_0 \geq p_0$$

Ciąg kodów $C^{q_0 D^{p_0}}$ tworzy tzw. 0-aproksymację.

Przyjmując liniową zależność między q_0 i p_0

$$q_0 = m_0 p_0 + n_0$$

i zapisując powyższą zależność w postaci

$$q_0 = m_0(p_0 - |n_0|) + (m_0 + k_0) |n_0|, \quad k_0 = \text{sgn}(n_0)$$

otrzymuje się kodowe /permutacyjne/ grupy pierwotne

$$(C^{m_0 D})^{p_0 - |n_0|} (C^{m_0 + k_0 D})^{|n_0|}$$

tworzące tzw. 1-aproksymację. Aby dojść do idealnej prostej, grupy te powinny zmieniać się tak często, jak to jest tylko możliwe. W związku z tym kolejny, 1-stopień /poziom/ rozstawiania osiąga się przez poniższe czynności:

$$q_1 \stackrel{\text{def}}{=} p_0 - |n_0| \stackrel{\text{def}}{=} m_1 p_1 + n_1$$

$$p_1 \stackrel{\text{def}}{=} n_0$$

Otrzymuje się w ten sposób $p_1 - |n_1|$ dodatkowych grup permutacyjnych postaci $(C^{m_0 D})^{m_1} (C^{m_0 + k_0 D})$ oraz $|n_1|$ grup postaci $(C^{m_0 D})^{m_1 + k_1} (C^{m_0 + k_0 D})$.

Ogólna postać grup kodowych reprezentujących linię jest następująca:

$$\left\{ \dots \left\{ [(C^{m_0 D})^{m_1} (C^{m_0 + k_0 D})]^{m_2} [(\dots)^{m_1 + k_1} (\dots)]^{m_3} \left\{ \dots \dots \right\}^{m_t} \times \left\{ \dots \left\{ \dots \right\}^{m_3 + k_3} \left\{ \dots \dots \right\} \right\}^{p_t} / 2.1/ \right\}$$

Parametry i-tego poziomu rozstawienia wyznacza się na podstawie zależności:

$$q_i = m_i p_i + n_i$$

$$p_i - |n_i| \geq |n_i|$$

$$q_i = p_{i-1} - |n_{i-1}|$$

$$p_i = |n_{i-1}|$$

$$k_i = \text{sgn}(n_i)$$

Algorytm kończy działanie, gdy $n_t = 0$. $p_t > 1$ oznacza $(p_t - 1)$ przecięć cyfrowej i zadanej linii.

Otrzymana za pomocą tego algorytmu linia cyfrowa nie zawsze jest scentrowana /wypośrodkowana/ na linii zadanej, chociaż rozpoczyna się i kończy w punktach zadanych. Idealne wypośrodkowanie powinno doprowadzać linię cyfrową do postaci, w której odpowiadająca jej linia średnia arytmetyczna pokrywa się z linią zadaną.

Coderberg zastosował metodę centrowania wynikającą wprost z hierarchicznego zapisu linii /2.1/ i polegającą na przestawieniu kolejności występowania poszczególnych członów równania linii /2.1/. Centrowanie segmentów linii cyfrowej odbywa się na każdym poziomie rozstawienia w sposób poniższy.

Gdy $n_0 = 0$, wówczas równanie /2.1/ ma postać $[C^{m_0 D}]^{b_0}$ i rozwiązanie problemu centrowania osiąga się sprowadzając grupę $C^{m_0 D}$ do postaci $C^{m_0/2} D C^{m_0/2}$, gdy m_0 jest parzyste, oraz do postaci /równoważnych/ $C^{(m_0+1)/2} D C^{(m_0-1)/2}$ lub $C^{(m_0-1)/2} D C^{(m_0+1)/2}$, gdy m_0 jest liczbą nieparzystą.

Gdy $n_0 \neq 0$, wówczas, zależnie od parzystości bądź nieparzystości m_0 , dzielimy na połowę bądź to m_0 , bądź $(m_0 + k_0)$.

Wprowadzając oznaczenia:

$$C_1 = C^{m_0 D}$$

$$D_1 = C^{m_0 + k_0 D}$$

$$C_2 = C_1^{m_0 D_1}$$

$$D_2 = C_1^{m_0 + k_0 D_1}$$

możemy nadać regule centrowania linii następującą treść:

Każdy poziom rozstawienia zawiera C_1 grupy oraz D_1 grupę; gdy m_0 jest parzyste, wówczas generacja wektora rozpoczyna się w środku grupy C_1 , gdy m_0 jest nieparzyste - w środku grupy D_1 .

Sytuacja na następnym poziomie jest następująca. Gdy m_0 jest nieparzyste i punkt początkowy znajduje się w grupie D_1 , wówczas zależnie od parzystości bądź nieparzystości m_1 grupa D_1 umiejscowiona jest w środku grupy C_2 bądź w środku D_2 . W obydwu przypadkach po D_1 następuje $C_1^{m_1 D_1}$. Gdy m_0 jest parzyste, wówczas są dwa przypadki, zależnie od m_1 . Gdy m_1 jest nieparzyste, to punkt środkowy jest w C_2 i następuje podział liczby $(m_1 - 1)/2$, gdy m_1 jest parzyste - punkt środkowy jest w D_2 i następuje podział liczby $(m_1 + k_1 - 1)/2$.

Powyższa zasada obowiązuje dla każdego poziomu. Reguła używana na danym poziomie jest określona przez wybór punktu środkowego na poziomie o 2 niższym.

Metoda centrowania zależna jest więc od parzystości m_1 oraz miejsca znalezienia linii środkowej na poprzednim poziomie.

Generacja linii opisaną tu metodą realizowana jest więc w trzech poniższych etapach:

- iteracyjne wyliczanie stałych m_1 , k_1 , p_1 ,
- permutacja członów równania /2.1/,
- generacja przyrostów dla kolejnych grup permutacyjnych.

2.2. Dyskretyzacje warunkowe na siatkach kwadratowych 4- i 8-spójnych

Dyskretyzacje warunkowe oparte są na założeniu, że na punkty aproksymujące krzywą wybierane są te węzły siatki, które spełniają pewien warunek /zwykle arytmetyczny/. Warunek ten wybiera z reguły węzły najbliższe krzywej w sensie określonej metryki, np. wybierany jest punkt:

1/ bliższy linii zadanej, w sensie odległości liniowej mierzonej prostopadłe do linii bądź wzdł

- osi układu, bądź
- 2/ leżący po przeciwnej stronie linii zadanej niż poprzednio wybrany punkt, bądź
 - 3/ z najmniejszym modułem wartości funkcji, bądź
 - 4/ z modułem wartości funkcji leżącym w pewnym /określonym dla każdej z krzywych/ zakresie /podanie tolerancji/, bądź
 - 5/ w którym pewna funkcja kontrolna jest większa, bądź mniejsza od zera,
- itp.

W literaturze opisane są liczne różne algorytmy warunkowej dyskretyzacji krzywych na kwadratowych siatkach 4- i 8-spójnych. Dotyczą one z reguły dyskretyzacji prostej, bądź też prostej i okręgu, czy krzywych algebraicznych 2-stopnia, a nawet i wyższych stopni. Różnią się między sobą postacią warunku decyzyjnego, rodzajem i liczbą stosowanych operacji arytmetycznych oraz szybkością działania i zajętością pamięci operacyjnej. Istotną rolę w algorytmach warunkowych odgrywa postać warunku decyzyjnego, która w zasadzie określa złożoność oraz szybkość działania algorytmu.

Najliczniej i najwcześniej opisane zostały algorytmy dyskretyzacji linii, w których węzeł aproksymujący wybierany jest wg zasady minimalizacji jego odległości liniowej /euklidesowej, bądź mierzonej wzdłuż osi układu x lub y /.

Stockton w 1963 r. jako pierwszy opisuje aproksymację linii prostej na siatce 8-spójnej, w której węzły aproksymujące są wybierane na zasadzie minimum odległości mierzonej wzdłuż osi x bądź y od prostej zadanej. W algorytmie zastosował on arytmetykę całkowitoliczbową oraz tylko proste operacje typu sumowania i przesunięć w rejestrze binarnym.

Bresenham w 1965 r. prezentuje algorytm całkowitoliczbowej aproksymacji prostej oparty na podobnej zasadzie co algorytm Stocktona /minimum odległości węzła od prostej - odległości mierzonej wzdłuż jednej z osi x bądź y / . Algorytm Bresenhama jest jednak znacznie szybszy /o ok. 50%/ i oszczędniejszy pamięciowo /jest zakodowany zwięźle - wymaga około półtora raza mniej miejsca w pamięci komputera/. Podobnie, jak algorytm Bresenhama, używa jedynie prostych operacji typ: sumowania i porównywania modułów liczb.

Pitteway w 1968 r. rozszerza algorytm Bresenhama na krzywe 2-stopnia zachowując sposób minimalizacji błędu liniowego, mierzonego wzdłuż osi układu. Rzeczywisty błąd aproksymacji krzywych 2-stopnia jest w tym algorytmie jednak większy od błędu aproksymacji prostej, gdyż w algorytmie Pitteway'a pomiar odległości węzłów siatki od krzywej został zamieniony pomiarem odległości węzłów od stycznej do krzywej, wystawionej w bieżącym węźle siatki. Jeśli więc moduł siatki jest dostatecznie mały /w stosunku do krzywizny krzywej/, to i błąd popełniony z powodu powyższej zamiany jest mały.

Algorytm jest jednak złożony. W każdej ósemce płaszczyzny obowiązują różne wzory, a zależności sprawdzające przejścia do sąsiednich ósemek są skomplikowane, chociaż używane są jedynie proste operacje sumowań i komparacji modułów liczb całkowitych.

Botting i Pitteway w 1968 r. podają zależności rozszerzające algorytm Pitteway'a na Krzywe 3-stopnia. Nie podają jednak żadnych danych na temat złożoności implementacji tego algorytmu. Sądzic jednak należy, że jest ona znacznie większa niż w wypadku algorytmu dla prostej czy krzywych 2-stopnia.

Metzger w 1969 r. proponuje warunkowe algorytmy dyskretyzacji prostej, okręgu i paraboli /dla każdej z tych linii oddzielny algorytm/, w których punkty dyskretyzujące wybierane są według kryterium min. odległości liniowej od linii, mierzonej prostopadłe do linii. Dla przypadku linii prostej, odpowiednie wyrażenia warunkujące wybór punktu są identyczne, jak proponowane przez Bresenhama w 1965 r. Dla okręgu wzór podany przez Metzgera na wartość, której znak określa wybór punktu, jest dość złożony, wymaga potęgowania wartości współrzędnych punktu bieżącego, a poza tym nie jest to wzór ogólny. W każdej z ósemek płaszczyzny obowiązuje inny. Dla przypadku paraboli obowiązujące

wzory są jeszcze bardziej złożone, wymagają pierwiastkowania liczb rzeczywistych i również zależne są od ósemki płaszczyzny, w której jest położona dyskretyzowana linia.

W sumie algorytmy proponowane przez Metzgera są złożone, nieuniwersalne, określone nie tylko oddzielnie dla każdej z wymienionych linii, ale również są różne dla każdej z ósemek płaszczyzny. Błędy aproksymacji za pomocą tych algorytmów są jednak małe nie przekraczają połowy modułu siatki h.

Freeman w 1970 r. daje dwa ogólne schematy aproksymacji /dyskretyzacji/ dowolnych krzywych płaskich na siatkach kwadratowych. Jeden z nich, zwany "schematem dyskretyzacji metodą przecięć siatki" polega na rejestrowaniu punktów przecięcia się krzywej z nałożoną na płaszczyznę siatką i zastępowaniu tych punktów najbliższymi położonymi węzłami siatki /najbliższymi w sensie liniowych odległości mierzonych wzdłuż osi układu współrzędnych/. Ten schemat dyskretyzacji odpowiada tzw. dyskretyzacji na siatce 8-spójnej.

Według innego schematu dyskretyzacji krzywych zaproponowanego przez Freemana w 1970 r., zwanego dyskretyzacją typu "kwadratowa skrzynka" i odpowiadającej dyskretyzacji na siatce 4-spójnej, punkt łańcucha aproksymującego otrzymuje się, gdy krzywa przechodzi przez kwadrat równy elementarnemu polu siatki /komórce siatki/, umieszczony symetrycznie wokół każdego węzła siatki.

Horn w 1976 r. opisuje algorytmy dyskretyzacji prostej i okręgu działające na zasadzie przecięć siatki, opisanej przez Freemana w 1970 r.

W wypadku prostej Horn twierdzi, że należy wyznaczać te punkty siatki, dla których wielkość $\delta = px - qy + \frac{1}{2}$ jest najmniejsza z liczb dodatnich /minimalizacja odległości liniowej wzdłuż jednej z osi układu/. Obliczanie wartości δ ($-q \leq \delta \leq p$) jest jednak istotą algorytmu Bresenhama z 1965 r. generacji prostej.

W wypadku okręgu wzór na δ /dla pierwszej ósemki płaszczyzny/ ma postać:

$$\delta = (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 - R^2$$

Dla okręgu zakres zmian δ jest $-2x \leq \delta \leq 2y$.

Ten sposób wyznaczania ciągu punktów aproksymujących jest równoważny z wyliczaniem punktów skrajnych dla każdego z poziomych rzędów okręgu wg następującego wzoru:

$$x = \left\lfloor R^2 - y^2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą całkowitą nie większą od x.

Złożoność algorytmów jest duża i jest spowodowana odmiennością wzorów w każdej z ósemek płaszczyzny, na podstawie których wyznacza się współrzędne węzłów aproksymujących.

Badler w 1977 r. modyfikuje algorytm Horna z 1976 r. do postaci, w której generuje on w stosunkowo prosty i szybki sposób /używając jedynie operacji sumowania i binarnego przesunięcia w rejestrze/ dysk kołowy oraz pole obszaru prostokątnego. Jak twierdzi Badler, algorytm jest wystarczająco szybki do generacji dysku kołowego w czasie rzeczywistym dla regeneracji obrazu na rastrowym monitorze graficznym, wymagającym odnawiania obrazu z częstotliwością 50 Hz.

Kulpa w 1979 r., rozważając dyskretyzację całkowitoliczbową okręgu, zaproponowaną przez Horna w 1976 r. wykazuje, że w przypadku stosowania jako kryterium dyskretyzacji minimum odległości liniowej wzdłuż jednej z osi układu, w dyskretyzacji okręgu mającego parametry całkowitoliczbowe, nie występuje przypadek dwuznaczności w wyborze punktu-węzła na węzeł ciągu aproksymującego.

Stosunkowo liczną grupę stanowią algorytmy, w których punkt aproksymujący jest wybierany na podstawie wyniku testowania kombinacji znaków wartości $F(x,y), \Delta F(x,y), F_x, F_y$ według zasady, aby $F(x,y)$ nie wzrastała /wzrastała możliwie najmniej/.

Partridge w 1968 r., w aproksymacji krzywej 2-stopnia używa wartości funkcji $F(x,y)$ jako kryterium odchylenia punktu. Do wyznaczania wartości funkcji, w kolejnych punktach ciągu aproksymującego Partridge wykorzystuje rozwinięcie funkcji $F(x,y)$ w szereg Taylora. Następny ruch wybierany jest w takim kierunku, aby $F(x,y)$ była możliwie bliska zeru. Kierunek ruchu wzdłuż krzywej nie zmienia się, jeśli wartość funkcji w węźle bieżącym oraz przyrost wartości funkcji, powstający w trakcie przejścia do następnego punktu, mają przeciwne znaki.

Zaproponowany algorytm jest prosty i przejrzysty.

Danielsson w 1970 r. opisuje podobny algorytm, w którym znak wartości funkcji $F(x,y)$ jest wykorzystywany do określenia kierunku następnego kroku.

W odróżnieniu od podejścia Partridge, w podejściu Danielssona przemieszczenia mogą odbywać się jedynie w czterech kierunkach /aproksymacja na siatce 4-spójnej/. Kierunek następnego ruchu zależy od znaków funkcji $F(x,y)$ i jej pochodnych cząstkowych F_x i F_y w punkcie bieżącym. Wybieranie ruchu następuje wg zasady, aby nie powiększać bezwzględnej wartości $F(x,y)$.

Algorytm generuje "mało gładkie" krzywe i niejednoznacznie - ztraca symetrię krzywych.

Bresenham w 1977 r. prezentuje algorytm całkowitoliczbowej dyskretyzacji okręgu, w którym wybór kolejnego punktu na węzeł ciągu aproksymującego dokonywany jest na podstawie znaków F_1 - wartości funkcji, $F(x,y)$ w punkcie (x_1+1, y_1-1) oraz znaków pewnych wartości δ /wzory dotyczą 8-osemki płaszczyzny/:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 2F_1 + 2y_1 - 1 && \text{dla } F_1 < 0, \\ \delta_1 &= 2F_1 - 2x_1 - 1 && \text{dla } F_1 > 0. \end{aligned}$$

Algorytm jest jednak dość złożony, gdyż występuje w nim dużo operacji pomocniczych, polegających na przesuwanie okręgu do środka układu, określeniu początkowej ósemki płaszczyzny i śledzeniu przechodzenia punktu bieżącego do kolejnych ósemek płaszczyzny.

Bresenham udowadnia jednak, że wybrane za pomocą jego algorytmu węzły na ciąg aproksymujący są wybrane najlepiej wg trzech różnych kryteriów dokładności:

- minimum kwadratu odległości od okręgu zadanego,
- minimum modułu residuum funkcji w punkcie-węźle oraz
- minimum odległości liniowej między okręgiem i punktem-węźłem /gdy tylko środek i promień okręgu są całkowitoliczbowe/.

Między tymi kryteriami istnieje, dla przypadku okręgu, następująca zależność.

Wyrażenia na δ i δ' można przepisać w postaci:

$$\begin{aligned} \delta &= 2 \left\{ (x_1 + 1)^2 + (y_1 - \frac{1}{2})^2 - (R^2 - \frac{1}{4}) \right\} \\ \delta' &= 2 \left\{ (x_1 + \frac{1}{2})^2 + (y_1 - 1)^2 - (R^2 - \frac{1}{4}) \right\} \end{aligned}$$

co jest podwojoną resztą /wartością funkcji $F(x,y)$ /okręgu o promieniu $(R^2 - \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$ wyznaczoną w punktach $(x_1+1, y_1-\frac{1}{2})$ i $(x_1+\frac{1}{2}, y_1-1)$.

Formuła decyzyjna ma, dla tego przypadku, postać:

jeśli $\delta < 0$, to ruch wzdłuż x
jeśli $\delta' > 0$, to ruch wzdłuż $-y$

w przeciwnym razie ruch po przekątnej $(x,-y)$.

Algorytm Pittway'a z 1968 r., stosując tę samą formułę decyzyjną, używa wartości promienia r , a nie $(R^2 - \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$.

Stosunkowo liczną grupę stanowią algorytmy, w których na w. ze! aproksymujący wybierany jest taki węzeł z otoczenia krzywej, dla którego $F(x,y)$ jest minimalne.

Jordan i inni w 1973 r. opisują metodę całkowitoliczbowej dyskretyzacji krzywych 2-stopnia na siatce 8-spójnej, w której moduł wartości funkcji $F(x,y)$ przyjęty został jako miara oddalenia węzła od krzywej. Kolejnym punktem ciągu aproksymującego jest jeden z trzech węzłów sąsiednich, wyznaczonych przez kierunek ruchu oraz kierunki różniące się o $\pm \frac{\pi}{4}$, ten, w którym moduł wartości funkcji ma wartość najmniejszą. Na każdym kroku aproksymacji należy więc obliczyć moduły wartości funkcji w trzech sąsiednich węzłach i wybrać na kolejny punkt ciągu aproksymującego węzeł z najmniejszym modułem $F(x,y)$.

McLain w 1974 r., rozważając dyskretyzację krzywych $F(x,y)=0$ na siatce kwadratowej, krzywa w elementarnym polu siatki przybliża odcinkiem prostej, łączącym rogi tego obszaru w taki sposób, aby zminimalizować bezwzględną wartość $|F(x,y)|$.

A. Ziemkiewicz w 1975 r. opisuje metodę całkowitoliczbowej aproksymacji okręgu na siatce 8-spójnej, całkowicie podobną do metody Jordana i innych z 1973 r. W tej metodzie aproksymuje się okrąg również tymi węzłami, w których $F(x,y)$ jest minimalne.

Zagadnienie dyskretyzacji okręgu sprowadził on do wyprowadzenia rekursyjnej zależności, służącej do wyznaczania wartości błędu w węzłach z otoczenia punktu bieżącego. Obliczanie zmiennych występujących w zależności rekursyjnej jest jednak złożone, sprowadza się bowiem do działania na macierzach 3×3 oraz uzależnione jest od numeru ósemki płaszczyzny, na której położony jest zdyskretyzowany okrąg.

A. Ziemkiewicz wykazuje również, że aproksymacja okręgu wg kryterium $\min |F(x,y)|$ daje mniejszy od $\frac{1}{2}$ błąd dyskretyzacji, tj. $|R^2 - d_1^2| < R - \frac{1}{4}$, a stąd $|d_1 - R| < \frac{1}{2}$ /co jest prawdziwe pod warunkiem, że promień okręgu i jego środek mają współrzędne całkowite/ i jest równoważna kryterium minimum odległości euklidesowej.

W sumie algorytm A. Ziemkiewicza jest mniej atrakcyjny niż algorytm Jordana.

Rubin w 1976 r. proponuje ulepszenie algorytmu Jordana i innych z 1973 r. twierdząc, że kierunek ruchu wzdłuż krzywej należy wybierać tylko raz na początku algorytmu, a następnie przyjmować ten, w którym został wykonany ostatni ruch. Przy tym założeniu będzie można wyeliminować ograniczenie na $F(x,y)$, że musi ono być algebraiczne i różniczkowalne. Funkcja ta nie może się jednak zbyt szybko zmieniać, tzn. więcej niż o $\frac{\pi}{4}$ w jednostce rastru.

Belser w 1976 r. wysuwa wniosek, że algorytm Jordana z 1973 r. nie śledzi poprawnie wszystkich krzywych 2-stopnia, i że przyjęcie $|F(x,y)|$ jako miary odległości punktu od krzywej jest dobre jedynie dla prostej i okręgu.

Ponadto zarzuca Jordanowi, że nieprecyzyjnie formułuje warunki, przy których aproksymacja jest całkowicie poprawna. Termin "dobrze zachowująca się funkcja" jest terminem nic nie mówiącym. Natomiast algorytm Jordana źle dyskretyzuje niektóre krzywe, np. krzywą $y - 2x^2 = 0$.

Ramot w 1976 r. proponuje rozszerzenie algorytmu Jordana na krzywe 3-stopnia.

Analizując działanie algorytmu śledzenia krzywej $F(x,y)$ na 8-spójnej siatce kwadratowej, Sutcliffe w 1976 r., również zauważa, że kierunek ruchu wzdłuż krzywej należy określić jedynie raz, na początku działania algorytmu. Kierunki kolejnych ruchów wzdłuż krzywej nie powinny różnić się od siebie więcej niż o $\pm \frac{\pi}{4}$. Rozważa również występujące w algorytmie zjawisko wybierania lokalnych minimum funkcji bez sprawdzania jej znaku i zjawisko "ześlizgiwania się z krzywej" oraz jej degeneracji.

Sugeruje on, aby w trakcie śledzenia krzywej w rejonach, w których może zaistnieć zjawisko "ześlizgiwania się z krzywej" /tj. wyboru węzłów siatki z lokalnym minimum $|F(x,y)|$ / obliczyć wartości funkcji $F(x,y)$ i kontrolować jej znaki w trzech sąsiednich węzłach wyznaczonych przez kierunek

ruchu bieżącego i kierunku różniące się od niego o $\pm \frac{\pi}{4}$. Gdy wartość funkcji przyjmuje różne znaki, śledzenie przebiega prawidłowo. Gdy znaki są jednakowe, wówczas należy włączyć do algorytmu śledzenia dodatkowe operacje, realizujące rozwiązywanie równania kwadratowego, otrzymanego z funkcji $F(x,y)$ przez przyrównanie jednej ze współrzędnych do zera i zmiany drugiej w zakresie ± 1 . Jest to jednak zabieg bardzo czasochłonny, stąd zalecany tylko w nadzwyczajnych wypadkach. Inną, zalecaną przez Sutcliffe operacją jest zmiana kierunku śledzenia krzywej.

Chung w 1977 r. analizuje algorytm Jordana z 1973 r. i twierdzi, że jakiegokolwiek porównania algorytmów mają sens tylko wtedy, gdy robi się je wg jednolitych, ściśle określonych kryteriów. Według niego takimi kryteriami mogą być:

- 1/ symetria i jednolitość aproksymacji, co zapewnia estetykę figur i funkcjonalność algorytmów;
- 2/ dokładność aproksymacji, mierzona miarami:
 - a/ $|R-d_{ij}|$, R - promień, d_{ij} - odległość węzła od okręgu wyjściowego,
 - b/ moduł wartości funkcji $|F(x_i, y_i)|$;
 - c/ różnica $|\text{pole okręgu wyjściowego} - \text{pole ograniczone łamaną}|$;
- 3/ złożoność obliczeniowa, prędkość aproksymacji oraz ekonomia.

Zdaniem autora generacja okręgu za pomocą algorytmu Jordana jest równoważna generacji okręgu metodą łańcucha resztowego, opisaną przez Freemana w 1969 r., minimalizującą odległość liniową węzła od okręgu wyjściowego.

Podobne do algorytmów Jordana są również algorytmy opisane przeze mnie w 1977 r. /algorytmy dyskretyzacji krzywych 2-stopnia na siatkach kwadratowych 4- i 8-spójnych/. Podstawowa różnica w stosunku do algorytmu Jordana polega na wprowadzeniu do algorytmu zależności typu $>$, $<$ między pochodnymi I-rzędu funkcji $F(x,y)$ w węźle bieżącym, co umożliwiło wyznaczanie kolejnego węzła ciągu aproksymującego jako jednego z dwóch sąsiednich węzłów, a nie trzech, jak to jest w algorytmie Jordana. Ten zabieg uprościł w pewnym stopniu algorytm oraz przyspieszył go.

W wspomnianej publikacji z 1977 r., przeprowadziłem również globalną i lokalną ocenę dokładności dyskretyzacji krzywych 2-stopnia na kwadratowych siatkach 4- i 8-spójnych. Zgodnie z tą oceną kres górny błędu szczytowego dyskretyzacji dowolnego okręgu metodą minimalizacji wartości funkcji $F(x,y)$ nie przekracza h oraz $h \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ odpowiednio dla siatki 4- i 8-spójnej.

S.Paszkowski w 1978 r., rozważając dyskretyzację okręgu na siatce kwadratowej 8-spójnej również wykorzystuje moduł wartości funkcji do wyboru węzłów na ciąg aproksymujący. Stawia jednak warunek, aby wykorzystywane w algorytmie parametry miały wartości jak najmniejsze i to całkowite.

Prezentowany przez niego algorytm jest optymalny w tym sensie, że w swojej podstawowej, cyklicznie powtarzanej części działa wyłącznie na liczbach całkowitych, i jak najmniejszych wartościach nie przekraczających wartości promienia okręgu /dokładniej $R + \frac{1}{2}$ /. Udowadnia poza tym, że tej granicznej wartości nie da się obniżyć dla dowolnych okręgów /o parametrach całkowitoliczbowych/.

Inny od poprzednich algorytm dyskretyzacji prostej i okręgu na siatce 8-spójnej; proponują Suenaga i in. w 1979 r. Do wyznaczania kolejnych węzłów aproksymujących wykorzystują oni również wartość modułu funkcji, z tą jednakże różnicą w stosunku do algorytmów wcześniej opisanych, że nie wybierają węzła z najmniejszym modułem $F(x,y)$, lecz węzeł, dla którego $F(x,y) \leq T$, gdzie T jest pasmem tolerancji dyskretyzacji krzywych, ustalonym indywidualnie dla każdego typu krzywej. Dla prostej $T_p = \frac{h}{2}$ / h - moduł siatki/. Jest ono równe wartości funkcji opisującej płaszczyznę sześcienną $z=ay-bx$ w punkcie, którego rzut na płaszczyznę xy jest węzłem odległym o $\frac{h}{2}$ od krawędzi przecinania się płaszczyzn: z oraz xy . Dla okręgu $T_{ok} = R$ jest ono równe wartości funkcji opisującej paraboloidę $z=x^2+y^2-R^2$ w punkcie, którego rzut na płaszczyznę xy /tworzącej na przecięciu z paraboloidą okrąg/ jest odległy od aproksymowanego okręgu nie więcej niż $\frac{1}{2}h$. Autorzy twierdzą również, że przy tej wartości pasmo tolerancji wokół okręgu ma szerokość większą od modułu siatki.

Błędy dyskretyzacji wykonywanej za pomocą tego algorytmu są identyczne lub niewiele większe od błędów algorytmów Jordana. Niższe niż w algorytmie Jordana są jednak wymagania dotyczące zajętości pamięci. Szybkość dyskretyzacji, tj. liczba operacji potrzebnych do wyznaczenia jednego węzła jest znacznie mniejsza niż w algorytmie Jordana, mniejsza niż w innych algorytmach z wyjątkiem algorytmu Danielssona. Zdaniem autorów, jedynym mankamentem metody jest konieczność określenia a priori typu generowanej linii oraz określenie wartości T - pasma tolerancji dyskretyzacji.

2.3. Dyskretyzacje strukturalno-warunkowe na siatkach 8-spójnych

W dyskretyzacjach strukturalno-warunkowych występują na pewnym etapie działania algorytmu operacje typowe dla podejścia strukturalnego, a następnie operacje typowe dla podejścia warunkowego, np. początkowy podział dyskretyzowanego odcinka linii na podokresy z zastosowaniem podejścia strukturalnego, a następnie wybór kolejnych węzłów dyskretyzujących dla jednego z podokresów, z zastosowaniem podejścia warunkowego i proste przeniesienie kolejności wybranych punktów na pozostałe podokresy.

Tego typu dyskretyzacje łączą w sobie zalety obydwu metod: prostotę obliczeniową algorytmów warunkowych oraz przejrzystość struktury linii cyfrowych algorytmów strukturalnych. Dotyczą jednak tylko linii prostych.

Z literatury znanych jest zaledwie kilka publikacji na temat tego typu dyskretyzacji.

Reggiori w 1972 r. opisuje algorytm dyskretyzacji prostej, który wykorzystuje tak podejście warunkowe /sekwencyjne/, jak również podejście strukturalne /równoległe/. W metodzie Reggiori podejście strukturalne zastosowane jest jeden raz. W wyniku powstają dwa podokresy. Do każdego z nich stosowane jest podejście warunkowe.

Zastosowana tu metoda dyskretyzacji prowadzi do bardziej wydajnego algorytmu niż metoda warunkowa i może być stosowana bardzo prosto, w odróżnieniu od algorytmu strukturalnej generacji, który jest złożony.

Bongiovanni i inni w 1976 r. przedstawiają algorytm dyskretyzacji /generacji/ prostej, w którym generacja linii dyskretnej odbywa się w dwóch etapach. W pierwszym etapie określone są /na podstawie podanego przez autorów równania dyskretnej prostej/ punkty-węzły /elementarne ruchy wzdłuż linii siatkowych/, tworzące w strukturze prostej dyskretnej okres. Drugi etap generacji polega na cyklicznym powtarzaniu wyznaczonych w pierwszym etapie ruchów /tworzących okres/, aż do stanu, w którym zostanie osiągnięty punkt końcowy dyskretyzowanego segmentu krzywej.

Wygenerowana w ten sposób prosta dyskretna pokrywa się z prostą dyskretną wygenerowaną za pomocą algorytmów warunkowych, dobierających na punkty aproksymujące węzły siatki z minimalną odległością liniową od prostej zadanej.

Kolejność czynności w ostatnim algorytmie jest odwrotna niż w algorytmie Reggiori. Tutaj najpierw stosuje się podejście warunkowe - wyznacza się tworzące okres w strukturze prostej dyskretnej węzły aproksymujące, które są całkowitoliczbowymi rozwiązaniami równania dyskretnej prostej, a następnie stosuje się podejście strukturalne - znalezioną w pierwszym etapie grupę kodową powtarza się aż do osiągnięcia punktu końcowego segmentu.

2.4. Dyskretyzacje warunkowe na siatkach k-spójnych

Dyskretyzacje na siatkach k-spójnych są stosowane, gdy nie ma ograniczenia na maksymalną odległość między kolejnymi punktami ciągu aproksymującego. Łączy się je wtedy aproksymantami, zwykle prostoliniowymi /np. w monitorach graficznych ze sprzętowymi generatorami wektorów/, uzyskując bardziej "gładką" łamaną aproksymującą oraz znacznie mniejszą liczbę punktów aproksymujących. Co więcej

w dyskretyzacji na siatkach k -opójdnych wprowadza się warunek uzyskiwania maksymalnie możliwych odległości między sąsiednimi punktami aproksymującymi, przy założonej dokładności aproksymacji.

Tego typu dyskretyzacje są, podobnie jak i inne dyskretyzacje całkowitoliczbowe, mało znane i stosunkowo rzadko w literaturze opisywane.

W pierwszej ze znanych publikacji z 1972 r., Lappalainen i Ojala proponują prostą i szybką oraz dokładną metodę dyskretyzacji okręgu, opracowaną specjalnie do generowania testu-szablonu, pozwalającego rozpoznać niedoskonałości obrazu telewizyjnego.

Zasada działania tego algorytmu jest następująca: jedna ze współrzędnych x bądź y ciągu punktów dyskretyzujących okrąg zmienia się na każdym kroku dyskretyzacji o jedną jednostkę. Przyrost wzdłuż drugiej ze współrzędnych jest zmienny, ale również jest całkowitoliczbowy. Kwadrat odległości kolejnych punktów ciągu od środka okręgu wzdłuż drugiej ze współrzędnych jest liniową funkcją promienia okręgu oraz numeru punktu ciągu i będzie liczbą całkowitą, gdy podwojony promień okręgu R będzie liczbą całkowitą. Ma on następującą postać:

$$\begin{aligned}\delta_{i+1} &= \delta_i + 2R + 1 - 2i \\ \delta_1 &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2R\end{aligned}$$

Powyższy wzór rekursywny jest zupełnie prosty i błędów nie kumuluje. Wyznaczenie na podstawie δ_i drugich współrzędnych punktu ciągu, który jest równy pierwiastkowi kwadratowemu z liczby całkowitej δ_i autorzy realizują za pomocą bardzo naturalnej i ekonomicznej metody, polegającej na generacji sekwencji k^2+k , $k=1, 2, 3, \dots$ i porównywaniu każdej wartości $k_1^2+k_1$ z δ_i . Jako wynik tego porównania jest brane to k_1 , dla którego $k_1^2+k_1 > \delta_i$. Kwadrat wielkości k otrzymywano metodą Bruna za pomocą następujących par rekursywnych:

$$\begin{aligned}k_{i+1}^2 &= f_{i+1} = f_i + g_{i+1}, & f_1 &= 1 \\ g_{i+1} &= g_i + 2, & g_1 &= 1.\end{aligned}$$

Metoda powyższa jest bardzo prosta. W każdej pętli generacyjnej jest wymaganych zaledwie kilka operacji sumowania liczb całkowitych oraz ich porównywania. Z tych też względów jest ona bardzo szybka. Jej dokładność dyskretyzacji jest określona dokładnością wyznaczania pierwiastka kwadratowego z δ_i i jest nie gorsza niż jedna jednostka.

Oryginalną metodę całkowitoliczbowej dyskretyzacji okręgu zaproponował R. Denert w pracy z 1973 r. Punktem wyjścia w tej metodzie jest spostrzeżenie, że istnieje całkowitoliczbowe rozwiązanie równania okręgu $x^2+y^2=R^2$. Trzy liczby x_1, y_1, R_1 spełniające to równanie są zwane trójką Pitagorasa. Jedna taka trójka dostarcza ośmiu punktów na okręgu, które łącznie z czterema punktami na obu osiach dają 12 punktów aproksymujących okrąg. Ponieważ jednak trójki Pitagorasa istnieją jedynie dla nielicznych okręgów z promieniem całkowitoliczbowym, a aproksymacja dwunastobokami jest niewystarczająca, zwłaszcza dla większych okręgów, więc w tym wypadku wyznacza się również trójki dla okręgów o promieniach mniejszych. Przez punkty te i środek okręgu prowadzi się linie aż do przecięcia z okręgiem zadany. Przemieszczając się wzdłuż tych linii wg podanego algorytmu osiąga się dodatkowe punkty w pobliżu okręgu zadanego.

Metoda Denerta jest dość złożona. W szczególności jest złożone wyznaczenie dodatkowych punktów na okręgu. Poza tym podział kątowy dokonywany przez wyznaczone na okręgu punkty jest ekstremalnie nierówny, co jest przyczyną dużych błędów dyskretyzacji /rzędu kilku jednostek/. W sumie metoda ta jest mało atrakcyjna ze względu na jej złożoność i małą dokładność.

Powyższy algorytm Denerta ulepsza M.L.V. Pittewny w publikacji z 1974 r. proponując, aby kolejne punkty aproksymujące okrąg były wybierane wg ciągu $\left\{ (R-1)^2, [2i^2 R^2 - 1^4] \right\}^{1/2} / [\dots]$ - najbliższa liczba całkowita, R - promień okręgu, i - numer kolejnego punktu/. Postępując tak, otrzymuje się całkowitoliczbową aproksymację okręgu odcinkami linii prostej o mniej więcej jednakowej długości. Liczba odcinków aproksymujących jest proporcjonalna do \sqrt{R} .

Ostatni algorytm, w porównaniu z algorytmem Denerta, ma tę przewagę, że punkty aproksymujące okrąg rozłożone są na nim równomiernie. Liczba tych punktów jest /dla większych okręgów/ znacznie mniejsza niż w algorytmie Denerta - przy zachowaniu tej samej dokładności aproksymacji. Złożoność obliczeniowa algorytmu jest taka sama, jak i algorytmu Denerta. W sumie jednak algorytm jest stosunkowo złożony, wymaga bowiem oprócz sumowania również potęgowania oraz pierwiastkowania liczb.

Zasadniczo odmienną metodę od dotychczasowych całkowitoliczbowych metod dyskretyzacji krzywych przedstawia G.M. Chaikin w 1974 r. W tej metodzie niezamkniętą krzywą bez punktów przegięcia zadaje się czterema całkowitoliczbowymi punktami P1, P2, P3 i P4 wybranymi w następujący sposób: punkty P1 i P4 są odpowiednio punktem początkowym i końcowym krzywej. Przez punkty te prowadzi się styczne do krzywej L12 i L34; punkty P2 i P3 stanowią punkty przecięcia się linii L12 i L34 z linią L23 poprowadzoną w ten sposób, że jest ona styczna do krzywej, a punkt styczności dzieli odcinek L23 na połowę. Algorytm generacji krzywej działa następująco: znajduje się środki odcinków L12 i L23; nowym punktem P4 staje się punkt środkowy odcinka L23 /punkt styczności z krzywą/:

$$P4 := \frac{1}{2}(P2+P3).$$

Nowym punktem P2 jest środek odcinka L12, a nowym punktem P3 jest środek odcinka wyznaczonego przez poprzedni punkt P2 i punkt styczności linii L23 z krzywą /czyli nowy punkt P4/:

$$P3 := \frac{1}{2}(P2+P4)$$

$$P2 := \frac{1}{2}(P2+P1) .$$

Przed wyznaczeniem nowych punktów P2, P3 i P4 poprzednie współrzędne punktów P2 i P4 zapamiętuje się w specjalnym stosie. Z kolei znajduje się środki nowo wyznaczonych odcinków L12 i L23 oraz wyznacza się nowe punkty kolejno P4, P3, P2, identycznie jak za pierwszym razem. Operację tę powtarza się tak długo, aż odległość pomiędzy sąsiednimi punktami P1, P2, P3 i P4 staje się nie większa od zadanej. Wówczas to łączy się kolejno ze sobą punkty P1, P2, P3 i P4, a punkt P4 staje się nowym punktem P1. Ostatnio umieszczone w stosie punkty P2 i P4 pobiera się jako aktualne i cykl podziału odcinków, łączenia ich środków oraz sprawdzania odległości pomiędzy sąsiednimi punktami powtarza się aż do osiągnięcia punktu P4 zadanego pierwotnie.

Algorytm Chaikina jest stosunkowo prosty. Używane są bowiem tylko operacje sumowania liczb całkowitych, dzielenia przez 2 oraz porównywania liczb. Istnieje jednak potrzeba używania pamięci do tworzenia stosu, której pojemność zależy od rozmiarów generowanej krzywej. Dla pola obrazowania 1024 x 1024 jednostek są wymagane cztery dziesięciosłowe stosy. Prędkość generacji jest zmienna i ma charakter narastający. Na początku generacji jest wymagana większa liczba podziałów. W trakcie generacji wykorzystuje się te punkty ze stosu, które wyznaczono w poprzednich cyklach generacji. Do wyznaczenia n punktów jest wymaganych n iteracji. Istotną zaletą algorytmu jest to, że daje się on łatwo rozszerzyć na krzywe trójwymiarowe. Autor algorytmu nie podaje jednak żadnych danych na temat dokładności generacji krzywej. Sądzić jednak należy, że nie jest ona zbyt wysoka /błędy rzędu kilku - kilkunastu jednostek/.

R.F.Riesenfeld w 1975 r. ulepsza algorytm Chaikina do postaci, w której może on generować również krzywe zamknięte. Wykazuje ponadto, że krzywe generowane przez ten algorytm są parametrycznymi krzywymi B-giętkami 2-stopnia. Pozostaje jednak nie rozwiązany problem dokładności generacji zdefiniowanych w podobny sposób krzywych.

V.V. Athani w 1975 r., a następnie R.A.Earnshaw w 1980 r. rozwijają algorytm generacji prostej na siatce 8-spójnej wprowadzając 8 dodatkowych kierunków ruchów. Uzyskują w ten sposób algorytm dyskretyzacji prostej na 16-spójnej siatce. Relacje w algorytmie zawierają zależność między znakami i wielkością ilorazu wartości Δx , Δy - rzutów generowanego odcinka prostej. Odległość między kolejnymi węzłami ciągu aproksymującego może więc przybierać trzy różne wartości: 1, $\sqrt{2}$ oraz $\sqrt{5}$.

W porównaniu ze swoim pierwowzorem algorytm pozwala aproksymować proste za pomocą mniejszej liczby przemieszczeń oraz z mniejszym o połowę szczytowym odchyleniem $|\delta| \leq \frac{1}{4}$.

W publikacji z 1976 r. Horn opisuje metodę wielomianowej całkowitoliczbowej aproksymacji okręgu i elipsy, która daje mniej więcej jednakowo odległe punkty na obwodzie /lub bardzo blisko konturu/ i stosuje jedynie stałoprzecinkową arytmetykę. Idea tej metody oparta jest na użyciu równań różniczkowych do opisu okręgu

$$\frac{dx}{d\alpha} = -y, \quad \frac{dy}{d\alpha} = x$$

i odpowiadających im równań różnicowych

$$x_{n+1} = x_n - y_n/t, \quad y_{n+1} = y_n + x_n/t,$$

na podstawie których generowana jest elipsa, a nie okrąg, zbliżająca się kształtem do okręgu w miarę wzrostu wartości parametru t .

Horn twierdzi, że zmiana tego układu równań do postaci

$$x_{n+1} = x_n - y_n/t, \quad y_{n+1} = x_{n+1}/t + y_n$$

i zastosowanie arytmetyki stałoprzecinkowej nie tylko nie pogarsza dokładności aproksymacji lecz na odwrót, dla t z ustalonego zakresu, punkty aproksymujące leżą w pewnym ograniczonym obszarze, jeszcze bliżej spodziewanej elipsy. Operacje algorytmu są rewersyjne, gdyż zachodzi:

$$y_n = y_{n+1} - x_{n+1}/t$$

$$x_n = x_{n+1} + y_n/t$$

a więc pierwszy powtórzony punkt pokrywa się z punktem początkowym.

Niezwykle istotny jest jednak wybór t . Dla małych t aproksymacja elipsy jest całkiem ekscentryczna. Dla dużej liczby kroków zniekształcenie z powodu zaokrągleń jest tak duże, że elipsa staje się ośmiobokiem /przy $t = \max(|x_p|, |y_p|)$, (x_p, y_p) - współrzędne punktu początkowego/. Dla ściśle określonych wartości t punkty przylegają całkowicie do rozważanego okręgu.

Dobrą aproksymacją na x' i y' są wyrażenia:

$$x' \simeq (x+y) \left(1 - \frac{1}{4t}\right)$$

$$y' \simeq (x-y) \left(1 + \frac{1}{4t}\right)$$

Jeśli t jest potęgą 2 wymagane są jedynie operacje sumowania i przesuwania w rejestrze.

Autor twierdzi również, że wzory powyższe zapewniają generację jednakowo odległych punktów na okręgu.

Tych pozytywnych opinii nie potwierdzają Maxwell i Baker w publikacji z 1979 r. Ich zdaniem uzyskanie dokładności jednej j.-r. generacji krzywych 2-stopnia w obszarze 1024×1024 j.-r. wymaga zastosowania dokładniejszego wzoru kwadraturowego /z członem 2-rzędowym/ oraz dostatecznie małego przyrostu parametru Δt , nie przekraczającego wartości 2^{-5} . Metoda aproksymacji wykorzystująca równania różnicowe kumuluje bowiem błędy już z definicji.

D.C. Sutcliffe w 1976 r. opisuje algorytm podobny do algorytmu Athaniego z 1974 r., który do aproksymacji dowolnej krzywej stosuje prostoliniowe odcinki o długości $\sqrt{2}$ i 2 jednostki oraz wykorzystuje własność funkcji $F(x,y)$, która przyjmuje różne znaki po obu stronach konturu. Podobnego typu algorytm opisuje również Earnshaw w 1980 r.

Obszar, na którym ma być dyskretyzowana funkcja $F(x,y)$, dzielony jest na prostokąty /komórki/, których boki są równe podwojonej długości kroku kreślnika. Proces wyznaczenia krzywej dyskretnej odbywa się w ten sposób, że znajduje się bok komórki /linię bazową/, który jest przecinany przez krzywą $F(x,y)=0$ i do środka tego boku przemieszcza się głowicę kreślnika. Następnie odbywa się śledzenie położenia krzywej, polegające na wyznaczaniu wartości funkcji w obu rogach komórki przeciwległych do linii bazowej i wybranie na następny węzeł aproksymujący środka tego boku komórki, który przecinany jest przez krzywą. Przecięty bok komórki staje się linią bazową /podstawą/ dla następnej komórki poddawanej badaniu i proces powtarza się, aż do przekroczenia granicy rejonu, w którym funkcja jest aproksymowana.

Autor publikacji przewidział również sporo miejsca problemowi tzw. zdegenerowanych komórek, tj. takich, w których wszystkie cztery boki są przecinane przez kontur krzywej $F(x,y)$. Sutcliffe sugeruje, żeby powyższy wypadek rozstrzygnąć opierając się na zasadzie minimalnej zmiany kierunku przemieszczenia, że jeśli należy wybrać któryś z boków komórki przecinanych przez kontur $F(x,y)$, to wybieramy ten, którego osiągnięcie wymaga jak najmniejszej zmiany kierunku ruchu /w stosunku do ruchu poprzedniego/.

Odmienny od poprzednich algorytm całkowitoliczbowej aproksymacji krzywych 2-stopnia zaproponował w publikacji z 1977 r. oraz w publikacji z 1978 r. /algorytm aproksymacji na siatce n-spójnej/. Algorytm ten wyznacza ciąg całkowitoliczbowych punktów aproksymujących /dyskretyzujących/ dowolną z krzywych 2-stopnia.

Odległość pomiędzy punktami aproksymującymi nie jest z góry ograniczona. Jedną ze współrzędnych x bądź y kolejnego punktu ciągu różni się od tejże współrzędnej punktu poprzedniego co najwyżej o jedną jednostkę. Drugą ze współrzędnych - o całkowitą liczbę jednostek w zależności od parametrów geometrycznych krzywej /lokalnej krzywizny/ oraz położenia krzywej względem układu współrzędnych.

Wyznaczanie kolejnego punktu aproksymującego krzywą odbywa się za pomocą dwóch typów elementarnych ruchów /ruchów do punktów sąsiadnych odległych o jedną lub $\sqrt{2}$ jednostek/ i jednego tzw. "ruchu od krzywej" oraz szeregu tzw. "ruchów wzdłuż krzywej". Kierunek następnego elementarnego ruchu nie ulega zmianie, gdy moduł wartości funkcji w osiaganym węźle jest mniejszy niż w punkcie poprzednim. W przeciwnym razie następuje modyfikacja kierunku ruchu /o kąt $\pm \frac{\pi}{2}$ zgodnie z przyjętą zasadą/, aby uzyskać zmniejszenie się modułu wartości funkcji lub przecięcie krzywej.

Ruch "od krzywej" jest zawsze ruchem do sąsiadnego węzła wzdłuż przekątnej /odległego o $\sqrt{2}$ jednostek/. Ruchy "wzdłuż krzywej" są ruchami wzdłuż tej ze współrzędnych x bądź y , która tworzy z wektorem kierunkowym stycznej, wystawionym w punkcie bieżącym, mniejszy kąt. "Ruchy wzdłuż krzywej" wykonywane są aż do przecięcia krzywej. Na kolejny węzeł aproksymujący wybierany jest ten z dwóch sąsiadnych punktów, w którym moduł wartości funkcji jest mniejszy.

Ten ostatni algorytm ma przewagę nad algorytmami poprzednio opisanymi przede wszystkim ze względu na uniwersalność /aproxymuje dowolne krzywe 2-stopnia/ i dokładność /błędy nie większe niż $\sqrt{2}/2$ jednostki/. Zapewnia również jednoznaczność aproxymacji krzywych niezależnie od kierunku obiegu krzywej. Ma on jednak istotne wady wynikające z założenia, że niezależnie od położenia krzywej względem układu współrzędnych "ruch od krzywej" odbywa się zawsze wzdłuż przekątnej, natomiast "ruchy wzdłuż krzywej" - zawsze wzdłuż kierunku jednej z osi x bądź y . Powoduje to, że łamana aproxymująca odcinek krzywej przebiegający równoległe /w przybliżeniu/ do przekątnej układu współrzędnych jest mało "gładka" i złożoną jest z dużej liczby krótkich odcinków.

W publikacji z 1978 r. Ward opisuje metodę zgrubnej aproxymacji konturów niepodobną do żadnej z metod poprzednio opisanych, a przeznaczoną do obrazowania funkcji $F(x,y)=0$ na urządzeniu znakowym /np. drukarce/.

Koncepcja metody jest następująca: obszar, w którym $F(x,y)$ ma być wykreślona dzieli się na mniejsze podobszary

$$x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < y_{j+1}, i = 0(1)n, j = 0(1)m,$$

mające położenie (i,j) oraz wymiary identyczne jak wymiary pola znaku. Następnie bada się położenie funkcji $F(x,y)$ w kolejnych podobszarach i w tych podobszarach przybliża się ją odpowiednimi znakami graficznymi. Problemem jest wybranie z małego, stałego alfabetu takiego symboli graficznego, który będąc wykreślony w analizowanym podobszarze, będzie w nim najściślej przylegał do konturu funkcji $F(x,y)=0$.

Najprostsze /1-rzędu/ rozwiązanie zagadnienia dopasowania wymaga jedynie sześciu znaków graficznych i próbkowania wartości funkcji F w czterech rogach badanego podobszaru. Gdy badanie funkcji w całym obszarze obrazowania odbywa się wg metody rozwinięcia rastrowego, wtedy liczba próbek funkcji F w całym obszarze obrazowania wynosi $(W_x+1)(W_y+1)$, gdzie W_x i W_y są wymiarami powierzchni obrazowania mierzonymi liczbą znaków.

Znak graficzny, przybliżający krzywą w danym obszarze jest wybierany na podstawie kombinacji położenia dodatnich i ujemnych znaków wartości funkcji w rogach badanego podobszaru.

Dokładność odwzorowania funkcji $F(x,y)$ opisanym sposobem jest ograniczona. Poza tym pojawiają się lokalne dwuznaczności np. gdy przecinają się linie konturu.

Lepsze dopasowanie znaku do położenia konturu można uzyskać wykonując próbkowanie funkcji F w większej liczbie punktów obszaru znaku i rozszerzając liczebność zbioru znaków graficznych. Dopasowanie 2-rzędu wymaga próbkowania funkcji F również w środkowych punktach obrzeża pola znaku. Otrzymuje się to za pomocą 24 odpowiednio dobranych znaków graficznych. Wynik porównania między 0 i każdą próbką F określa, które z brzegów pola znaku są przecinane przez kontur; określa się zatem punkty skrajne znaku dopasowującego.

W ogóle, dopasowanie n -rzędu wymaga operowania zbiorem $6n^2$ znaków graficznych i próbkowania funkcji F n razy na każdej z czterech granic pola znaku.

Interesujący algorytm dyskretyzacji parametrycznych krzywych giętkich 3-stopnia zaproponowali R. Moss i A. Lindgurd w 1979 r. Algorytm ten, opracowany do wykreślania znaków alfanumerycznych za pomocą kreślaka posługuje się jedynie arytmetyką całkowitoliczbową.

Idea tego algorytmu jest następująca: kształty znaku alfanumerycznego zadaje się za pomocą niewielkiej liczby n węzłów siatki, tzw. punktów charakterystycznych:

$$P_i = \left\{ P_x(t), P_y(t) \right\} = \left\{ x_i, y_i \right\}, t_i = (i-1)\Delta t, \Delta t = \text{const.}$$

Przez punkty te prowadzi się parametryczną krzywą giętką $P(t)$ 3-stopnia, nadającą znakom płynnie zmieniające się, przyjemne dla oka kształty. P_1 jest wartością funkcji w punkcie charakterystycznym, a Δt jest przyrostem parametru t przy wyznaczaniu punktów na krzywej giętkiej.

Na krzywej giętkiej wyznacza się z kolei punkty:

$$T_j = \left\{ 2\Delta t^3 P_x(j), 2\Delta t^3 P_y(j) \right\}, j \equiv t_j = 1(1) n \Delta t,$$

które sprowadzone do najbliższych węzłów siatki dają dyskretną formę tej krzywej.

Dyskretyzacja krzywej gładkiej wykonywana jest następująco: wyliczona jest różnica między punktem osiągniętym w poprzednim ruchu i punktem na krzywej gładkiej obliczonym przy przyroście parametru t o stałą wartość Δt . Ruch następuje wówczas, gdy ta różnica przekracza moduł siatki. Jeżeli Δt jest duże, wtedy wyznaczyć trzeba więcej niż jeden punkt na krzywej giętkiej, zanim nastąpi ruch do kolejnego punktu. Jeżeli Δt jest małe - kolejne punkty na krzywej gładkiej odległe są od siebie o kilka modułów siatki. Górna granica liczby kroków, jakie należy wykonać zanim osiągnie się następny punkt na krzywej gładkiej, określa się wyrażeniem $4d/\Delta t$ / d - maksymalna odległość między sąsiednimi punktami charakterystycznymi/.

Maksymalne odchylenie między łananą aproksymującą i krzywą giętką nie przekroczy modułu siatki, gdy zachowana zostanie zależność $\Delta t > \sqrt{d}$. Maksymalna liczba kroków między kolejnymi węzłami na krzywej gładkiej wyniesie wtedy $4\sqrt{d}$.

Dyskretyzację krzywej giętkiej można więc przeprowadzić za pomocą dwóch różnych schematów:

- schemat pojedynczego kroku, gdy $\Delta t > 4d$ oraz
- schemat linii prostej, gdy $\Delta t > \sqrt{d}$.

Metoda powyższa jest złożona, a poza tym nie zapewnia symetrii krzywom dyskretnym, będących postaciami symetrycznych krzywych gładkich. Zasluguje jednak na szczególną uwagę, gdyż jest jedyną z literatury całkowitoliczbową metodą dyskretyzacji parametrycznych krzywych giętkich na siatce, z oszacowanym błędem aproksymacji.

Ogólne podejście do problemu dyskretyzacji krzywych sformułowali H. Freeman i J.A. Saghri w 1980 r. Opisują oni metodę kwantyzacji wg tzw. schematu uogólnionego łańcucha kodowego. Łańcuch kodowy jest ciągiem kodów przemieszczeń do kolejnych punktów-węzłów aproksymujących krzywą. Punkty aproksymujące wyznacza się w wyniku nałożenia na krzywą siatki i wybranie węzłów tej siatki najbliższej przylegających do krzywej. Odległość między węzłami aproksymującymi nie może być większa niż założona.

Dyskretyzację wg schematu uogólnionego łańcucha kodowego realizuje się w dwóch etapach:

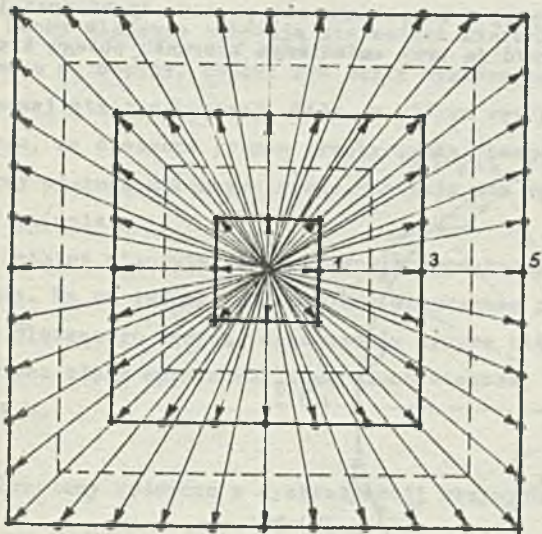
- 1/ w etapie pierwszym określa się /dla pewnego węzła (x_p, y_p) , będącego punktem początkowym segmentu aproksymowanego i pewnej dopuszczalnej długości odcinka aproksymującego krzywą/ zbiór szablonów;
- 2/ w etapie drugim wybiera się taki szablon, który w całości zawiera pewien możliwie najdłuższy odcinek aproksymowanej krzywej. Węzeł siatki, którego szablon został wybrany, staje się kolejnym węzłem aproksymującym.

Każdy z dwóch etapów zawiera kilka czynności.

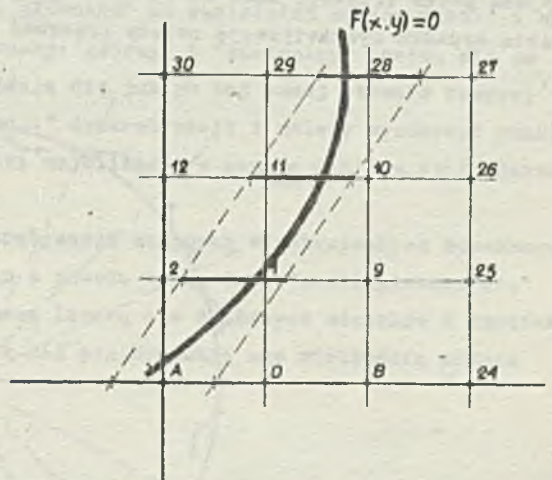
Określenie zbioru szablonów wykonywane jest w następujący sposób:

- 1/ tworzy się koncentryczne względem węzła (x_p, y_p) kwadratowe pierścienie /rys.2.1/;
- 2/ dla każdego węzła na każdym z pierścieni wyznacza się szablon za pomocą dwóch równoległych linii od punktu (x_p, y_p) , przechodzących przez punkty środkowe ogni pierścienia, przylegających do danego węzła /rys.2.2/.

Wybranie szablonu zawierającego określony odcinek aproksymowanej krzywej rozpoczyna się od szablonów zewnętrznego pierścienia i kontynuuje się je dla pierścieni coraz to mniejszych.



Rys.2.1. Położenie pierścieni kodowych i wektorów przemieszczeń dla kodu przemieszczeń 1-3-5



Rys.2.2. Szablon dla pierścienia 3, węzła 28 zawierający krzywą $F(x,y)$.

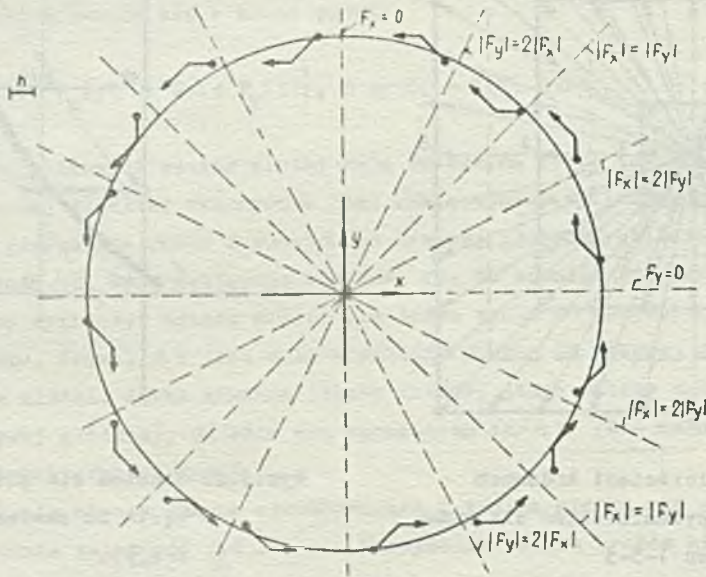
Algorytm ten zapewnia błąd aproksymacji nie większy niż $\frac{h}{2}$ i produkuje możliwie najdłuższe z dozwolonych odcinki aproksymujące.

Zaproponowany schemat aproksymacji jest uniwersalny. Obejmuje on bowiem aproksymację dowolnych krzywych analitycznych. Ma jednak podstawową wadę: nie nadaje się do realizacji wprost, a może jedynie służyć jako podstawa do opracowania szczegółowych algorytmów dyskretyzacji obejmujących dokładniej spreoyzowane klasy krzywych, uwzględniających sposoby ich przedstawiania.

W pracy z 1982 r. zaproponowałem dwa inne algorytmy dyskretyzacji krzywych, wolne od wad algorytmów wcześniej opisanych oraz bardziej uniwersalne - dotyczą one dyskretyzacji dowolnych algebraicznych krzywych płaskich.

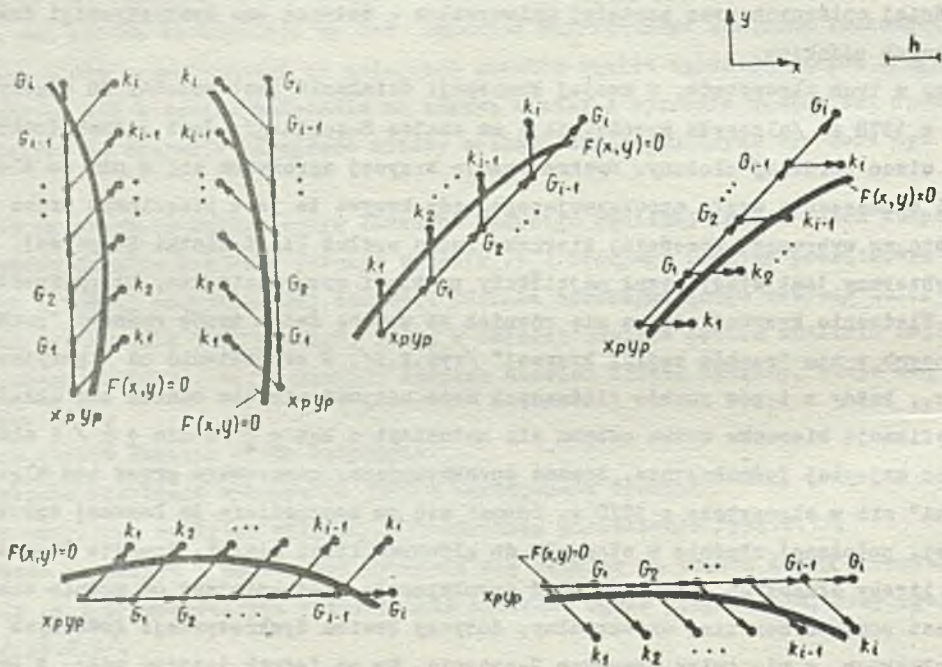
Pierwszy z tych algorytmów, w swojej koncepcji działania jest podobny do algorytmu opisanego przeze mnie w 1978 r. /algorytm aproksymacji na siatce 8-spójnej/. Jest jednak doskonalszy od niego, chociaż nieco bardziej złożony. Dyskretyzację krzywej sprowadza się w nim do śledzenia przebiegu krzywej i wyznaczania węzła aproksymującego, gdy krzywa ta jest przecinana przez ruch śledzący, odbywający się wg wybranego wcześniej kierunku ruchu wzdłuż linii siatki 8-spójnej. Na węzeł aproksymujący wybierany jest wtedy węzeł najbliższy punktowi przecięcia ten, który spełnia warunek $\min|F(x,y)|$. Śledzenie krzywej odbywa się również za pomocą dwóch typów ruchów: "ruchu od krzywej" oraz sprzężonych z nim "ruchów wzdłuż krzywej" /rys.2.3/. W odróżnieniu od algorytmu, który opisałem w 1978 r., każdy z typów ruchów śledzących może odbywać się tak wzdłuż osi układu, jak i przekątnej. Modyfikacja kierunku ruchu odbywa się natomiast o kąt $\pm \frac{\pi}{4}$ /a nie $\pm \frac{\pi}{2}$ / i dla jednego odcinka łamanej co najwyżej jednokrotnie. Łamana aproksymująca, generowana przez ten algorytm jest bardziej "gładka" niż w algorytmie z 1978 r. Odnosi się to szczególnie do łamanej aproksymującej segmenty krzywej, położonej ukośnie w stosunku do głównych linii siatki. Ponadto łamana składa się z mniejszej liczby dłuższych odcinków. Błąd aproksymacji jest mniejszy od modułu siatki. Algorytm z 1982 r. jest ponadto bardziej uniwersalny, dotyczy bowiem dyskretyzacji dowolnych krzywych algebraicznych płaskich, a nie tylko krzywych 2-stopnia. Ma on jednak istotną wadę. W przypadku dyskretyzacji krzywych wielogałęziowych, przy pewnym kierunku obiegu krzywej może nastąpić tzw. "ześlizgnięcie się" "ruchu wzdłuż krzywej", które doprowadza bądź do przejścia ruchów śledzących na przy-

legającą gałąź krzywej, bądź do izolowanego punktu krzywej i zapętlenia się procesu dyskretyzacji. W takim wypadku dyskretyzację należy przerwać i powtórzyć ją przy zmienianym kierunku obiegu krzywej.



Rys.2.3. Ilustracja ruchów śledzących krzywą wg sposobu I

Drugi z zaproponowanych w 1962 r. algorytmów jest zasadniczo odmienny, z powodu odmiennej koncepcji ruchów śledzących przebieg krzywej. Śledzenie przebiegu krzywej odbywa się za pomocą dwóch ruchów: "głównego" i "kontralnego", wybieranych początkowo tak, że ich kierunki, pokrywając się z liniami siatki 8-spójnej, różnią się o kąt $\frac{\pi}{4}$ i prowadzą do węzłów siatki leżących po przeciwnych stronach krzywej /rys.2.4/.



Rys.2.4. Ilustracja ruchów śledzących krzywą wg sposobu II

Ruchy śledzące odbywają się wzdłuż kierunku "ruchu głównego" do sąsiednich węzłów siatki i wykonywane są dopóty, dopóki dwa węzły wyznaczone przez ruchy: "główny" i "kontrolny" znajdują się po tej samej stronie krzywej. Stan, w którym węzły te znajdują się już po tej samej stronie krzywej oznacza, że śledzona krzywa przekroczyła "pasmo tolerancji" dyskretyzacji i należy wyznaczyć punkt końcowy odcinka aproksymującego. Zostaje nim węzeł siatki najbliższy /w sensie $\min |F(x,y)|$ / punktowemu przecięciu.

Ostatni algorytm również jest przeznaczony do dyskretyzacji krzywych algebraicznych dowolnego stopnia. Ma on jednak przewagę nad algorytmem poprzednim z powodu braku tzw. "ześlizgiwania się" ruchu śledzącego krzywą, aproksymuje krzywe nieco mniejszą liczbą ale dłuższych odcinków i chociaż szczytowe błędy aproksymacji są nieco większe, to jednak nie przekraczają one wielkością modułu siatki h .

2.5. Problemy badawcze w dyskretyzacji krzywych

Dyskretyzacja rozważana jako integralna część zagadnienia wprowadzania i wyprowadzania /również generowania i przetwarzania/ konturów i kształtów /rysunków, obrysów i powierzchni granicznych/ na graficzne urządzenia komputerów /lub w postaci programów sterujących obróbką skrawaniem/ jest procesem rozkładu analitycznie zadanych krzywych na standardowe elementarne części. Aby była pożyteczna powinna być prosta, w wysokim stopniu zestandaryzowana, uniwersalnie stosowana i powinna prowadzić do prostego kodowania.

Stawiając takie wymagania wobec algorytmów dyskretyzacji oraz wymaganie całkowitoliczbowości, a także i inne sformułowane we wstępie niniejszej pracy, musimy stwierdzić, że w całkowitoliczbowej dyskretyzacji krzywych jest wiele problemów, które nie zostały dotychczas w dostatecznym stopniu przebadane, chociaż istnieje duże i pilne zapotrzebowanie na pozytywne wyniki takich badań.

W warunkowej dyskretyzacji krzywych algebraicznych na siatce k -spójnej opracowano kilka algorytmów dyskretyzacji tych krzywych. Jednak każdy z nich obardzony jest dość istotnymi ujemnymi cechami, jak np. operowanie w algorytmach bardzo dużymi liczbami, zależnymi wprost proporcjonalnie od wymiarów geometrycznych i stopnia krzywej. Liczby te, z powodu ich zakresu zmienności, wymuszają stosowanie /w komputerowej realizacji algorytmów/ zmiennoprzecinkowej reprezentacji liczb, która jest przyczyną powstawania systematycznych błędów obliczeń.

W dyskretyzacji strukturalnej opracowano jedynie algorytmy dyskretyzacji prostej. Dyskretyzacja strukturalna krzywych nie jest sygnalizowana w literaturze w ogóle. Sądzić zatem należy, że jest ona całkowicie nie przebadana.

W dyskretyzacji warunkowej na siatkach kwadratowych 4- i 8-spójnych jest nie rozwiązana /w zasadzie całkowicie/ dyskretyzacja krzywych algebraicznych stopni wyższych od drugiego, a także dyskretyzacja krzywych innych niż algebraiczne.

Zupełnie nie jest przebadany problem całkowitoliczbowej dyskretyzacji krzywych przestrzennych. Badania tego zagadnienia są szczególnie ważne i pilne zarówno w grafice komputerowej /zobrazowanie przestrzenne/, jak i w numerycznym sterowaniu obrabiarkami, w których to zagadnieniach istotnym zadaniem jest proste /w sterowaniu obrabiarkami również precyzyjne/ wyznaczenie przestrzennej drogi ruchu /elementu kreślącego obraz lub narzędzia skrawającego/. Autor niniejszej rozprawy zamierza podjąć badania nad całkowitoliczbową dyskretyzacją krzywych przestrzennych.

Nie przebadane jest również zagadnienie całkowitoliczbowej dyskretyzacji powierzchni, które wydaje się być bardzo istotne nie tylko w grafice komputerowej i numerycznym sterowaniu obrabiarkami, ale w ogóle w komputerowo wspomaganym projektowaniu i wytwarzaniu.

W niniejszej rozprawie poddamy analizie całkowitoliczbową dyskretyzację krzywych algebraicznych płaskich, a następnie proponujemy /zsyntetyzujemy/ dwa nowe /dotychczas nie publikowane/

algorytmy warunkowej dyskretyzacji płaskich krzywych algebraicznych na kwadratowych siatkach 4- i 8-spójnych. Wyprowadzimy też wzory szacujące szczytowe i polowe błędy aproksymacji dokonywanych za pomocą tych algorytmów oraz oszacujemy złożoność obliczeniową dyskretyzacji krzywych /rozumianą jako liczba standardowych operacji, wykonywanych w pętli iteracyjnej algorytmu/ w funkcji rodzaju siatki i wielkości jej modułu oraz stopnia krzywej.

3. ALGORYTMY DYSKRETYZACJI KRZYWYCH ALGEBRAICZNYCH NA JEDNORODNYCH SIATKACH KWADRATOWYCH

4- I 8-SPÓJNYCH

3.1. Sformułowanie zagadnienia dyskretyzacji

Niech w prostokątnym układzie współrzędnych xOy będzie zadana krzywa algebraiczna n -stopnia względem zmiennych rzeczywistych x i y w postaci uwikłanej:

$$F(x,y) = a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \dots + a_{1,n-1}xy^{n-1} + a_{0,n}y^n +$$

$$+ a_{n-1,0}x^{n-1} + \dots + a_{1,n-2}xy^{n-2} + a_{0,n-1}y^{n-1} +$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$+ \dots + a_{1,n-2}xy^{n-2} + a_{0,1}y^n +$$

$$\quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$+ a_{1,0}x + a_{0,1}y +$$

$$+ a_{0,0} =$$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{n-k} a_{n-i-k,i} x^{n-i-k} y^i = 0 \tag{3.1/}$$

/ n - liczba naturalna, macierz $[a_{ij}]$ - rzeczywista i niezerowa/.

i niech w tym układzie będzie zadana również kwadratowa siatka z modułem h określona za pomocą wzorów /1.1/.

Zagadnienie dyskretyzacji

Poszukuje się algorytmu dyskretyzacji według kryterium "najmniejszej odległości" między krzywą zadaną i linią łamaną, otrzymaną z połączenia odcinkami prostych ciągu bezpośrednio spójnych węzłów siatki, przybliżających krzywą.

Metryka dyskretyzacji

Kryterium "najmniejszej odległości" pomiędzy krzywą zadaną i aproksymującą ją linią łamaną, postawione w zagadnieniu dyskretyzacji, wymaga zdefiniowania przestrzeni funkcyjnej, w której będzie realizowana aproksymacja. W szczególności normy tej przestrzeni, za pomocą której jest to kryterium jednoznacznie określone.

Chociaż wybór odpowiedniej przestrzeni funkcyjnej, w której dokonywana jest aproksymacja, jest uzależniony od celu, któremu ma ta aproksymacja służyć, tym niemniej wykorzystamy fakt, że w pewnych przestrzeniach funkcyjnych zagadnienie aproksymacji rozwiązuje się znacznie prościej niż

w innych. Z tych też względów zastosujemy przybliżenie jednostajne /minimalizacja maksymalnej różnicy między funkcją i jej przybliżeniem/, a jako miarę oddalenia punktu od krzywej przyjmujemy moduł wartości funkcji $|F(x,y)|$ w rozważanym punkcie. Spełnia on bowiem lokalnie warunki metryki i daje się łatwo i szybko wyznaczyć.

Twierdzenie 3.1

Moduł wartości funkcji uwikłanej $|F(x,y)|$ opisującej krzywą algebraiczną n-stopnia zadaną równaniem /3.1/ spełnia lokalnie warunki metryki i może służyć do pomiaru odległości punktów od krzywej.

Dowód w Dodatku A.

Algorytm dyskretyzacji

Algorytm dyskretyzacji krzywej $F(x,y)=0$ i aproksymowanie jej bezpośrednio spójnymi węzłami siatki lub odcinkami linii siatkowych powinien zawierać ciąg kolejnych czynności precyzujących sposób przemieszczania się wzdłuż dyskretyzowanego odcinka krzywej, od punktu początkowego (x_p, y_p) do punktu końcowego (x_k, y_k) w określonym kierunku, wzdłuż tych linii siatkowych, które zapewniają osiągnięcie węzłów siatki położonych możliwie najbliżej krzywej /w sensie metryki generacyjnej $|F(x,y)|/$.

3.2. Analiza zagadnienia

Niech funkcja $F(x,y)=0$ będzie w rozważanym obszarze analityczna, z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów /osobliwych/, i niech $F(x,y)=0$ w obszarach swojej określoności ma ciągłe, ograniczone i równocześnie nie równe zero pochodne cząstkowe 1-rzędu. Określmy /nieformalnie/ za pomocą tych pochodnych kierunek ruchu wzdłuż stycznej do krzywej w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \vec{V}^+ &= \left(-\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x} \right) \\ \vec{V}^- &= \left(\frac{\partial F}{\partial y}, -\frac{\partial F}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad /3.2/$$

i wprowadźmy /dla wygody zapisu/ zmienną logiczną B, jak poniżej:

$$B = \begin{cases} 1 & \text{dla kierunku } \vec{V}^+ \text{ /dodatniego/} \\ 0 & \text{dla kierunku } \vec{V}^- \text{ /ujemnego/} \end{cases} \quad /3.3/$$

Łatwo zauważyć, że przy takim określeniu kierunku ruchu wzdłuż krzywej występuje następująca zależność: w trakcie ruchu wzdłuż krzywej w dodatnim jej kierunku dodatnie wartości funkcji $F(x,y)$ występują po prawej stronie krzywej, natomiast ujemne - po lewej stronie krzywej.

Równocześnie przyjmijmy, że punkty (x_p, y_p) i (x_k, y_k) leżą w węzłach siatki: na krzywej lub w najbliższym jej sąsiedztwie. Tak więc węzły te oraz kierunek ruchu wzdłuż krzywej B jednoznacznie wyznaczają dyskretyzowany segment krzywej. Należy określić ciąg $(x_{p+1}, y_{p+1}), (x_{p+2}, y_{p+2}), \dots, (x_r, y_r), \dots, (x_{k-1}, y_{k-1})$ spełniający podane wcześniej warunki.

Należy jednak pamiętać, że przestrzeń metryczna, w której dokonujemy aproksymacji, tj. zbiór całkowitoliczbowych punktów płaszczyzny z metryką $|F(x,y)|$ jest przestrzenią typu $C(a,b)$, która nie jest przestrzenią silnie unormowaną. Rozwiązanie zagadnienia dyskretyzacji nie musi więc być jednoznaczne. Na ciąg aproksymujący należy zatem narzucić dodatkowe ograniczenie.

Jednym z możliwych sposobów wyznaczania ciągu punktów aproksymujących zadaną krzywą jest wyznaczenie ich wprost z równania /3.1/. Zakładając warunek bezpośredniej spójności węzłów tego ciągu, należy zmieniać /poczynając od punktu (x_p, y_p) / współrzędne x i y kolejnych węzłów siatki o moduł h w taki sposób, aby był zachowany założony kierunek obiegu krzywej B oraz aby punkty te leżały w bezpośredniej bliskości /w sensie $\min |F(x,y)|$ / dyskretyzowanej krzywej. Metoda ta wymaga jednak wykonania dużej liczby operacji potęgowania dla każdego z węzłów ciągu. Z tego też powodu jest ona mało efektywna. Przeanalizujemy więc metodę wydajniejszą z punktu widzenia złożoności obliczeniowej, wykorzystującą rozwinięcia funkcji $F(x,y)$ w szereg Taylora.

Wprowadźmy operatory kierunkowe funkcji $F(x,y)$:

$$L^x F(x_1, y_1) \stackrel{\text{def}}{=} F(x_1 + \Delta x_1, y_1) - F(x_1, y_1)$$

$$L^y F(x_1, y_1) \stackrel{\text{def}}{=} F(x_1, y_1 + \Delta y_1) - F(x_1, y_1)$$

$$L^p F(x_1, y_1) \stackrel{\text{def}}{=} F(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1) - F(x_1, y_1)$$

gdzie: $|\Delta x_1| = |\Delta y_1| = h$

h - moduł siatki.

Wprowadźmy również /dla wygody zapisu/ oznaczenia dla pochodnych cząstkowych funkcji $F(x,y)$:

$$F_{rx} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{df}{dx} \frac{\partial^r F(x,y)}{\partial x^r}$$

$$F_{sy} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{df}{dy} \frac{\partial^s F(x,y)}{\partial y^s}$$

/3.4/

$$F_{rxsy} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{df}{dx^r dy^s} \frac{\partial^{r+s} F(x,y)}{\partial x^r \partial y^s}$$

r, s - rząd pochodnych względem zmiennych, odpowiednio x i y .

Korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora funkcji $F(x,y)$ w otoczeniu punktu (x,y) :

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^i F(x,y)$$

/n - stopień krzywej/ i uwzględniając wyrażenia /3.4/, otrzymamy wzory

$$L^x F(x,y) = \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta x)^i}{i!} F_{ix}(x,y)$$

$$L^y F(x,y) = \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta y)^i}{i!} F_{iy}(x,y)$$

/3.5/

$$L^p F(x,y) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^k \frac{(\Delta x)^{k-i} (\Delta y)^i}{i!(k-i)!} F_{(k-i)iy}(x,y)$$

oraz zależność

$$L^P F(x,y) = L^X F(x,y) + L^Y F(x,y) + L^R F(x,y) \quad /3.6/$$

gdzie

$$L^R F(x,y) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^k (\Delta x)^{k-i+1} (\Delta y)^i \frac{F^{(k-i+1)X, iY}}{(k-i+1)! i!}$$

jest znacznie prostszy do wyznaczenia niż operator $L^P F(x,y)$ /obliczenie operatora $L^R F(x,y)$ wymaga mniejszej liczby operacji sumowania niż przy obliczaniu operatora $L^P F(x,y)$ o taką liczbę operacji sumowania, jaką należy wykonać w trakcie wyznaczania operatorów $L^X F(x,y)$ oraz $L^Y F(x,y)$ łącznie/.

Stąd na podstawie wyrażeń /3.4/ można wyznaczyć wartości funkcji $F(x,y)$ w punktach $(x_1 + \Delta x_1, y_1)$, $(x_1, y_1 + \Delta y)$ oraz $(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1)$ pod warunkiem, że znane są pochodne cząstkowe rzędu $1+n$ w punkcie (x_1, y_1) . Te ostatnie można wyznaczyć w podobny sposób, korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora pochodnych cząstkowych w punkcie poprzednim oraz z poniższych wzorów, analogicznych do wzorów /3.4/ i /3.6/:

$$L^X F_{rxsy}(x_{i-1}, y_{i-1}) \stackrel{df}{=} F_{rxsy}(x_{i-1} + \Delta x_{i-1}, y_{i-1}) + F_{rxsy}(x_{i-1}, y_{i-1})$$

$$L^Y F_{rxsy}(x_{i-1}, y_{i-1}) \stackrel{df}{=} F_{rxsy}(x_{i-1}, y_{i-1} + \Delta y_{i-1}) + F_{rxsy}(x_{i-1}, y_{i-1})$$

$$L^P F_{rxsy}(x_{i-1}, y_{i-1}) \stackrel{df}{=} F_{rxsy}(x_{i-1} + \Delta x_{i-1}, y_{i-1} + \Delta y_{i-1}) + F_{rxsy}(x_{i-1}, y_{i-1})$$

oraz

$$L^X F_{rxsy} = \sum_{k=1}^{n-r-s} F_{(r+k)xy} \frac{(\Delta x)^k}{k!}$$

$$L^Y F_{rxsy} = \sum_{k=1}^{n-r-s} F_{rx(s+k)y} \frac{y^k}{k!} \quad /3.7/$$

$$L^P F_{rxsy} = \sum_{k=1}^{n-r-s} \sum_{i=0}^k F_{(r+k-i)x(s+i)y} \frac{(\Delta x)^{k-i} (\Delta y)^i}{(k-i)! i!}$$

i zależność

$$L^P F_{rxsy} = L^X F_{rxsy} + L^Y F_{rxsy} + L^R F_{rxsy}$$

gdzie

$$L^R F_{rxsy} = \sum_{k=1}^{n-r-s-1} \sum_{i=0}^k F_{(r+k-i)x(s+i)y} \frac{\Delta x^{k-i+1} \Delta y^i}{(k-i+1)! i!}$$

dla $r+s = 1(1)n-1$, $r, s = 0(1)n-1$.

Wartości pochodnych cząstkowych w punkcie (x_p, y_p) wyznacza się, gdy znane są współczynniki równania uwikłanego krzywej $a_{1,j} / 1, j = 0 + n/$, z następującego wzoru:

$$F_{rxsy} = \sum_{k=0}^{n-r-s} \sum_{i=s}^{n-r-k} \frac{(n-k-i)! i!}{(n-k-i-r)! (i-s)!} a_{n-k-1,i} \cdot x^{n-k-1-r} \cdot y^{i-s} \quad /3.8/$$

dla $1 \leq r+s \leq n$, $0 \leq r, s < n$.

Wzory /3.8/ można wprowadzić do postaci wygodniejszej w komputerowej realizacji algorytmu. Dla pochodnych względem jednej zmiennej przedstawiają się one następująco:

$$F_{rx} = \sum_{k=0}^{n-r} \sum_{i=0}^{n-r-k} \prod_{p=n-k-r-1+1}^{n-k-1} (p) \cdot a_{n-k-1,i} \cdot x^{n-k-r-1} \cdot y^i \quad /3.9/$$

$$F_{sy} = \sum_{k=0}^{n-s} \sum_{i=s}^{n-k} \prod_{q=i-s+1}^i (q) \cdot a_{n-k-1,i} \cdot x^{n-k-1} \cdot y^{i-s}$$

gdzie: $1 \leq r, s \leq n$,

a dla pochodnych mieszanych:

$$F_{rxsy} = \sum_{k=0}^{n-r-s} \sum_{i=s}^{n-k-r} \prod_{p=n-k-r-1+1}^{n-k-1} (p) \cdot \prod_{q=i-s+1}^i (q) \cdot a_{n-k-1,i} \cdot x^{n-k-r-1} \cdot y^{i-s} \quad /3.9a/$$

gdzie: $1 \leq r, s \leq n$, $2 \leq r+s < n$.

Określimy teraz zależności pozwalające wyeliminować większość z możliwych na danej siatce ruchów i pozostawiające przemieszczenia wzdłuż tych linii siatkowych, których kierunek jest najbardziej zbliżony do kierunku wektora stycznej. Unikniemy w ten sposób konieczności wyznaczania operatorów funkcji dla większości bezpośrednio sąpólnych węzłów. W tym celu należy zlokalizować wektor kierunkowy stycznej z dokładnością do $\frac{\pi}{2}$ dla ruchów wzdłuż linii siatki 4-spójnej oraz z dokładnością do $\frac{\pi}{4}$ dla ruchów wzdłuż linii siatki 8-spójnej.

3.2.1. Dyskretyzacja na siatce 4-spójnej

Z przyjętej definicji kierunków \vec{V}^+ i \vec{V}^- wynika, że znak przemieszczenia Δx_1 z punktu (x_1, y_1) do punktu (x_{1+1}, y_{1+1}) powinien być przeciwny do znaku pochodnej cząstkowej F_y funkcji $F(x, y)$ w punkcie (x_1, y_1) , a znak przemieszczenia Δy_1 powinien być zgodny ze znakiem pochodnej cząstkowej F_x w tym punkcie. Zależności te pozwalają sformułować relacje określające z dokładnością do $\frac{\pi}{2}$ kierunki ruchów wzdłuż linii siatkowych, najbliższe do przyjętego kierunku ruchów wzdłuż stycznej do krzywej:

$$\Delta x = \begin{cases} +h \text{ gdy } (F_y \geq 0) \vee (F_y < 0) \text{ B=TRUE} \\ -h \text{ w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad /3.10/$$

$$\Delta y = \begin{cases} +h \text{ gdy } (F_x \geq 0) \vee (F_x < 0) \text{ B=TRUE} \\ -h \text{ w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Na siatce 4-spójnej relacje /3.10/ eliminują 2 z 4 możliwych na tej siatce kierunków ruchu. Wyznaczenie kolejnego punktu ciągu aproksymującego wymaga wybrania jednego z dwóch pozostałych węzłów - bliższego krzywej /w sensie $\min |F(x,y)|$ /. W tym celu należy wyznaczyć zgodnie z /3.2/ wartości $L^x F$ i $L^y F$ za pomocą wzorów /3.5/. Na kolejny węzeł ciągu aproksymującego należy wybrać zaś ten z punktów $(x_1 + \Delta x_1, y_1)$ bądź $(x_1, y_1 + \Delta y_1)$, w którym mniejsza jest bezwzględna wartość modułu wartości funkcji $F(x,y)$. A więc kolejny punkt ciągu osiąga się wykonując przemieszczenie:

a/ $\Delta x_1, /x_{i+1} := x_1 + \Delta x_1, y_{i+1} := y_1/$, gdy zachodzi

$$|F(x_1 + \Delta x_1, y_1)| < |F(x_1, y_1 + \Delta y_1)| \quad /3.11/$$

lub

b/ $\Delta y_1, /x_{i+1} := x_1, y_{i+1} := y_1 + \Delta y_1/$, gdy zachodzi

$$|F(x_1, y_1 + \Delta y_1)| < |F(x_1 + \Delta x_1, y_1)|. \quad /3.11/$$

Dla przypadku równości modułów: $|F(x_1 + \Delta x_1, y_1)| = |F(x_1, y_1 + \Delta y_1)|$ należy przyjąć dodatkowe kryterium, rozstrzygające o wyborze punktu na kolejny węzeł ciągu. Kryterium tym niech będzie położenie punktu po określonej stronie krzywej, np. po tej stronie krzywej, dla której zachodzi $F(x_1, y_1) > 0$, co, jak się okaże, jest warunkiem niezbędnym do jednoznaczności dyskretyzacji. Tak więc algorytm wyznacza to przemieszczenie, w którym osiąga się minimum wartości bezwzględnej lewej strony w jednym z poniższych wyrażeń:

$$F(x_1 + \Delta x_1, y_1) = L^x F(x_1, y_1) + F(x_1, y_1) \quad /3.12/$$

$$F(x_1, y_1 + \Delta y_1) = L^y F(x_1, y_1) + F(x_1, y_1)$$

dla $\Delta x_1, \Delta y_1$ wyznaczonych za pomocą relacji /3.10/.

Dla uaktualnienia wartości pochodnych cząstkowych w nowo wyznaczonym punkcie można posłużyć się wzorami /3.7/ i /3.8/.

3.2.2. Dyskretyzacja na siatce 8-spójnej

W wypadku dyskretyzacji na siatce 8-spójnej relacje /3.10/ rozszerzymy o wzory $(F_y = 0) \wedge (F_x < 0)$ i $(F_x = 0) \wedge (F_y < 0)$ na podstawie których dokładniej lokalizuje się nachylenie wektora kierunkowego stycznej, gdy jedna z pochodnych cząstkowych 1-rzędu jest równa zero /a nie jest to punkt przegięcia krzywej/. Ma to istotne znaczenie, zwłaszcza w dyskretyzacji krzywych o promieniach krzywizn niewiele większych od modułu siatki h . Relacje /3.10/ nie zapewniają wówczas wyboru kierunku ruchu doprowadzającego do węzła z najmniejszym modułem $F(x,y)$, jak również powodują uzależnienie kształtu łamanej od kierunku obiegu krzywej B.

Lokalizacji wektora kierunkowego stycznej z dokładnością do $\frac{\pi}{2}$ będziemy więc dokonywać za pomocą poniższych relacji:

$$\Delta x = \begin{cases} +h & \text{gdy } (F_y > 0) \vee (F_y < 0) \vee (F_y = 0) \wedge (F_x < 0) = \text{TRUE} \\ -h & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad /3.13/$$

$$\Delta y = \begin{cases} +h \text{ gdy } (F_x < 0) \bar{B} \vee (F_x > 0) B \vee (F_x = 0) (F_y < 0) & = \text{TRUE} \\ -h \text{ w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad /3.13/$$

Przeprowadzimy teraz lokalizację nachylenia wektora kierunkowego stycznej z dokładnością do $\frac{\pi}{4}$. Oczywiście są następujące zależności

- jeżeli $|F_x| > |F_y|$, to mniejszy z kątów między styczną i osią x jest mniejszy od $\frac{\pi}{4}$;
- jeżeli $|F_x| < |F_y|$, to mniejszy z kątów między styczną i osią y jest mniejszy od $\frac{\pi}{4}$.

Uwzględniając w rozważaniach również kierunek obiegu krzywej B, relacje lokalizujące nachylenie wektora kierunkowego stycznej z dokładnością do $\frac{\pi}{4}$ możemy wyrazić w następującej postaci:

- jeżeli zachodzi

$$(|F_x| > |F_y|) \vee (F_x = -F_y) B \vee (F_x = F_y) \bar{B} = \text{TRUE}, \quad /3.14/$$

to należy analizować nierówność

$$|F(x+\Delta x, y+\Delta y)| \geq |F(x, y+\Delta y)|;$$

- jeżeli zachodzą zależności przeciwne

$$(|F_x| < |F_y|) \vee (F_x = F_y) B \vee (F_x = -F_y) \bar{B} = \text{TRUE}, \quad /3.14/$$

to należy analizować nierówność

$$|F(x+\Delta x, y+\Delta y)| \geq |F(x+\Delta x, y)|$$

Przeprowadzając dyskretyzację na siatce 8-spójnej, zastosujemy kolejno lokalizację wektora kierunkowego stycznej z dokładnością do $\frac{\pi}{2}$ /relacje /3.13// oraz lokalizację z dokładnością do $\frac{\pi}{4}$ /relacje /3.14//. Lokalizacje te eliminują 6 z 8 możliwych na danej siatce kierunków ruchu.

Następnie zastosujemy kryterium mniejszego modułu funkcji i na kolejny węzeł ciągu aproksymującego wybierzemy ten z pozostałych dwóch punktów, w którym funkcja $F(x,y)$ przyjmuje wartość bezwzględnie mniejszą. Przypadek graniczny równości modułów funkcji, nie uwzględniony w relacjach /3.14/, rozstrzygniemy na korzyść punktów leżących zawsze po tej samej stronie krzywej, dokładniej po tej stronie krzywej, dla której $F(x,y) > 0$.

Należy również rozstrzygnąć przypadek graniczny równości funkcji $F(x,y)$ w dwóch punktach leżących po tej samej stronie krzywej. Może on zaistnieć w dyskretyzacji krzywych o bardzo dużych krzywiznach, gdy kąt nachylenia stycznej na odcinku łuku krzywej, odpowiadający długością modułowowi siatki h, zmienia się o wielkość przekraczającą $\frac{\pi}{4}$. Przypadek ten rozstrzygniemy na korzyść ruchu wzdłuż przekątnej, jako przybliżającego dłuższy odcinek krzywej.

Wprowadzając oznaczenia dla wyrażeń boolowskich:

$$\begin{aligned} X &\stackrel{\text{def}}{=} (|F_x| > |F_y|) \vee (F_x = F_y) \bar{B} \quad (F_x = -F_y) B \\ Y &\stackrel{\text{def}}{=} \left[|F(x+\Delta x, y+\Delta y)| < |F(x, y+\Delta y)| \right] \vee \left[|F(x+\Delta x, y+\Delta y)| = \right. \\ &\quad \left. = |F(x, y+\Delta y)| \right] \wedge \left[F(x+\Delta x, y+\Delta y) \geq 0 \right] \end{aligned} \quad /3.15/$$

$$z \stackrel{\text{def}}{=} \left[|F(x+\Delta x, y+\Delta y)| < |F(x+\Delta x, y)| \right] \vee \left[|F(x+\Delta x, y+\Delta y)| = |F(x+\Delta x, y)| \wedge [F(x+\Delta x, y+\Delta y) \geq 0] \right] \quad /3.15/$$

schemat określania ruchu prowadzącego do kolejnego węzła ciągu zapisujemy następująco:

- ruch wzdłuż współrzędnej x , tj. $x_{i+1} := x_i + \Delta x_i, y_{i+1} := y_i$, gdy zachodzi $\bar{X}\bar{Z} = \text{TRUE}$;
- ruch wzdłuż współrzędnej y , tj. $x_{i+1} := x_i, y_{i+1} := y_i + \Delta y_i$, gdy zachodzi $\bar{Y}\bar{Z} = \text{TRUE}$; /3.16/
- ruch wzdłuż przekątnej, tj. $x_{i+1} := x_i + \Delta x_i, y_{i+1} := y_i + \Delta y_i$, gdy zachodzi $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z} = \text{TRUE}$.

Wartości funkcji $F(x, y)$ w nowo wyznaczonych węzłach wylicza się na podstawie wzorów /3.4/ i /3.6/, wartości pochodnych cząstkowych - ze wzorów /3.7/ i /3.8/.

3.2.3. Dane początkowe dyskretyzacji

Przeanalizowane wyżej sposoby dyskretyzacji wymagają, jako danych początkowych, określenia współrzędnych punktu początkowego (x_p, y_p) i końcowego (x_k, y_k) generowanego segmentu krzywej, wartości funkcji w punkcie początkowym $F(x_p, y_p)$, kierunku obiegu krzywej B oraz wartości pochodnych cząstkowych rzędu $1+n$ w punkcie początkowym. Punkty początkowy i końcowy powinny bezwzględnie pokrywać się z węzłami siatki /powinny mieć współrzędne całkowitoliczbowe/. Innym sposobem zadania krzywej, wygodniejszym z punktu widzenia realizacji komputerowej algorytmów, jest określenie współczynników $a_{i,j}$ równania /3.1/ krzywej, w miejsce pochodnych cząstkowych i wartości funkcji w węźle początkowym. Wartość $F(x_p, y_p)$, niezbędną do wyznaczenia ciągu aproksymującego, można wtedy wyznaczyć wprost z równania /3.1/, natomiast wartości pochodnych cząstkowych w węźle początkowym - z równań /3.8/, ewentualnie /3.9/.

Węzły początkowy (x_p, y_p) i końcowy (x_k, y_k) /a szczególnie ten drugi/ powinny leżeć możliwie najbliżej dyskretyzowanego segmentu krzywej w sensie minimalnej odległości /od krzywej/ mierzonej w metryce generacyjnej, tj. $|F(x, y)|$.

Niezbędny w lokalizacji wektora stycznej kierunku obiegu krzywej B można zastąpić określeniem $\Delta x_p, \Delta y_p$ - elementarnymi przyrostami wzdłuż linii siatkowych, z węzła początkowego (x_p, y_p) do drugiego punktu ciągu. Na podstawie pierwszego elementarnego ruchu można bowiem określić kierunek obiegu krzywej B . Takie przyjęcie kierunku ruchu wzdłuż krzywej wydaje się być jednak mniej wygodne, ze względu na konieczność wyznaczenia /poza algorytmem generacyjnym/ wartości funkcji w węzłach siatki przewidywanych na drugi węzeł ciągu aproksymującego.

Długość dyskretyzowanego segmentu krzywej może być również podana kilkoma sposobami, np. przez określenie $\Delta x, \Delta y$ - zmian współrzędnych między punktem początkowym i końcowym segmentu, przez określenie punktu /węzła siatki/ końcowego (x_k, y_k) segmentu lub w jeszcze inny sposób. Gdy punkt końcowy dyskretyzowanego segmentu krzywej jest określony za pomocą współrzędnych (x_k, y_k) węzła końcowego, warunek końca dyskretyzacji ma postać:

$$(|x_i - x_k| < h) \wedge (|y_i - y_k| < h) = \text{TRUE}. \quad /3.17/$$

3.2.4. Izolowanie punktów osobliwych krzywej oraz wybór początkowego i końcowego węzła generowanego segmentu

Niezdegenerowane postaci krzywych n -stopnia, dla $n > 2$, mogą mieć punkty osobliwe, w szczególności punkty rozgałęzienia, ostrza krzywej, punkty samostyczności lub punkty katowe. W punktach tych nie jest spełniony warunek regularności krzywej, tj. skończoność pochodnych cząstkowych oraz

zależność $F_x^2 + F_y^2 > 0$. Z tego względu w punkcie osobliwym nie można przeprowadzić lokalizacji /1- i 2-stopnia/ nachylenia wektora kierunkowego stycznej do krzywej. Nie można tym samym określić kolejnego punktu ciągu aproksymującego krzywą. Punkty osobliwe należy więc izolować.

W dyskretyzacji krzywych zawierających punkty osobliwe i leżące blisko siebie różne gałęzie krzywej, opisanej jednym równaniem /3.1/ występują więc następujące ograniczenia:

- 1/ dyskretyzowany segment krzywej nie może zawierać punktów osobliwych między punktami początkowym i końcowym; punkt początkowy segmentu (x_p, y_p) również nie może być /ze względu na niemożliwość lokalizacji wektora stycznej/ punktem osobliwym;
- 2/ na punkty początkowe (x_p, y_p) nie można wybierać węzłów siatki leżących w bezpośredniej bliskości przylegającej do rozważanej gałęzi krzywej /na odległość mniejszą niż h /, tzn. w tych rejonach krzywej, w których przez elementarne pole siatki przechodzi więcej niż jedna gałąź krzywej. Rozpoczynając z takiego węzła dyskretyzację otrzymujemy linię łamaną z defektem, w kształcie ostrej piły, z dużymi zniekształceniami. Może również zostać wygenerowana niewłaściwa gałąź krzywej. Relacje /3.13/ lokalizujące wektor kierunkowy stycznej wyznaczają w takim punkcie ruch prostopadły do krzywej. Punkt ten jest bowiem punktem lokalnym tych gałęzi krzywej, które przechodzą przez przylegające do niego elementarne pole siatki. Dla krzywej przedstawionej na rys. 3.1 na punkt początkowy nie powinien zostać wybrany żaden z punktów krzywej /w pobliżu krzywej/ bliższy początkowi układu niż punkt $P(4,5)$;
- 3/ na punkt końcowy segmentu (x_k, y_k) nie można, podobnie jak w przypadku punktu (x_p, y_p) , wybierać punktów w tych rejonach krzywej, w których leżą blisko siebie różne gałęzie krzywej /tzn. gdzie przez elementarne pole siatki przechodzi więcej niż jedna gałąź krzywej/. W przedstawionym na rys. 3.2 przypadku punkt końcowy (x_k, y_k) nie zostanie znaleziony, a generacja zapętlą się: nastąpi wygenerowanie wszystkich czterech pętli krzywej, a następnie wielokrotne powtarzanie generacji całej krzywej. Punkty końcowe generowanych segmentów mogą natomiast być punktami osobliwymi. Podstawowym warunkiem jest umieszczenie ich w takim miejscu segmentu, w którym inne gałęzie krzywej są oddalone co najmniej o odległość równą modułowi siatki h .

3.3. Algorytmy dyskretyzacji krzywych

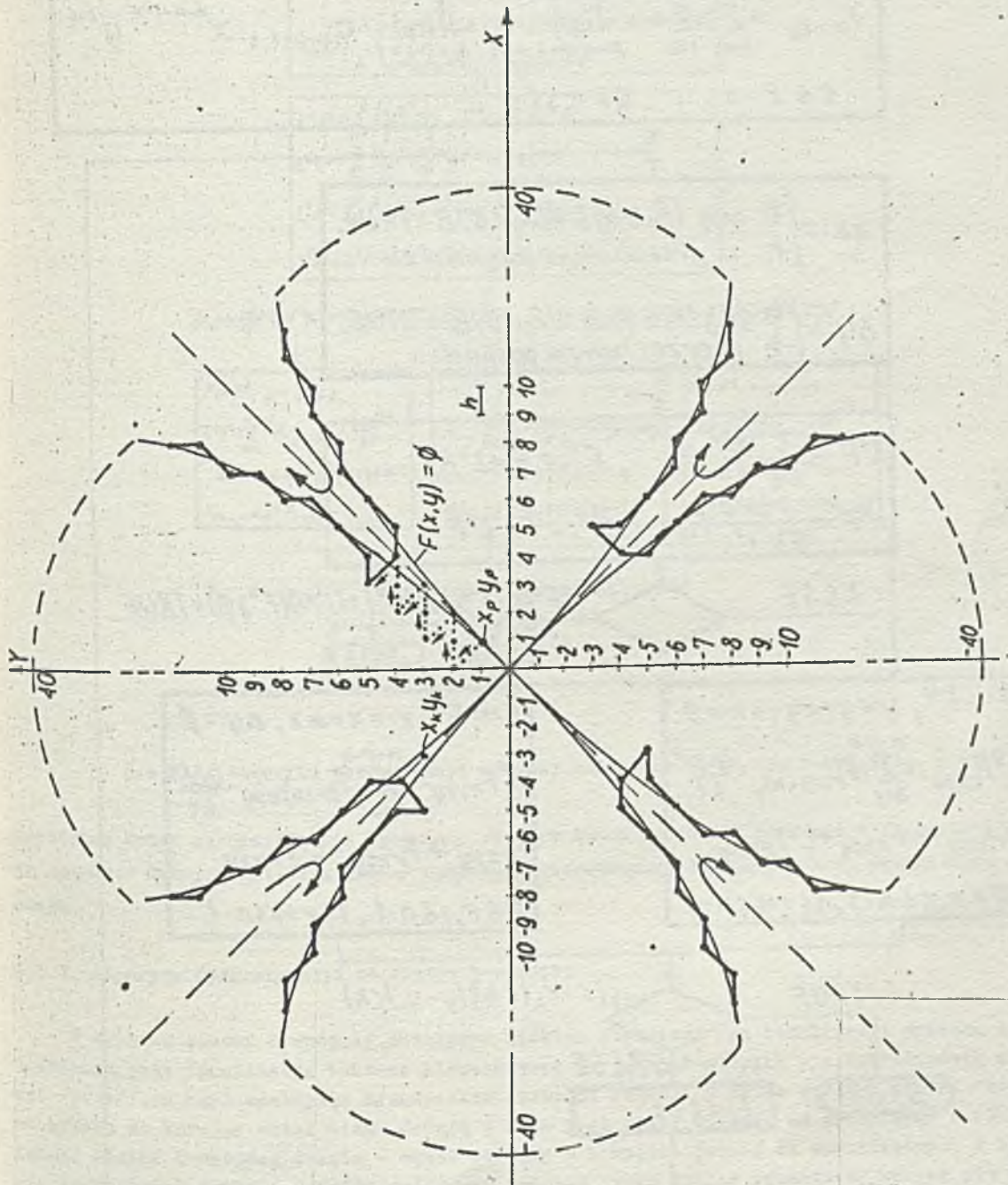
Przeprowadzone wyżej rozważania pozwalają skonstruować algorytmy generacji krzywych algebraicznych n -stopnia, płaskich na kwadratowych siatkach 4- i 8-spójnych.

Po zapamiętaniu danych początkowych /określających współrzędne węzła początkowego (x_p, y_p) i końcowego (x_k, y_k) oraz wartości funkcji $F(x_p, y_p)$ / wyznacza się wartości pochodnych cząstkowych w punkcie początkowym (x_p, y_p) , a następnie kierunku elementarnych ruchów wzdłuż współrzędnych x i y odpowiadające wektorowi kierunkowemu stycznej /lokalizacja wektora kierunkowego stycznej z dokładnością do $\frac{\pi}{2}$ - 1-stopnia/. Następny krok algorytmu zależy od rzędu spójności siatki, na której jest dokonywana dyskretyzacja.

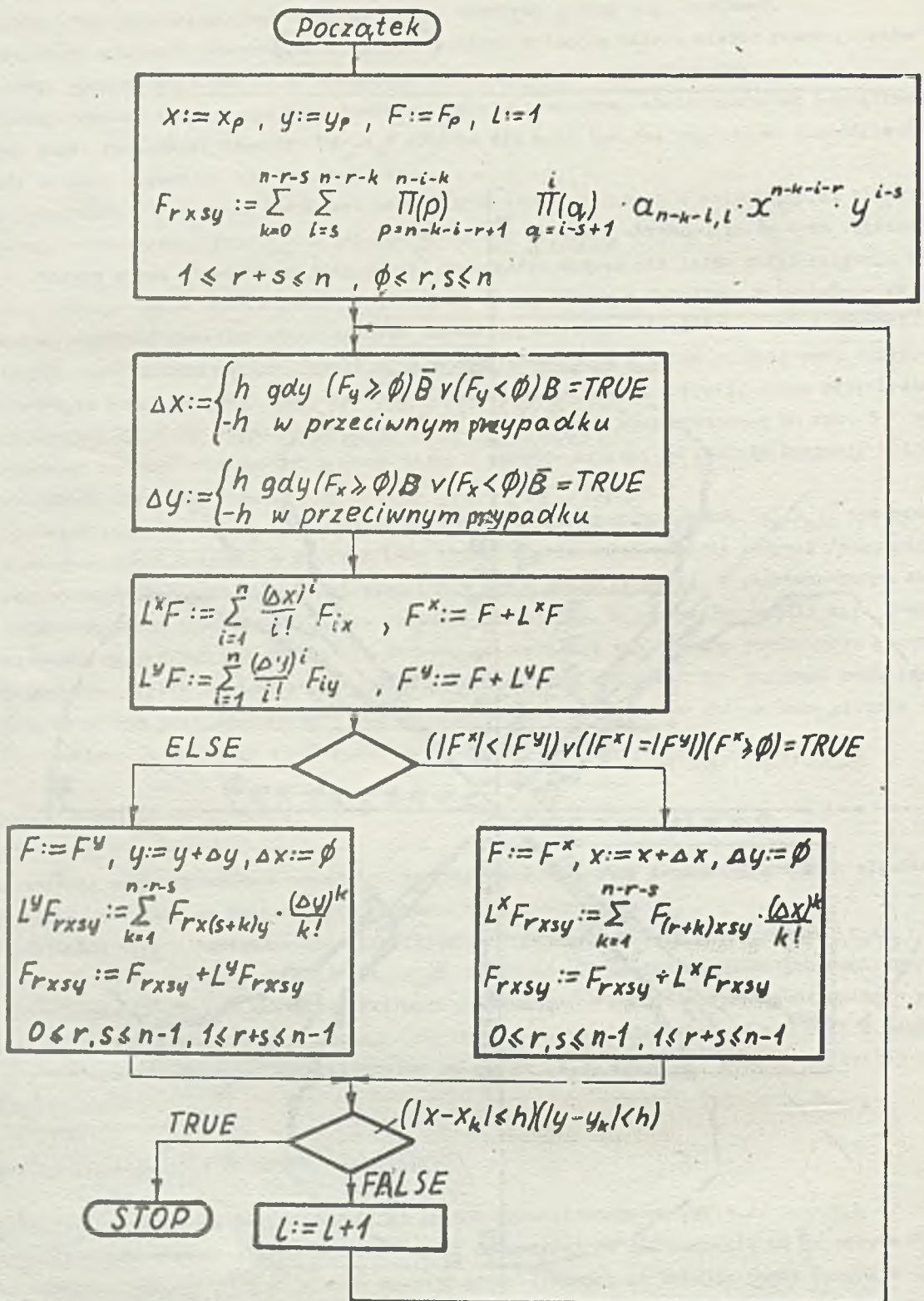
3.3.1. Algorytm dyskretyzacji na siatce 4-spójnej

Algorytm dyskretyzacji na siatce 4-spójnej został przedstawiony na rys. 3.2.

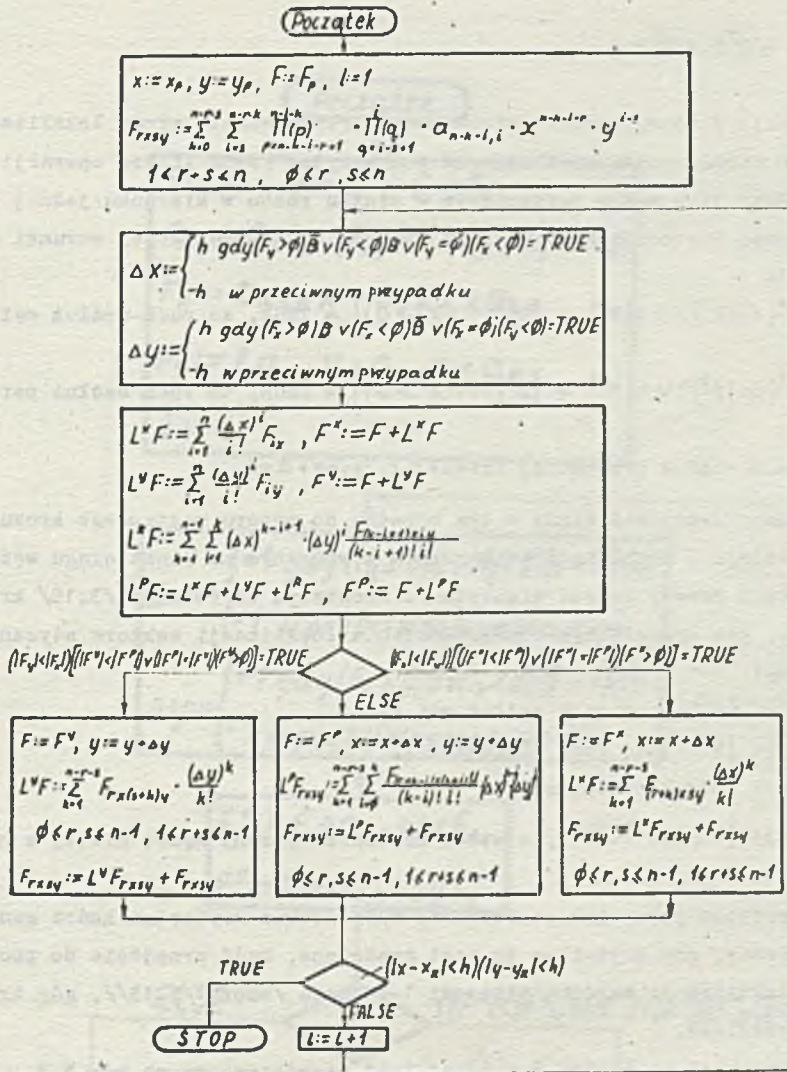
Po zlokalizowaniu wektora kierunkowego stycznej do krzywej /z dokładnością do $\frac{\pi}{2}$ / odbywa się wyznaczanie wartości funkcji F^x i F^y w dwóch węzłach przewidywanych na kolejny punkt ciągu. W tym celu wyznacza się operatory $L^x F$ i $L^y F$ /wzory /3.6//. Na kolejny punkt ciągu zostaje wybrany ten węzeł, w którym bezwzględna wartość funkcji jest mniejsza /lewa bądź prawa gałąź algorytmu/. Końcowymi operacjami algorytmu jest uaktualnienie pochodnych cząstkowych rzędu $1+n-1$ dla nowo wybranego punktu ciągu /wyznaczenie operatorów $L^x F_{rxsy}$ lub $L^y F_{rxsy}$ - wzory /3.8// oraz sprawdzenie



Rys. 3.1.1. Ilustracja zasady wyboru punktów: początkowego X_p, Y_p i końcowego X_k, Y_k w przypadku aproksymacji wielogązłowej krzywej $P/konieczny$ czterolistnej/ algebraicznej



Rys. 3.2. Algorytm aproksymacji krzywej n-stopnia na siatce 4-spójnej



Rys.3.3. Algorytm aproksymacji krzywej n-stopnia na siatce 8-spójnej

kryterium końca generacji. Nie spełniony warunek końca generacji powoduje w algorytmie przejście do operacji lokalizacji /1-stopnia/ operatora kierunkowego stycznej w nowo wyznaczonym punkcie ciągu.

3.3.2. Algorytm dyskretyzacji na siatce 8-spójnej

W wypadku siatki 8-spójnej, następnym krokiem algorytmu /po lokalizacji wektora stycznej 1-stopnia/ jest lokalizacja wektora kierunkowego stycznej 2-stopnia - z dokładnością do $\frac{1}{4}$ /wg relacji /3.14//, po czym następuje wyznaczenie wartości funkcji w dwóch węzłach siatki "kandydujących", do wyboru na kolejny węzeł ciągu. Jednym z nich jest węzeł odległy od aktualnego o $\sqrt{2}h$ wzdłuż przekątnej siatki 8-spójnej, drugim - węzeł odległy o h wzdłuż jednej ze współrzędnych x bądź y . Wyznaczenie wartości funkcji w węźle osiąganym podczas ruchu wzdłuż przekątnej odbywa się niezależnie od wyników lokalizacji wektora stycznej 2-stopnia. Drugi z "kandydujących" węzłów /odległy o h wzdłuż osi x lub y / bywa określany w chwili lokalizacji wektora stycznej 2-stopnia. Zauważmy jednak, że wartość funkcji w węźle osiąganym ruchem wzdłuż przekątnej można wyznaczyć wykorzystując wartości funkcji w węzłach osiąganym ruchami wzdłuż osi x oraz y . Zachodzi bowiem /3.6/:

$$L^P F = L^X F + L^Y F + L^R F ;$$

stąd też wyznaczenie funkcji w rozważanych węzłach można przeprowadzić przed lokalizacją wektora stycznej 2-stopnia. W ten sposób można wyeliminować z algorytmu pewną liczbę operacji niezbędnych do wyznaczenia wartości funkcji w węźle osiągniętym w wyniku ruchu w kierunku jednej z osi układu. Lokalizacja wektora stycznej 2-stopnia nastąpi więc w kroku następnym, a jej warunki przyjmą wtedy postać odmienną od /3.16/:

- jeżeli $(|F_x| < |F_y|) \wedge [(|F^X| < |F^P|) \vee (|F^X| = |F^P|) \wedge (F^X > 0)] = \text{TRUE}$, to ruch wzdłuż osi x / $x:=x+\Delta x$, $\Delta y:=0$, $y:=y$ /; /3.18/

- jeżeli $(|F_x| > |F_y|) \wedge [(|F^Y| > |F^P|) \vee (|F^Y| = |F^P|) \wedge (F^Y > 0)] = \text{TRUE}$, to ruch wzdłuż osi y / $\Delta x:=0$, $x:=x$, $y:=y+\Delta y$ /;

- w przeciwnym wypadku ruch wzdłuż przekątnej / $x:=x+\Delta x$, $y:=y+\Delta y$ /.

Lokalizacja wektora stycznej 2-stopnia służy w tym wypadku do wyboru następnego kroku algorytmu: uaktualnienia wartości funkcji i pochodnych cząstkowych w wybranym na punkt ciągu węźle siatki /wybór lewej, środkowej bądź prawej gałęzi algorytmu/. Prostszy od relacji /3.18/ kryterium wyboru kolejnego punktu ciągu, nie wymagającym przeprowadzania lokalizacji wektora stycznej 2-stopnia, jest następujące kryterium:

- jeżeli $(|F^Y| < |F^P|) \wedge (|F^Y| < |F^X|)$, to ruch wzdłuż osi y,

- jeżeli $(|F^X| > |F^P|) \wedge (|F^X| < |F^Y|)$, to ruch wzdłuż osi x,

/3.19/

- w przeciwnym wypadku ruch wzdłuż przekątnej.

Może jednak zajść zależność $|F^X| = |F^Y| < |F^P|$, a wtedy zostanie wybrany węzeł siatki z największym modulem wartości funkcji.

Operacją końcową algorytmu jest, jak poprzednio, sprawdzenie kryterium końca generacji /relacja /3.18// i jej zakończenie, gdy kryterium to jest spełnione, bądź przejście do początkowych operacji algorytmu, tj. do lokalizacji wektora stycznej 1-stopnia /wzory /3.13//, gdy kryterium końca generacji nie zostanie spełnione.

Algorytm generacji krzywych na siatce 8-spójnej jest przedstawiony na rys.3.3.

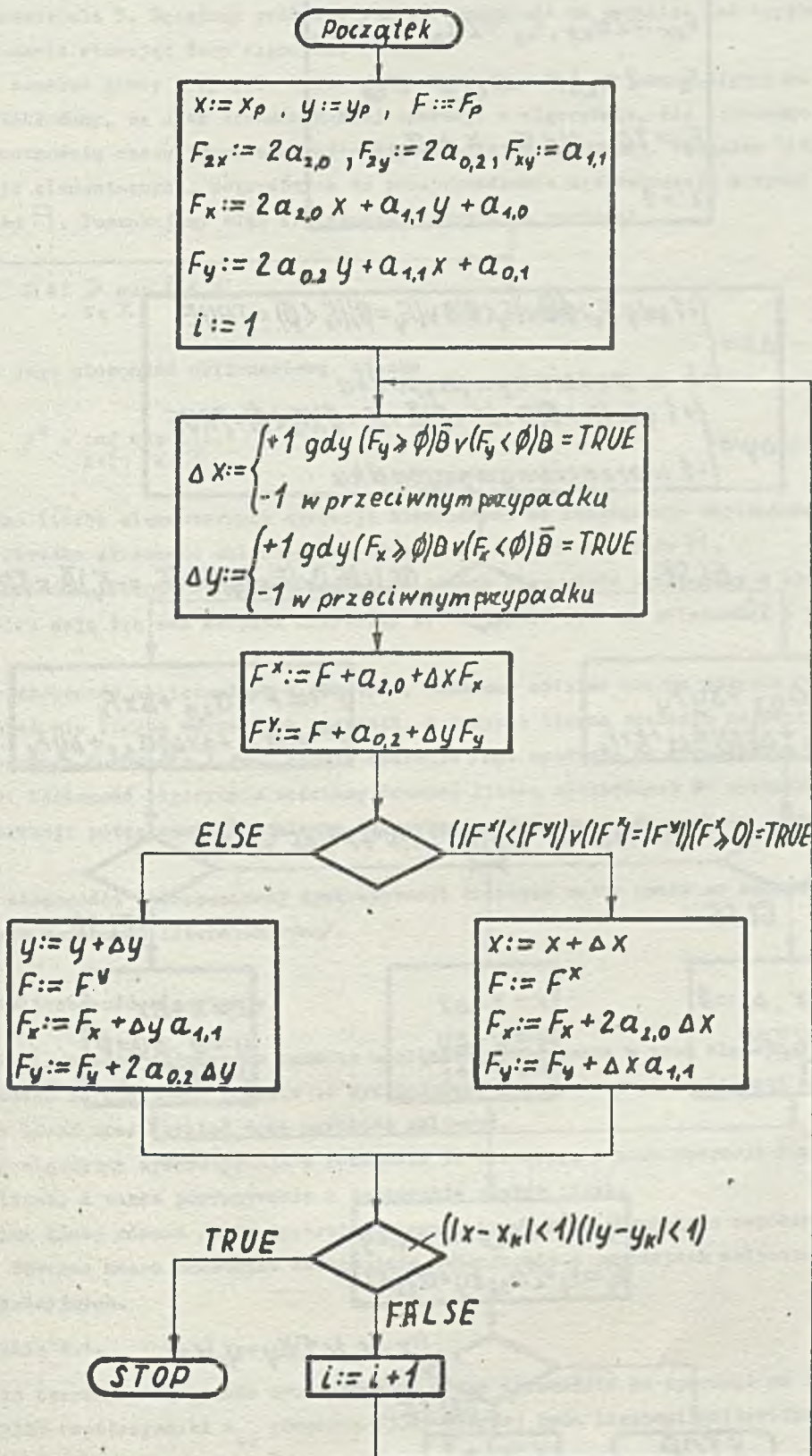
3.3.3. Przypadek algorytmów dla krzywych 2-stopnia / $n=2$ /

Szczególnie prostą postać mają powyższe algorytmy dla krzywych 2-stopnia. Zawierają bowiem jedynie operacje sumowania i porównania modułów liczb oraz proste operacje logiczne na argumentach boolowskich. Z tego względu są atrakcyjne dla układowej realizacji. Układy generatorów są wtedy bardzo proste, a generacja może być realizowana bardzo szybko. Są więc szczególnie przydatne w takich zastosowaniach, jak na przykład monitory i drukarki graficzne.

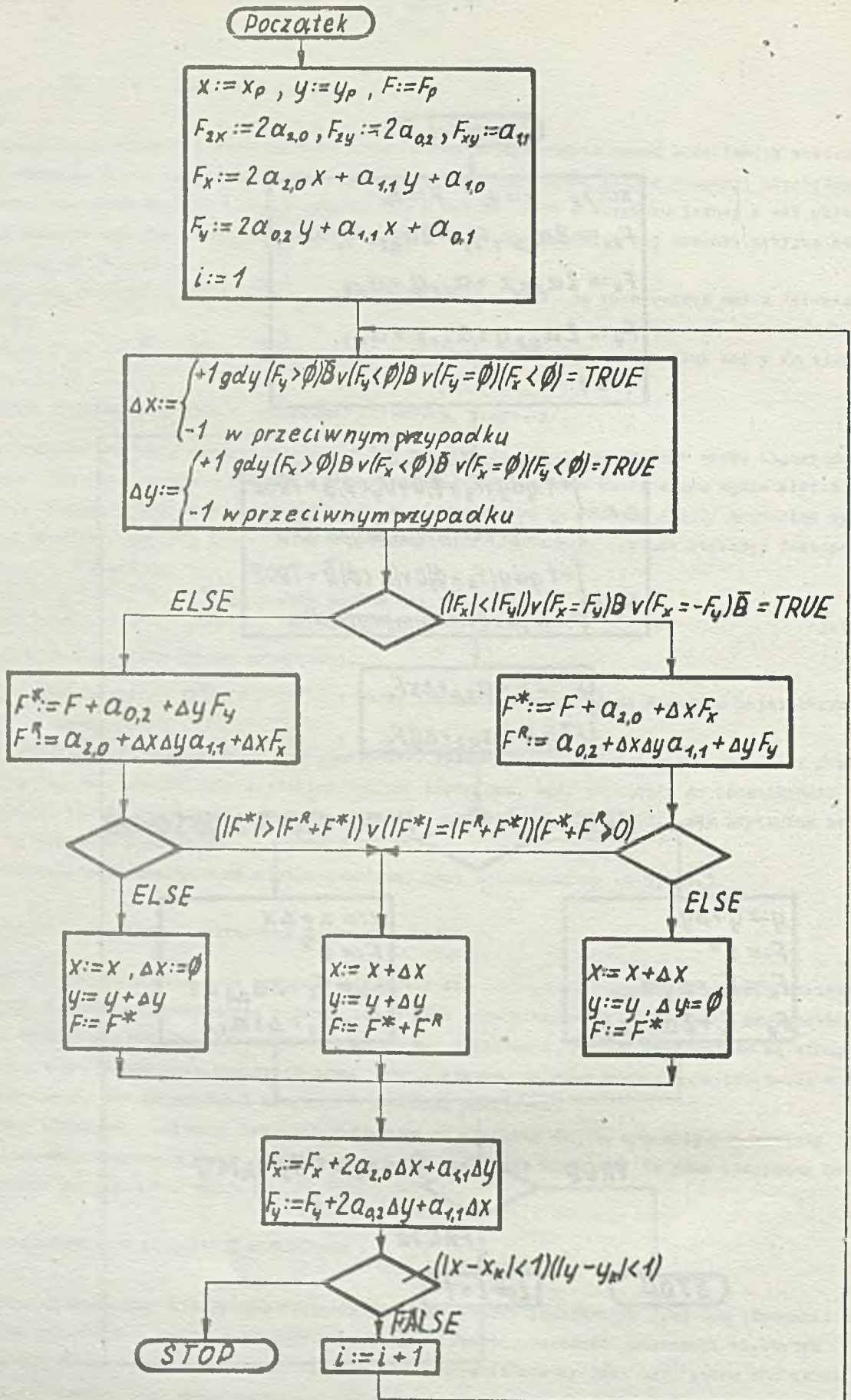
Algorytmy układowej generacji krzywych 2-stopnia na siatkach 4-, 8- i n-spójnych zostały szczegółowo przeanalizowane w pracy [59]. W niniejszej rozprawie algorytmy te /dla przypadku $n=1$ / są przedstawione na rys.3.4 i rys.3.5.

4. ANALIZA ZŁOŻONOŚCI OBLICZENIOWEJ ALGORYTMÓW

W wielu zastosowaniach algorytmów dyskretyzacji parametrem podstawowym jest ich złożoność obliczeniowa, identyfikowana potocznie z szybkością ich realizacji. Szybkość realizacji algorytmu określa jego przydatność, bowiem spośród różnych algorytmów stosowany jest ten, który dla określonej techniki realizacji /np. komputerowej - układowej bądź programowej/ jest realizowany najszybciej.



Rys. 3.4. Algorytm aproksymacji krzywej 2-stopnia na siatce 4-spójnej



Rys. 3.5. Algorytm aproksymacji krzywej 2-stopnia na siatce 8-spójnej

Ocena szybkości /złożoności obliczeniowej/ realizacji algorytmu jest zagadnieniem równie ważnym, jak jego opracowanie. W dalszym ciągu zajmiemy się oceną złożoności obliczeniowej algorytmów przedstawionych w rozdziale 3. Będziemy próbować znaleźć odpowiedź na pytanie: jak szybko można otrzymać rozwiązanie zadania stosując dany algorytm.

Niech \mathcal{K} oznacza klasę krzywych, które można dyskretyzować za pomocą algorytmu A ze zbioru algorytmów \mathcal{A} . Zakładamy, że czas trwania każdej operacji w algorytmie, dla dowolnego algorytmu $A \in \mathcal{A}$, jest krotnością czasu trwania określonej operacji elementarnej. Symbolem $L(K,A)$ oznaczymy liczbę operacji elementarnych, potrzebnych do przeprowadzenia dyskretyzacji krzywej $K \in \mathcal{K}$ za pomocą algorytmu $A \in \mathcal{A}$. Poszukujemy więc dla danego algorytmu A wartości

$$Z(A) \geq \sup_{K \in \mathcal{K}} L(A,K), \quad /4.1/$$

która określa jego złożoność obliczeniową. Liczba

$$Z^{\mathcal{K}} = \inf_{A \in \mathcal{A}} \sup_{K \in \mathcal{K}} L(A,K) \quad /4.2/$$

tj. najmniejsza liczba elementarnych operacji niezbędnych do rozwiązania najtrudniejszego zadania w klasie \mathcal{K} , określa złożoność obliczeniową klasy \mathcal{K} ze względu na zbiór \mathcal{A} .

W celu zbadania złożoności obliczeniowej opisanych algorytmów zgrupujemy w klasie \mathcal{K} wszystkie te krzywe, które mają ten sam stopień krzywizny n . Następnie zbadamy zależności Z i $Z^{\mathcal{K}}$ jako funkcję n .

Szacując złożoność obliczeniową algorytmów, będziemy opierać się na pojęciu "operacji głównej": będziemy oceniać nie liczbę wszystkich operacji, a jedynie liczbę operacji najbardziej czasochłonnych /komputerowo/. Sumowanie i inne proste operacje /np. operacje na argumentach boolowskich/ celowo pomijamy. Złożoność algorytmów będziemy oceniać liczbą niezbędnych do wykonania operacji mnożenia oraz operacji potęgowania, dzielenia i operacji silnia sprowadzonych do odpowiedniej liczby mnożeń.

Analizę złożoności obliczeniowej dyskretyzacji krzywych autor uważa za całkowicie oryginalną /brak podobnych opracowań literaturowych/.

4.1. Całkowitoliczbowość algorytmów

Całkowitoliczbowość algorytmów oznacza możliwość wykonywania w tych algorytmach wszystkich obliczeń w liczbach całkowitych. Pozwala to wyeliminować z komputerowej realizacji algorytmów błędy reprezentacji liczb oraz uzyskać dużą szybkość obliczeń.

Rozważmy algorytmy dyskretyzacji z rozdziału 3. Występują w nich operacje sumowania, mnożenia i dzielenia liczb, a także porównywania i testowania znaków liczb.

Szczególną klasę równań /3.1/ dyskretyzowanych krzywych są równania o współczynnikach $a_{1,j}$ całkowitych. Wówczas można udowodnić następujące twierdzenie o operacjach obliczeniowych w algorytmach dyskretyzacyjnych.

Twierdzenie 4.1.

Wszystkie operacje algorytmów dyskretyzacji można sprowadzić do operacji na liczbach całkowitych o ile tylko współczynniki $a_{1,j}$ równania /3.1/ krzywej będą liczbami całkowitymi.

Dowód

Operacje podnoszenia do potęgi i operacja ! /silnia/ sprowadzają się do mnożenia liczb. Z przyjętego wcześniej założenia, że moduł siatki h jest liczbą naturalną, wynika całkowitoliczbowość współrzędnych węzłów siatki. Operacje potęgowania $x^{n-k-r-i}$ oraz y^{i-s} /występujące we wzorze na pochodne cząstkowe w punkcie początkowym (x_p, y_p) / są więc operacjami potęgowania liczb całkowitych. Wykładniki potęgowe są bowiem z założenia liczbami naturalnymi.

Operacje dzielenia $\frac{(i)!}{(i-s)!}$ oraz $\frac{(n-k-i)!}{(n-k-1-r)}$ można wprowadzić do równoważnych operacji mnożenia liczb naturalnych p i q , odpowiednio $\prod_{q=1-s+1}^i (q)$ oraz $\prod_{p=n-k-r-i+1}^{n-k-1} (p)$. Wyznaczone wartości pochodnych cząstkowych w punkcie początkowym są więc liczbami całkowitymi /przy założonej całkowitoliczbowości współczynników równania /3.1//.

Lokalizacja nachylenia wektora kierunkowego stycznej wymaga jedynie wykonania kilku prostych operacji logicznych na argumentach boolowskich i testowania znaków wartości pochodnych cząstkowych 1-rzędu.

Obliczanie wartości $L^X F(x,y)$, $L^Y F(x,y)$ i $L^{RF}(x,y)$ wymaga wyznaczenia sum z wyrażeń $F_{rx} \cdot \frac{(\Delta x)^r}{r!}$, $F_{sy} \cdot \frac{(\Delta y)^s}{s!}$ oraz $F_{(r-1+1)xy} \cdot \frac{(\Delta x)^{r-1+1} \cdot (\Delta y)^1}{(r-1+1)! \cdot 1!}$. Ponieważ $|\Delta x| = |\Delta y| = h$, pozostaje wykazać, że ilorazy $\frac{F_{rx}}{r!}$, $\frac{F_{sy}}{s!}$ oraz $\frac{F_{(r-1+1)xy}}{(r-1+1)! \cdot 1!}$ są liczbami całkowitymi, a wówczas wyznaczenie powyższych wartości będzie wymagać wykonania operacji mnożenia i sumowania liczb całkowitych i da wynik całkowitoliczbowy.

Wyrażenie $\frac{F_{rx}}{r!}$ można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{F_{rx}}{r!} &= \sum_{k=0}^{n-r} \sum_{i=0}^{n-k-r} \frac{(n-i-k)!}{(n-i-k-r)! r!} \cdot a_{n-i-k,i} \cdot x^{n-i-k-r} \cdot y^i = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-k-r} \binom{n-i-k}{r} \cdot R_{t,i}(x), \end{aligned}$$

gdzie: $R_{t,i}(x) = a_{n-i-k,i} \cdot x^{n-i-k-r} \cdot y^i$, wskaźnik $t=n-i-k$, $r \leq n-i-k$, $t+i = 1, 2, \dots, n$.

$\binom{n-i-k}{r}$ jako r -elementowa kombinacja z $(n-i-k)$ elementów jest z definicji całkowite. $\frac{F_{rx}}{r!}$ jest więc liczbą całkowitą, gdy $R_{t,i}(x)$ jest liczbą całkowitą. Podobnie można przedstawić wyrażenie:

$$\begin{aligned} \frac{F_{sy}}{s!} &= \sum_{k=0}^{n-s} \sum_{i=s}^{n-k} \frac{i!}{(i-s)! s!} \cdot a_{n-i-k,i} \cdot x^{n-i-k} \cdot y^{i-s} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-s} \sum_{i=s}^{n-k} \binom{i}{s} \cdot R_{t,i}(y), \end{aligned}$$

gdzie: $R_{t,i}(y) = a_{n-i-k,i} \cdot x^{n-i-k} \cdot y^{i-s}$, $i \geq s$, $t+i = 1, 2, \dots, n$, przyjmujące również wartości całkowite. Wyrażenie:

$$\frac{F_{(r-s+1)xy}}{(r-s+1)! s!} = \sum_{k=0}^{n-r+s-1} \sum_{i=s}^{n-1-r+s-1} \frac{(n-1-k)! i!}{(r-s+1)! s! (n-1-k-r+s-1)!} \cdot a_{n-1-k,i} \cdot x^{n-1-k-r+s-1} \cdot y^{i-s} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-r+s-1} \sum_{i=s}^{n-k-r+s-1} \binom{i}{s} \binom{n-1-k}{r-s+1} \cdot R_{t,i}(x,y)$$

gdzie: $R_{t,i}(x,y) = a_{n-1-k,i} \cdot x^{n-1-k-r+s-1} \cdot y^{i-s}$, $i \geq s$, $n-1-k > r-s+1$ /przy całkowitych $a_{n-1-k,i}$ / daje również wartość całkowitą.

Operacje wyznaczenia modułów wartości liczbowych $L^X F$, $L^Y F$, $L^P F$ sprowadzają się więc do prostych operacji sumowania liczb całkowitych.

W identyczny sposób wykażemy, że wyniki operacji:

$$\frac{F_{(r+p)xy}}{p!}, \frac{F_{rx(s+q)y}}{q!} \text{ i } \frac{F_{(r+p-q)x(s+q)y}}{(p-q)! q!}$$

są liczbami całkowitymi.

Wyrażenie pierwsze daje się przedstawić w postaci:

$$\frac{F_{(r+p)xy}}{p!} = \sum_{k=0}^{n-s-r-p} \sum_{i=s}^{n-k-r-p} \frac{(n-1-k)! i!}{(n-1-k-r-p)! (i-s)!} \cdot a_{n-1-k,i} \cdot x^{n-1-k-r-p} \cdot y^{i-s} =$$

$$= \sum_{r=0}^{n-s-r-p} \sum_{i=s}^{n-k-r-p} \binom{n-1-k}{r+p} \binom{i}{s} \binom{r+p}{p} \cdot r! s! \cdot R_{t,i}(x)$$

gdzie: $R_{t,i}(x) = a_{n-1-k,i} \cdot x^{n-1-k-r-p} \cdot y^{i-s}$, $n-1-k > r+p$, $i \geq s$, tj. jako suma iloczynów liczb całkowitych.

Natomiast wyrażenie drugie daje się przedstawić w postaci:

$$\frac{F_{rx(s+q)y}}{q!} = \sum_{k=0}^{n-r-s-q} \sum_{i=s+q}^{n-r-k} \frac{(n-1-k)! i!}{q! (n-1-k-r)! (i-s-q)!} \cdot a_{n-1-k,i} \cdot x^{n-1-k-r} \cdot y^{i-s-q} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-r-s-q} \sum_{i=s+q}^{n-r-k} \binom{n-1-k}{r} \binom{i}{s+q} \binom{s+q}{q} \cdot r! s! \cdot R_{t,i}(y)$$

gdzie: $R_{t,i}(y) = a_{n-1-k,r} \cdot x^{n-1-k-r} \cdot y^{i-s-q}$, $n-1-k > r$, $i > s+q$, $t+i = 1, 2, \dots, n-r-s-q$, $r+s+q \leq n$, jest więc również sumą iloczynów liczb całkowitych.

Wyrażenie trzecie zaś, jeżeli $p > q$, $r > q$ daje się przedstawić w następującej postaci:

$$\frac{F_{(r+p+q)x(s+q)y}}{(p-q)! q!} = \sum_{k=0}^{n-r-p-s} \sum_{i=s+q}^{n-k-r-p+q} \frac{(n-1-k)! i!}{(p-q)! q! (n-1-k-r-p+q)! (i-s-q)!} \cdot a_{n-1-k,i} \cdot x^{n-1-k-r-p+q} \cdot y^{i-s-q} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-r-p-s} \sum_{i=s+q}^{n-k-r-p+q} \binom{r+p-q}{p-q} \binom{r}{q} \binom{i}{s+q} \binom{n-i-k}{r+p-q} \cdot (r-q)! \cdot (s+q)! \cdot R_{t,1}(x,y)$$

gdzie: $R_{t,1}(x,y) = a_{n-i-k,i} \cdot x^{n-i-k-r-p+q} \cdot y^{i-s-q}$.

Tak więc zostało wykazane, że wszystkie z występujących w algorytmach operacji: sumowania, mnożenia, dzielenia, potęgowania oraz operacje silnia są - przy założonej całkowitoliczowości współczynników $a_{i,j}$ równania /3.1/ - operacjami na liczbach całkowitych i dają wyniki całkowitoliczbowe.

4.2. Złożoność obliczeniowa algorytmów

W literaturze specjalistycznej omawiającej problematykę złożoności obliczeniowej algorytmów S. Wałukiewicz w 1975 r. rozróżnia dwie klasy złożoności obliczeniowej algorytmów: wykładniczą i wielomianową. W świetle tej klasyfikacji omawiane w niniejszej rozprawie algorytmy cechuje złożoność wielomianowa.

Twierdzenie 4.2

Złożoność obliczeniowa algorytmów dyskretyzacji jest złożonością wielomianową, tzn. wzrasta wielomianowo wraz ze wzrostem stopnia dyskretyzowanej krzywej.

Dowód

Dla dowodu wyprowadzimy wzory na złożoność obliczeniową poszczególnych algorytmów dla dwóch wartości modułów siatki $h=1$ oraz $h \neq 1$.

4.2.1. Złożoność wyznaczania jednego węzła ciągu dla $h > 1$

Operacje wyznaczania pochodnych cząstkowych w punkcie początkowym (x_p, y_p) wymagają wykonania następujących mnożeń:

- w celu wyznaczenia pochodnych względem jednej zmiennej dla zmiennych x oraz y /wg wzoru /3.9// w liczbie:

$$L_j^0(\xi) = 2 \sum_{r=1}^n \sum_{k=0}^{n-r} \left[\sum_{i=0}^{n-r-k} (n-k)-1 \right] = \frac{n^4}{4} + \frac{5n^3}{6} - \frac{n^2}{4} - \frac{5n}{6}$$

- w celu wyznaczenia pochodnych cząstkowych mieszanych w liczbie:

$$L_m^0(\xi) = \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-s} \sum_{k=0}^{n-r-s} \left[\sum_{i=s}^{n-r-k} (n-k)-2 \right] = \frac{n^5}{30} + \frac{n^4}{12} - \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{12} + \frac{3n}{10}$$

Wyznaczenie wszystkich pochodnych cząstkowych w punkcie początkowym wymaga więc łącznie wykonania następującej liczby mnożeń, określającej się wielomianem 5-stopnia względem stopnia krzywej:

$$L^0 = L_j^0(\xi) + L_m^0(\xi) = \frac{n^5}{30} + \frac{n^4}{3} + \frac{n^3}{2} - \frac{n^2}{3} - \frac{8n}{15} \quad /4.3/$$

/dla $n = 2, 3, 4, 6$, $L_\xi^0 = 8, 44, 144, 784/$.

Operacja wyznaczenia operatora L^R_F wymaga wykonania mnożeń w liczbie:

$$L^0_{\xi}(L^R_F) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^k 2k = \frac{1}{3}(2n^3 - 3n^2 + n)$$

Każda z operacji wyznaczenia operatorów L^X_F i L^Y_F wymaga wykonania mnożeń w liczbie:

$$L^0_{\xi}(L^X_F, L^Y_F) = \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

co daje razem:

$$L^0_{\xi}(L^X_F + L^Y_F) = 2n^2$$

a łącznie z wyznaczeniem operatora L^R_F :

$$L^0_{\xi}(\xi LF) = \frac{2}{3}n^3 + n^2 + \frac{4}{3}n$$

/4.4/

/dla $n=3$, $L^0_{\xi}(\xi LF) = 28/$.

Operacje wyznaczenia operatorów $L^X_{F_{rxsy}}$ i $L^Y_{F_{rxsy}}$, dla $0 \leq r, s \leq n-1$, wymagają wykonania następującej liczby mnożeń:

- operacja wyznaczenia operatorów $L^X_{F_{rx}}$:

$$L^0_{\xi}(\xi L^X_{F_{rx}}) = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-r} (2k-1) = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

- tyleż samo mnożeń należy wykonać w trakcie wyznaczenia operatora $L^X_{F_{sy}}$.

Łączna liczba mnożeń wynosi więc:

$$L^0(\xi L^X_{F_{rx}} + \xi L^X_{F_{sy}}) = \frac{2}{3}n^3 - n^2 + \frac{n}{3}.$$

Każda z operacji wyznaczenia operatorów $L^X_{F_{rxsy}}$ i $L^Y_{F_{rxsy}}$, dla $r, s \neq 0$, wymaga wykonania mnożeń w liczbie:

$$L^0_{\xi}(L^X_{F_{rxsy}}, L^Y_{F_{rxsy}}) = \sum_{r=1}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-r-1} \sum_{k=1}^{n-r-s} (2k-1) = \frac{n^4}{12} - \frac{n^3}{3} + \frac{5}{12}n^2 - \frac{n}{6}$$

Stąd wyznaczenie operatorów $L^X_{F_{rxsy}}$ i $L^Y_{F_{rxsy}}$ wszystkich pochodnych cząstkowych /dla $0 \leq r, s \leq n-1/$ wymaga wykonania łącznie mnożeń:

$$L^0_{\xi}(\xi L^X_{F_{rxsy}}, L^Y_{F_{rxsy}}) = \frac{1}{12}(n^4 + 4n^3 - 7n^2 + 2n)$$

/4.5/

/dla $n = 3$ $L^0_{\xi}(\xi L^X_{F_{rxsy}}, \xi L^Y_{F_{rxsy}}) = 11/$.

Wyznaczenie operatora $L^P_{F_{rxsy}}$ wymaga wykonania mnożeń w liczbie:

- dla pochodnych cząstkowych względem jednej zmiennej:

$$L_{\xi}^0(\varepsilon L^P_{rx}, \varepsilon L^P_{sy}) = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-r} \left[\sum_{i=0}^k 2(k-1) + 2 \right] = \frac{n^4 - n^2}{6}$$

dla każdej ze zmiennych x i y /dla n=3 $L^0(\varepsilon L^P_{rx}, \varepsilon L^P_{sy}) = 12/$

- dla pochodnych cząstkowych względem obydwu zmiennych:

$$L_{\xi}^0(L^P_{rxsy}) = \sum_{r=1}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-r-1} \sum_{k=1}^{n-r-s} \left[\sum_{i=0}^k 2(k-1) + 2 \right] = \frac{n^5}{30} - \frac{n^4}{12} + \frac{n^2}{12} - \frac{n}{3}$$

Łączna liczba niezbędnych do wykonania mnożeń, w trakcie obliczania operatora L^P_{rxsy} , każdej z pochodnych cząstkowych jest równa:

$$L_{\xi}^0(\varepsilon L^P_{rxsy}) = \frac{n^5}{30} + \frac{n^4}{4} - \frac{n^2}{4} - \frac{n}{30} \quad /4.6/$$

/dla n=3 $L_{\xi}^0(\varepsilon L^P_{rxsy}) = 26/.$

W pętli algorytmu są więc wykonywane mnożenia:

$$L_{\xi}^p(p_a 1) = L_{\xi}^0(\varepsilon LF) + L_{\xi}^0(\varepsilon L^X_{rxsy}, \varepsilon L^Y_{rxsy}) = \frac{n^4}{12} + n^3 + \frac{5}{12} n^2 + \frac{n}{2} \quad /4.7/$$

/dla n=2,3,4,6 $L_{\xi}^p(p_a 1) = 12, 39, 94, 342/,$

bądź

$$L_{\xi}^p(p_a 2) = L_{\xi}^0(\varepsilon LF) + L_{\xi}^0(\varepsilon L^P_{rxsy}) = \frac{n^5}{30} + \frac{n^4}{4} - \frac{2}{3} n^3 + \frac{3}{4} n^2 + \frac{3}{10} n \quad /4.8/$$

/dla n=2,3,4,6 $L_{\xi}^p(p_a 2) = 14, 54, 154, 756/$, zależnie od tego, czy odcinek łamanej jest wyznaczony wzdłuż głównej linii siatki, czy też wzdłuż przekątnej. Złożoność przebiegu jednokrotnej pętli algorytmu jest więc określona wielomianem 5-stopnia względem n, tj. względem stopnia krzywej /rys.4.1/.

4.2.2. Złożoność obliczeniowa wyznaczania jednego węzła ciągu dla h=1

Założmy, że h=1, tj. że siatka ma wymiar jednostkowy. Jest to przypadek często występujący w praktyce. Co więcej, przypadki, w których h≠1, można w prosty sposób sprowadzić do poprzedniego przez odpowiednie skalowanie układu współrzędnych. Złożoność obliczeniowa algorytmów zmniejszy się wtedy w sposób istotny, chociaż nie ulegnie zmianie złożoność wyznaczania pochodnych cząstkowych w punkcie początkowym.

Wyznaczenie operatora L^R_F wymaga wykonania mnożeń w liczbie:

$$L_i^0(L^R_F) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^k (k-1) = \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{3}$$

Wyznaczenie operatorów L^X_F i L^Y_F wymaga wykonania dla każdego operatora mnożeń w liczbie:

$$L_1^0(L^X_F, L^Y_F) = \sum_{k=1}^n (k-1) = \frac{n^2-n}{2}$$

czyli w sumie:

$$L_1^0(L^X_F + L^Y_F) = n^2 - n,$$

a łącznie z wyznaczeniem operatora L^R_F :

$$L_1(\xi LF) = \frac{n^3-n}{3}$$

/4.9/

/dla $n=3$ $L_1^0(\xi LF) = 8/$.

Wyznaczenie operatorów $L^X_{F_{rxsy}}$ oraz $L^Y_{F_{rxsy}}$, dla $0 \leq r, s \leq n-1$ wymaga wykonania następujących mnożeń:

- wyznaczenia operatora $L^X_{F_{rx}}$:

$$L_1^0(\xi L^X_{F_{rx}}) = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-r} (k-1) = \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{2} - \frac{4}{3}n,$$

- wyznaczenie operatora $L^X_{F_{sy}}$, wykonując tyle samo mnożeń; łączna liczba mnożeń jest więc równa:

$$L_1^0(\xi L^X_{F_{rx}} + \xi L^X_{F_{sy}}) = \frac{n^3}{3} - n^2 + \frac{2}{3}n.$$

Wyznaczenie operatorów $L^X_{F_{rxsy}}$ oraz $L^Y_{F_{rxsy}}$, dla $r, s \neq 0$, wymaga wykonania dla każdego operatora następujących mnożeń:

$$L_1^0(L^X_{F_{rxsy}}, L^Y_{F_{rxsy}}) = \sum_{r=1}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-r-1} \sum_{k=1}^{n-r-s} (k-1) = \frac{n^4}{24} - \frac{n^3}{4} + \frac{11}{24}n^2 - \frac{n}{4}.$$

Stąd wyznaczenie tych operatorów dla wszystkich pochodnych cząstkowych /dla $0 \leq r, s \leq n-1/$ wymaga wykonania mnożeń w liczbie:

$$L_1^0(\xi L^X_{F_{rxsy}}, \xi L^Y_{F_{rxsy}}) = \frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{12} - \frac{13}{24}n^2 + \frac{5}{12}n$$

/4.10/

/dla $n=3$ $L_1^0(\xi L^X_{F_{rxsy}}, \xi L^Y_{F_{rxsy}}) = 2/$.

Wyznaczenie operatora $L^P_{F_{rxsy}}$ wymaga wykonania mnożeń w liczbie:

- dla pochodnych cząstkowych względem jednej zmiennej, kolejno x i y :

$$L_1^0(\xi L^P_{F_{rx}}, \xi L^P_{F_{sy}}) = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-r} \left[\sum_{i=0}^k (k-2) + 2 \right] = \frac{n^4}{12} - \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{12} + \frac{n}{6}$$

- dla pochodnych cząstkowych względem obydwu zmiennych:

$$L_1^0(L^P_{F_{rxsy}}) = \sum_{r=1}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-r-1} \sum_{k=1}^{n-r-s} \left[\sum_{i=0}^k (k-2) + 2 \right] = \frac{n^5}{60} - \frac{n^4}{12} + \frac{n^3}{12} + \frac{n^2}{12} - \frac{n}{10}.$$

Łączna liczba niezbędnych do wykonania mnożeń w trakcie wyznaczania operatora $L^P_{F_{rxsy}}$ wynosi:

$$L^0_1(\varepsilon L^P_{F_{rxsy}}) = \frac{n^5}{60} + \frac{n^4}{12} - \frac{n^3}{4} - \frac{n^2}{12} + \frac{7}{30}n \quad /4.11/$$

/dla $n=3$ $L^0_1(\varepsilon L^P_{F_{rxsy}}) = 4/.$

Tak więc wykonanie jednej pętli algorytmu wymaga wykonania mnożeń w liczbie określonej poniższym wzorem:

$$L^P_1(p_a 1) = \frac{n^4}{24} + \frac{5}{12}n^3 - \frac{13}{24}n^2 + \frac{n}{12} \quad /4.12/$$

/dla $n=2,3,4,6$ $L^P_1(p_a 1) = 2,10,29,125/$

dla ruchu wzdłuż współrzędnej x lub y , bądź też wzorem:

$$L^P_1(p_a 2) = \frac{n^5}{60} + \frac{n^4}{12} + \frac{n^3}{12} - \frac{n^2}{12} - \frac{n}{10} \quad /4.13/$$

/dla $n=2,3,4,6$ $L^P_1(p_a 2) = 2,12,42,252/$

dla ruchu wzdłuż przekątnej. Jest to również wielomian 5-stopnia względem stopnia krzywej n , dający liczbę operacji ponad dwukrotnie mniejszą niż w przypadku $h=1$ /rys.4.1/.

4.2.3. Złożoność obliczeniowa wyznaczenia węzła ciągu na podstawie równania ogólnego

Określmy również złożoność wyznaczania punktów ciągu aproksymującego, generowanego wprost z równania /3.1/. Metoda ta wymaga wyznaczenia pochodnych cząstkowych I-rzędu w bieżącym punkcie ciągu /niezbędnych do wyznaczenia wektora kierunkowego stycznej/ oraz wartości funkcji w co najmniej dwóch sąsiednich węzłach siatki, z których jeden zostanie wybrany na kolejny punkt aproksymujący.

Wyznaczenie pochodnej I-rzędu /wg wzoru /3.9// wymaga wykonania mnożeń w liczbie:

$$L^0_r(F_x, F_y) = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-k-1} (n-k-1) \right] = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n, \quad /4.14/$$

Natomiast wyznaczenie wartości funkcji wprost z równania /3.1/ wymaga

$$\sum_{i=1}^n (i+1)i = \frac{n^3}{3} + n^2 + \frac{2}{3}n \quad /4.15/$$

mnożeń. Wyznaczenie pochodnych F_x i F_y oraz wartości funkcji $F(x,y)$ w dwu węzłach wymaga więc wykonania mnożeń w liczbie określonej następującym wzorem:

$$L^P_x = \frac{4}{3}n^3 + 3n^2 - \frac{1}{3}n \quad /4.16/$$

/dla $n=2,3,4,6$ $L^P_x = 22,62,132,394/$, /rys.4.1/.

A więc złożoności obliczeniowe poszczególnych algorytmów określają się wielomianami względem stopni dyskretyzowanych krzywych, co należało wykazać. ■

4.3. Porównanie złożoności obliczeniowej algorytmów

Wyprowadzone wyżej wzory na złożoność obliczeniową wyznaczenia jednego węzła ciągu aproksymującego za pomocą różnych algorytmów /na siatkach 4- i 8-spójnych, z $h=1$, $h \neq 1$ oraz wprost z równania uwikłanego krzywej /3.1// pozwalają na następujące stwierdzenia /zob. tabela 4.1/:

a/ najprostszym algorytmem jest:

- dla $n \leq 26$ - algorytm dyskretyzacji na siatce 4-spójnej z $h=1$,
- dla $n > 26$ - algorytm dyskretyzacji wprost z równania uwikłanego /3.1/;

b/ najbardziej złożonym algorytmem jest:

- dla $n \leq 3$ - algorytm dyskretyzacji wprost z równania uwikłanego /3.1/,
- dla $n > 4$ - algorytm dyskretyzacji na siatce 8-spójnej z $h \neq 1$.

Z faktu najmniejszej złożoności wyznaczenia jednego węzła ciągu określonym sposobem nie wynika jednak fakt najmniejszej złożoności dyskretyzacji krzywej tymże sposobem. Odległość między kolejnymi węzłami ciągu aproksymującego, wyznaczonego za pomocą różnych algorytmów dyskretyzacji jest bowiem różna. Algorytm dyskretyzacji na siatce 4-spójnej zapewnia, że odległość ta jest stała i równa h . W przypadku algorytmu dyskretyzacji na siatce 8-spójnej lub algorytmu generacji wprost z równania /3.1/ odległość ta może być równa h lub $\sqrt{2}h$. Jeden punkt ciągu może więc aproksymować dłuższy niż w przypadku poprzednim odcinek krzywej.

Przeprowadźmy wzajemne porównanie rozważanych metod dyskretyzacji, obliczając stosunki złożoności obliczeniowej wyznaczenia jednego węzła ciągu aproksymującego w funkcji stopnia krzywej n /rys.4.1/. Interesować nas będą przebiegi zależności oraz wartości n , dla których stosunki złożoności:

$$a/ \frac{L_{\xi}^P(8sp)}{L_r^P} = 1 \quad \frac{L_1^P(8sp)}{L_r^P} \quad \text{są równe } 1,$$

$$b/ \frac{L_{\xi}^P(4sp)}{L_r^P} = 1 \quad \frac{L_1^P(4sp)}{L_r^P} \quad \text{są równe } \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$c/ \frac{L_{\xi}^P(8sp)}{L_{\xi}^P(4sp)} = 1 \quad \frac{L_1^P(8sp)}{L_1^P(4sp)} \quad \text{są równe } \sqrt{2}.$$

Na podstawie analizy tych zależności sformułujemy następujące stwierdzenie o najszybszej generacji krzywych dyskretynych stopnia n przez poszczególne algorytmy:

Najszybszą generację krzywych dyskretynych, aproksymujących krzywe algebraiczne stopnia n można osiągnąć:

- dla $n \leq 3$ - algorytmem dyskretyzacji na siatce 8-spójnej z $h=1$,
- dla $4 \leq n \leq 16$ - algorytmem dyskretyzacji na siatce 4-spójnej z $h=1$,
- dla $n \geq 17$ - algorytmem dyskretyzacji wprost z równania /3.1/.

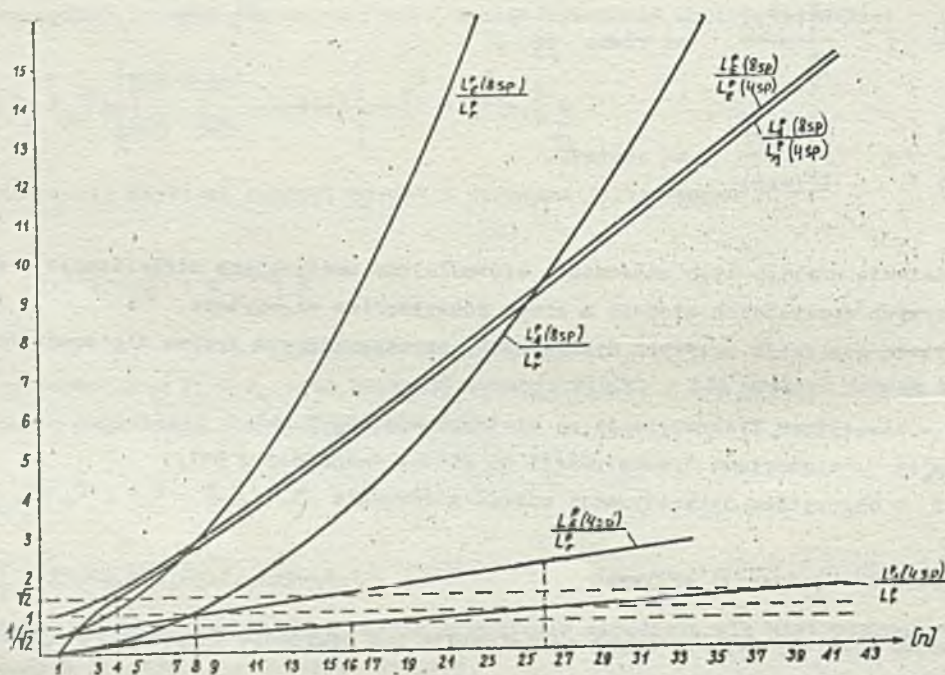
4.4. Złożoność dyskretyzacji krzywych

Złożoność dyskretyzacji krzywych jest funkcją ich długości. W dyskretyzacji na siatce 4-spójnej z $h=1$ złożoność ta wyraża się wzorem:

$$L_1(4sp) = L_{\xi}^P + m L_1^P(p_{A1})$$

Tablica 4.1. Złożoność obliczeniowa wyznaczenia jednego węzła ciągu aproksymującego krzywą /mierzona liczbą wykonywanych mnożeń/ w funkcji stopnia krzywej n, dla różnych algorytmów w aproksymacji krzywych oraz dla różnych modułów siatki /h=1, h≠1/.

n	$L_{\xi}^P(4sp)$	$L_{\xi}^P(8sp)$	$L_{\eta}^P(4sp)$	$L_{\eta}^P(8sp)$	L_X^P
1	2	2	0	0	4
2	12	14	2	2	22
3	39	54	10	12	62
4	94	154	29	42	132
5	190	364	65	112	240
6	342	756	125	252	394
7	567	1428	217	504	602
8	884	2508	350	924	872
9	1324	4158	534	1584	1212
10	1880	6578	780	2574	1630
11	2607	10010	1100	4004	2134
12	3522	14742	1507	6006	2732
13	4654	21112	2015	8736	3432
14	6034	29512	2639	12376	4242
15	7695	40392	3395	17136	5170
16	9672	54264	4300	23256	6224
17	12002	71706	5372	31008	7412
18	14724	93366	6630	40698	8742
19	17879	119966	8094	52668	10222
20	21510	152306	9785	67298	11860
21	25662	191268	11725	85008	13664
22	30382	237820	13937	106260	15642
23	35719	293020	16445	131560	17802
24	41724	358020	19274	161460	20152
25	48450	434069	22450	196560	22700



Rys.4.1. Stosunki złożoności obliczeniowych wyznaczenia jednego węzła ciągu aproksymującego dla różnych metod aproksymacji w funkcji stopnia krzywej n.

gdzie m jest pomniejszoną o 1 liczbą punktów ciągu aproksymującego krzywą.

W aproksymacji krzywej odcinkami linii siatkowych liczba ta jest długością /wyrażoną w module siatki h / linii łamanej, aproksymującej daną krzywą.

Dla siatki 8-spójnej z $h=1$ złożoność dyskretyzacji wyraża się innym wzorem:

$$L_1(8sp) = L_x^p + m_{xy} L_1^p(p_{a1}) + m_p L_1^p(p_{a2})$$

przy czym $m_{xy} + m_p$ jest pomniejszoną o 1 liczbą punktów ciągu aproksymującego krzywą;

m_{xy} jest liczbą punktów wyznaczonych w pętli p_{a1} algorytmu, natomiast

m_p jest liczbą punktów wyznaczonych w pętli p_{a2} tegoż algorytmu.

Liczba $m_{xy} + \sqrt{2}m_p$ określa długość linii łamanej /wyrażoną w module siatki h /, aproksymującej krzywą zadaną.

Przeprowadzona wyżej ocena złożoności obliczeniowej algorytmów dyskretyzacji dowolnych krzywych algebraicznych stopnia n . Stąd też dla uproszczonych postaci algorytmów prawdziwe są równości:

$$Z(4sph) = L_1(4sp) , \quad Z(8sph) = L_1(8sp) \quad \text{oraz} \quad Z(rh\acute{e}) = L_r^p ,$$

gdzie $Z(4sph)$ i $Z(8sph)$ określają złożoności obliczeniowe dyskretyzacji krzywych algebraicznych stopnia n , zadanych w postaci uwikłanej $F(x,y) = 0$, ze względu na przedstawione algorytmy dyskretyzacji na siatkach kwadratowych, odpowiednio 4- i 8-spójnych.

W praktyce występują krzywe, dla których niektóre ze współczynników a_{ij} równania /3.1/ są zerowe. Zerowe wartości będą miały wtedy również i niektóre z pochodnych cząstkowych. Sprawdzając zatem wartości tych współczynników można w przypadku ich zerowej wartości zmniejszyć liczbę operacji w algorytmach.

5. ANALIZA BŁĘDÓW DYSKRETYZACJI

Głównym celem każdej aproksymacji jest osiągnięcie pewnego określonego stopnia dokładności przybliżenia wg zadanego kryterium. Tak więc podjęcie aproksymacji powinno być uwarunkowane założeniem, że skuteczność tego przybliżenia da się oszacować.

W teorii aproksymacji znanych jest wiele różnych miar jakości aproksymacji funkcji $F(t)$ funkcją $f(t,p) /p$ - parametr aproksymacji/. Wyróżnić można klasę miar szczytowych, charakteryzujących aproksymację lokalnie, wskazujących ekstremalne wartości błędu i argumentu, przy których one występują, oraz klasę miar globalnych charakteryzujących aproksymację w przedziale $[a,b]$ globalnie, bez wyróżniania argumentu t , dla którego to przybliżenie jest najgorsze lub najlepsze.

Ocena błędów aproksymacji ściśle zależy od wyboru miary, w której ocena ta jest dokonywana. Miara natomiast powinna być adekwatna do problemu, w ramach którego aproksymacja jest wykonywana.

Na etapie tworzenia algorytmów zastosowaliśmy przybliżenia jednostajne, polegające na minimalizacji maksymalnej odległości między krzywą zadaną i jej przybliżeniem /łamaną/. W tym rozdziale wybierzemy metrykę do oceny tego przybliżenia, mając na uwadze przeznaczenie omawianych metod. Sądzymy, że powinna to być inna metryka niż generacyjna, która została wybrana przede wszystkim ze względu na prostotę /i szybkość/ działania algorytmów.

Zakładając, że algorytmy te będą przede wszystkim stosowane w grafice komputerowej i numerycznym sterowaniu obrabiarkami, w których to dziedzinach stawia się wymagania aproksymowania kształtów figur geometrycznych, czyli aproksymacji w zbiorach, sądzymy, że wybrana do oceny jakości aproksymacji metryka powinna uwzględniać cechy percepcji wzrokowej człowieka, tzn. powinna być odpowiednia

do "metryki" systemu wzrokowego człowieka. Należy więc uwzględnić fakty znane z dziedziny psychofizjologii systemu wzrokowego człowieka. Wiadomo, że w procesie oceny wzrokowej kształtów figur geometrycznych istnieją dwa stadia:

- 1/ ocena lokalnych odchyłek od "regularności" przylegających części figury, co identyfikuje się z pomiarem względnych szczytowych błędów, mierzonych w metryce zbiorów;
- 2/ ocena globalna figury uwarunkowana kontekstem, wzorcami, regularnością kształtów i zniekształceń.

Żadna ze znanych metod oceny aproksymacji nie uwzględnia jednak w pełni czynników wpływających na ocenę kształtów przez system wzrokowy człowieka.

W literaturze fachowej zagadnienie doboru metod oceny algorytmów dyskretyzacji krzywych do zastosowań w grafice komputerowej nie jest prawie w ogóle dyskutowane. W jedynej publikacji poruszającej te problemy Chung /1977 r./ uważa, że algorytmy dyskretyzacyjne powinny minimalizować jedną z następujących wielkości:

- a/ $|r-d|$ - odległość liniową węzła od krzywej,
- b/ $|F(x,y)|$ - moduł wartości funkcji opisującej krzywą,
- c/ $|\text{pole wyjściowe minus pole wynikowe}|$ aproksymowanej figury.

W niniejszej rozprawie ocenę aproksymacji wykonamy w dwóch metrykach: w metryce przestrzeni euklidesowej /miara lokalna/ oraz w metryce polowej /miara globalna/, "nieczułej" na lokalne zniekształcenia figur, a oceniającej jakość aproksymacji wielkością modułu pola między konturem aproksymowanym i aproksymującym.

5.1. Szczytowe błędy dyskretyzacji

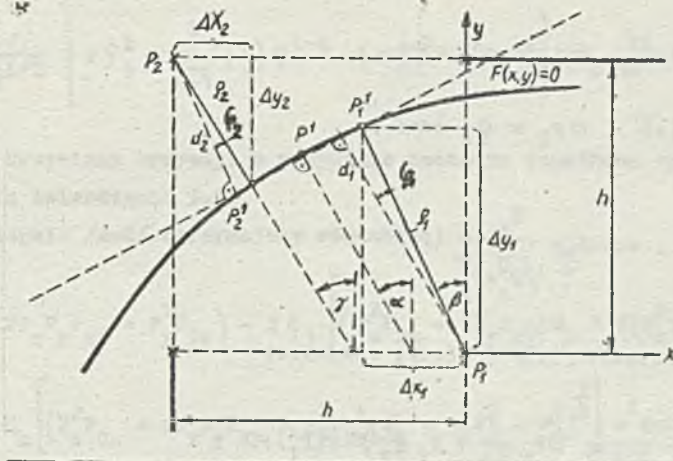
5.1.1. Bezwzględne szczytowe błędy dyskretyzacji

Za pomocą omówionych w poprzednich rozdziałach algorytmów można generować na podstawie równania opisującego krzywą $F(x,y)=0$, ciąg bezpośrednio spójnych węzłów siatki, w których moduł wartości funkcji $F(x,y)$ osiąga lokalne minimum. To minimum gwarantuje nie większą odległość niż h każdego z punktów ciągu od zadanej krzywej. Spośród węzłów ciągu aproksymującego krzywą najbardziej oddalonymi od niej będą te węzły, w których linia łamana /łącząca sąsiednie punkty ciągu/ zmienia kierunek /przeguby linii łamanej/, co odbywa się zawsze w kierunku krzywej, tak aby osiągnąć węzeł z możliwie najmniejszym modułem $F(x,y)$. Stąd też wyznaczanie szczytowych błędów dyskretyzacji sprowadza się do wyznaczenia odległości przegubów linii łamanej od krzywej.

Spośród wszystkich możliwych wzajemnych położenia siatki i krzywej, największe oddalenie linii łamanej i krzywej, czyli największy bezwzględny szczytowy błąd aproksymacji krzywej łamaną wystąpi wówczas, gdy w dwóch węzłach siatki, "kandydujących" na kolejny węzeł ciągu, wartości funkcji będą różnić się tylko znakami, tzn. węzły te będą położone po przeciwnych stronach krzywej, a moduły wartości funkcji będą równe.

Rozpatrzmy teraz łuk krzywej zadanej równaniem /3.1/, dla którego to łuku kąt nachylenia stycznej $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ oraz aproksymujący ten łuk ciąg węzłów siatki, wygenerowany przez algorytm, którego metryką generacyjną jest $|F(x,y)|$. Niech w dwóch węzłach siatki, leżących po przeciwnych stronach krzywej, moduły wartości funkcji będą sobie równe. Oznaczmy te węzły przez P_1 i P_2 , a ich odległości od krzywej przez Q_1 i Q_2 /rys.5.1/. Wyznamy bezwzględny szczytowy błąd Q_1 , gdy zachodzi równość:

$$|F(P_1)| = |F(P_2)|$$



Rys. 5.1. Ilustracja do wyznaczenia odległości węzłów od krzywej

lub jej równoważna

$$F(P_1) + F(P_2) = 0$$

/5.2/

Twierdzenie 5.1

W dyskretyzacji krzywych /3.1/ /włącznie z założeniami/ przeprowadzonej w metryce $|F(x,y)|$ oszacowanie Q bezwzględnego szczytowego błędu tej dyskretyzacji, mierzonego w metryce euklidesowej opisuje się równaniem algebraicznym /zmiennej Q / stopnia nie wyższego niż stopień dyskretyzowanej krzywej.

Dowód

Dla dowodu wyprowadzimy równanie zmiennej Q , z którego można wyznaczyć wartość Q /oszacowania bezwzględnego szczytowego błędu dyskretyzacji/ ogólnie znanymi metodami. Stopień tego równania będzie nie wyższy niż stopień równania dyskretyzowanej krzywej /3.1/.

Poprowadźmy prostopadłe do krzywej $F(x,y)=0$ z punktów P_1 i P_2 i oznaczmy punkty przecięć prostopadłych i krzywej odpowiednio P'_1 i P'_2 , jak na rys.5.1. Poprowadźmy również linię równoległą do prostej $P'_1, P'_2/$ i styczną do krzywej w punkcie P' . Kąt nachylenia stycznej w punkcie P' oznaczmy przez α .

Wyznaczymy następnie wartości funkcji $F(x,y)$ w punktach P_1 i P_2 posługując się rozwinięciem tej funkcji w szereg Taylora w otoczeniu punktów P'_1 i P'_2 :

$$F(P_1) = F(P'_1) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y_1 \frac{\partial}{\partial y} \right)^i F(P'_1)$$

/5.3/

$$F(P_2) = F(P'_2) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \left(\Delta x_2 \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^i F(P'_2)$$

Ponieważ zgodnie z definicją krzywej zachodzi

$$|F(P'_1)| = |F(P'_2)| \stackrel{df}{=} 0$$

/5.4/

oraz prawdziwe są, dla kąta nachylenia stycznej do krzywej $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ poniższe związki

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \varrho_1 \sin \beta, \quad \Delta y_1 = -\varrho_1 \cos \beta, \\ \Delta x_2 &= -\varrho_2 \sin \delta, \quad \Delta y_2 = \varrho_2 \cos \delta, \end{aligned} \quad /5.5/$$

gdzie $\sin \alpha = -\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}(P')$, $\cos \alpha = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}(P')$

otrzymujemy z /5.2/, na podstawie /5.3/ ÷ /5.5/, równanie:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \left[\frac{(-\varrho_1)^i}{(F_x^2 + F_y^2)^{i/2}} \left(F_x \frac{\partial}{\partial x} + F_y \frac{\partial}{\partial y} \right)^i F(P'_1) + \right. \\ \left. + \frac{\varrho_2^i}{(F_x^2 + F_y^2)^{i/2}} \left(F_x \frac{\partial}{\partial x} + F_y \frac{\partial}{\partial y} \right)^i F(P'_2) \right] = 0 \end{aligned} \quad /5.6/$$

Łatwo wykazać również istnienie poniższego związku

$$\varrho_1 \cos \beta_1 + \varrho_2 \cos \beta_2 = Q_h, \quad \beta_1 = \beta - \alpha, \quad \beta_2 = \alpha - \delta, \quad /5.7/$$

gdzie $Q_h = Q_h(\alpha, \psi)$ jest funkcją rodzaju siatki kwadratowej, kąta nachylenia stycznej do krzywej α i kąta ψ nachylenia głównych linii siatki do osi układu współrzędnych.

Dokonyjemy następującego uproszczenia: linearyzujemy krzywą, na przestrzeni ograniczonej przez elementarne pole siatki, odcinkiem stycznej w punkcie P' . Dla krzywych o dostatecznie dużych - w stosunku do modułu siatki h - promieniach krzywizny $R \gg h$ kąty β i δ różnią się od kąta α niewiele. Linearyzacja ta jest równoważna założeniu

$$\beta_1 \approx \beta_2 \approx 0$$

co oznacza, że $\beta = \alpha = \delta$, a wartości pochodnych cząstkowych funkcji $F(x, y)$ w punktach P'_1 , P'_2 i P' można przyjąć za równe. Równania /5.6/ i /5.7/ przyjmą wtedy odpowiednio postać:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i! (F_x^2 + F_y^2)^{i/2}} \left[\varrho_1^i + (-\varrho_2)^i \right] \left[F_x \frac{\partial}{\partial x} + F_y \frac{\partial}{\partial y} \right]^i F(P') = 0 \quad /5.8/$$

oraz

$$\varrho_1 + \varrho_2 = Q_h, \quad \varrho_1 = d_1, \quad \varrho_2 = d_2 \quad /5.9/$$

Przyjmując Q_h jako znane, otrzymujemy ostateczne równanie algebraiczne n -stopnia, z którego można wyznaczyć ϱ_1 - kres górny szczytowego błędu bezwzględnego:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i!(F_x^2 + F_y^2)^{i/2}} \left[2 \varrho_1^i + \sum_{k=1}^i \binom{i}{k} \varrho_1^{i-k} (-Q_h)^k + (-Q_h)^i \right] \left(F_x \frac{\partial}{\partial x} + F_y \frac{\partial}{\partial y} \right)^i F(P') = 0 \quad /5.10/$$

gdzie n jest stopniem krzywizny krzywej, a wszystkie pochodne cząstkowe wyznacza się w punkcie P' .
A więc mamy jak w tezie twierdzenia 5.1. ■

Dla krzywych 2-stopnia $/n=2/$ otrzymujemy równanie:

$$2 \varrho_1^2 (F_x^2 F_{2x} + 2 F_x F_y F_{xy} + F_y^2 F_{2y}) - 2 \varrho_1 \left[(F_x^2 F_{2x} + 2 F_y F_{2y}) Q_h + 2 (F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}} \right] - Q_h \left[(F_x^2 F_{2x} + 2 F_x F_y F_{xy} + F_y^2 F_{2y}) Q_h + 2 (F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}} \right] = 0 \quad /5.11/$$

którego rozwiązaniem jest:

$$\varrho_1 = \frac{R}{\left(\frac{R}{e}\right)^{\frac{2}{3}} + t \left(\frac{Rb}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1} + \frac{Q_h}{2} - \sqrt{\frac{R^2}{\left(\frac{R}{e}\right)^{\frac{2}{3}} + t \left(\frac{Rb}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1} + \frac{Q_h^2}{4}} \quad /5.12/$$

gdzie R , a , b i e oznaczają odpowiednio: promień krzywizny, półosie dużą i małą oraz parametr krzywej 2-stopnia, natomiast

$$t = \begin{cases} 1 & \text{dla prostej, okręgu i elipsy} \\ 0 & \text{dla paraboli} \\ -1 & \text{dla hiperboli} \end{cases}$$

Uwzględniając, że dla siatki 4-spójnej zachodzi związek:

$$d_1 + d_2 = h(\sin\theta + \cos\theta) = \frac{h\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \quad /5.13/$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

z przyjętych uproszczeń wynika $d_1 = \varrho_1$ i $d_2 = \varrho_2$.

Po rozwinięciu wyrażenia $Q_h = Q_h(\alpha, \psi)$ i podstawienia go do wzoru /5.12/, otrzymamy uogólniony wzór szacujący ϱ_1 dla krzywych 2-stopnia, aproksymowanych na siatce 4-spójnej:

$$\varrho_1 = \frac{R}{\left(\frac{R}{e}\right)^{\frac{2}{3}} + t \left(\frac{Rb}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1} + \frac{h\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) + \sqrt{R^2 \left[\left(\frac{R}{e}\right)^{\frac{2}{3}} + t \left(\frac{Rb}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]^{-2} + \frac{h^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{2}} \quad /5.14/$$

Podobnie dla siatki 8-spójnej prawdziwe są związki:

$$d_1 + d_2 = h \cos\theta \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$

$$d_1 + d_2 = h \sin\theta \quad \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

/5.15/

które, ze względu na uproszczenie $d_1 = \varrho_1$ i $d_2 = \varrho_2$, pozwalają zapisać wzór /5.12/ w postaciach:

$$\varrho_1 = \frac{R}{\left(\frac{R}{\theta}\right)^{\frac{2}{3}} + t\left(\frac{Rb}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1} + \frac{h \cos \theta}{2} - \sqrt{\frac{R^2}{\left[\left(\frac{R}{\theta}\right)^{\frac{2}{3}} + t\left(\frac{Rb}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]^2} + \frac{h^2 \cos^2 \theta}{4}} \quad /5.16/$$

dla $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ oraz

$$\varrho_1 = \frac{R}{\left(\frac{R}{\theta}\right)^{\frac{2}{3}} + t\left(\frac{Rb}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1} + \frac{h^2 \sin \theta}{2} - \sqrt{\frac{R^2}{\left[\left(\frac{R}{\theta}\right)^{\frac{2}{3}} + t\left(\frac{Rb}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]^2} + \frac{h^2 \sin^2 \theta}{4}} \quad /5.17/$$

dla $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$

gdzie $\theta = \alpha - \psi$ jest kątem nachylenia stycznej, a ψ - kątem nachylenia głównej linii siatki.

Bezwzględne szczytowe błędy dyskretyzacji krzywych 2-stopnia na siatkach kwadratowych są więc odwrotnie proporcjonalne do promienia lokalnej krzywizny i do rzędu spójności siatki kwadratowej oraz zależą od kąta θ między styczną do krzywej i bliższą z głównych linii siatki.

Porównując kresy górne błędu szczytowego aproksymacji na siatkach 4-spójnej i 8-spójnej można stwierdzić, że:

- 1/ maksimum kresu górnego bezwzględnego szczytowego błędu aproksymacji na siatce 8-spójnej występuje dla tych wartości kąta nachylenia stycznej, dla których występuje minimum tegoż błędu w aproksymacji na siatce 4-spójnej i odwrotnie,
- 2/ wartość maksymalna kresu górnego bezwzględnego szczytowego błędu aproksymacji na siatce 8-spójnej jest równa wartości minimalnej tegoż błędu w aproksymacji na siatce 4-spójnej.

5.1.2. Względne szczytowe błędy dyskretyzacji

Zdefiniujemy względny szczytowy błąd ϱ_w jako stosunek odległości ϱ_1 przegubu linii łamanej /łączącej sąsiednie węzły wygenerowanego ciągu/ od krzywej do długości τ_1 odpowiedniego łuku, wyznaczonego przez punkty przecięcia się krzywej z linią łamaną $\varrho_w \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varrho_1}{\tau_1}$.

Twierdzenie 5.2

Dla aproksymacji na siatce 4-spójnej zachodzi oszacowanie

$$\varrho_w = \sin \theta \cos \theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad /5.18/$$

Dowód

Dokonyjmy uproszczeń polegających na zastąpieniu łuków krzywych cięciwami, a w miejsce wyrażenia $\frac{\varrho_1}{\tau_1}$ wyznaczymy $\frac{d_1}{l_1}$.

Wielkości d_1 oraz l_1 są, jak widać, wysokością kąta prostego oraz przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, utworzonego przez punkty przecinania się łamanej z cięciwą i mającej kąty ostre θ i $(90^\circ - \theta)$. Stąd stosunek tych wielkości określa się, wzorem:

$$\frac{d_1}{l_1} = \sin \theta \cos \theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2},$$

ale ze względu na przyjęte uproszczenie $d_1 \approx \rho_1$, $l_1 \approx \bar{l}_1$ mamy

$$\rho_w \approx \sin\theta \cos\theta$$

co należało wykazać.

Twierdzenie 5.3

Dla aproksymacji na siatce 8-spójnej zachodzi oszacowanie

$$\rho_w \approx \sin\theta \cos\theta - \sin^2\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$

/5.19/

Dowód

Dokonyjmy uproszczenia, jak w dowodzie twierdzenia 5.1:

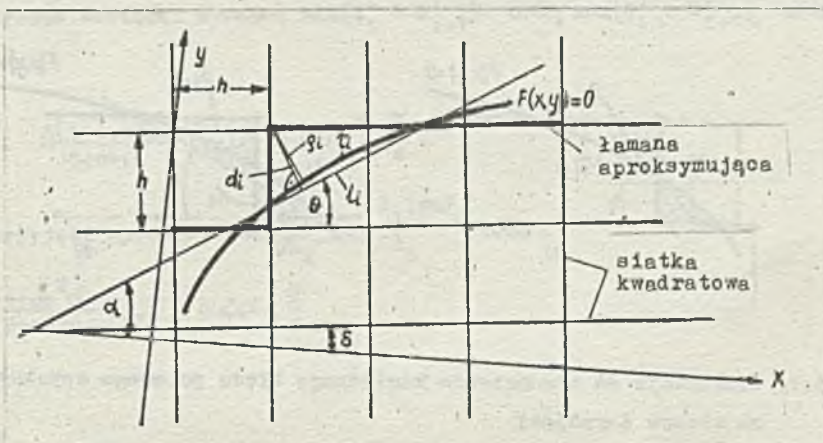
$$\rho_1 = d_1, \quad \bar{l}_1 = l_1.$$

W przypadku siatki 8-spójnej trójkąt utworzony przez łamaną i cięciwę jest trójkątem rozwartokątnym o kącie rozwarcia 135° oraz kątach ostrych θ i $(45^\circ - \theta)$. Stosunek wysokości kąta rozwartego do przeciwrozwartokątnej w takich trójkątach wyraża się wzorem:

$$\frac{d_1}{l_1} = \sin\theta \cos\theta - \sin^2\theta.$$

Ze względu na przyjęte uproszczenie $d_1 \approx \rho_1$, $l_1 \approx \bar{l}_1$ mamy więc

$$\rho_w \approx \sin\theta \cos\theta - \sin^2\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$



Rys. 5.2. Określenie względnego szczytowego błędu aproksymacji

Wyznaczone za pomocą wzorów /5.18/ i /5.19/ błędy osiągają swoje wartości maksymalne

$$\max \left(\frac{d_1}{l_1} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{dla } \theta = \frac{\pi}{4} \quad /5.20/$$

w przypadku siatki 4-spójnej oraz

$$\max \left(\frac{d_1}{l_1} \right) = \frac{3+2\sqrt{2}-1}{4+2 \cdot 2} = 0,207 \quad \text{dla } \theta = \arctg(\sqrt{2}+1) \quad /5.21/$$

w przypadku siatki 8-spójnej.

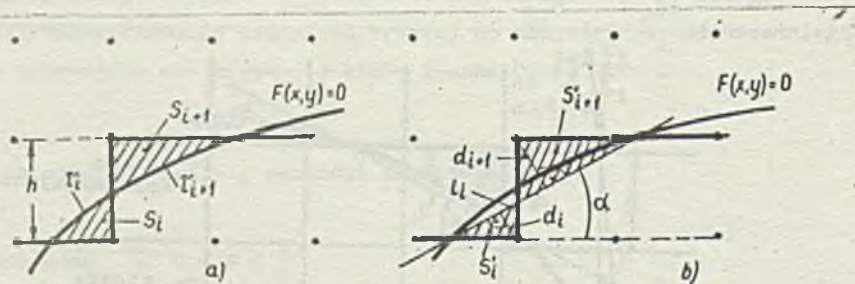
Względny szczytowy błąd jest więc funkcją rzędu spójności siatki oraz jej kąta obrotu, a nie stopnia i rodzaju krzywej i ma ekstrema dla tej wartości kąta θ co bezwzględny szczytowy błąd. Względny szczytowy błąd jest ponad dwukrotnie większy przy siatce 4-spójnej niż przy siatce 8-spójnej.

Wartość średnia względnej szczytowej wartości błędu, rozumiana jako uśredniona wzdłuż łuku krzywej wartość względnego szczytowego błędu aproksymacji, zależy jednak w istotny sposób, tak od rodzajów krzywych, jak i ich parametrów geometrycznych oraz od rzędu spójności siatki i np. dla krzywych 2-stopnia jest ponad dwukrotnie większa przy siatce 4-spójnej niż przy siatce 8-spójnej.

5.2. Średnioglobalna ocena jakości aproksymacji

5.2.1. Średni moduł pola przylegający do odcinka /krótkiej/ dęciwy jako względny połowy błąd

Jako miarę jakości aproksymacji krzywych na siatkach kwadratowych wprowadźmy miarę połową $\rho_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S}{l_1}$, będącą modułem pola między krzywą i aproksymującą ją łamaną, przypadającego na jednostkowy odcinek krzywej /rys.5.3a/.



Rys.5.3. Ilustracja do wyznaczenia względnego błędu połowego aproksymacji krzywej na siatce 4-spójnej

Twierdzenie 5.4.

Dla aproksymacji na siatce 4-spójnej zachodzi oszacowanie

$$\rho_p \approx \frac{1+\cos^2 \alpha}{8 \cos \alpha} h \quad , \quad 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{4} \quad /5.22/$$

Dowód

Dokonyjmy uproszczenia polegającego na zastąpieniu stosunku $\frac{S_1}{l_1}$ stosunkiem $\frac{S_1(\acute{s}r)}{l_1}$, gdzie $S_1(\acute{s}r)$ jest średnią arytmetyczną sumy pól S'_1 oraz S'_{i+1} , a l_1 jest długością cięciwy wyznaczonej przez punkty przecięcia się krzywej z dwoma sąsiednimi równoległymi liniami siatki /rys.5.3b/.

Suma pól S'_{i+1} oraz S'_1 przyjmuje wartość minimalną, gdy $S'_1 = S'_{i+1}$ / $d_1 = d_{i+1}$ / oraz wartość maksymalną w przypadku skrajnej nierówności tych pól /również skrajnej nierówności wartości d_1 oraz d_{i+1} /.

Ze względu na związek $d_1 + d_{i+1} = h \cos \alpha$ otrzymujemy:

$$\min(S'_1 + S'_{i+1}) = \frac{h^2}{4} \operatorname{ctg} \alpha$$

Prawdziwe są również związki:

$$d_{\max} = \frac{h}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$d_{\min} = \frac{h}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha)$$

Stąd, pamiętając o wcześniej wyprowadzonym związku $\frac{d}{l_1} = \sin \alpha \cos \alpha$ otrzymujemy:

$$S'_{i+1}(\max) = \frac{d^2(\max)}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{(1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha) h^2}{8 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$S'_{i+1}(\min) = \frac{d^2(\min)}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha \cos \alpha}{8} \frac{h^2}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

A więc

$$\max(S'_1 + S'_{i+1}) = \frac{h^2}{4 \sin \alpha \cos \alpha}$$

Średnia arytmetyczna wartości wyrażeń $\min(S'_1 + S'_{i+1})$ oraz $\max(S'_1 + S'_{i+1})$ odniesiona do cięciwy l_1 daje

$$\frac{S_1(\acute{s}r)}{l_1} = \frac{h(1 + \cos^2 \alpha)}{8 \cos \alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$$

Ze względu na przyjęte uproszczenia $\frac{S_1}{l_1} \approx \frac{S_1(\acute{s}r)}{l_1}$ mamy:

$$\rho_p \approx \frac{1 + \cos^2 \alpha}{8 \cos \alpha} h, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$$

co należało wykazać,

Twierdzenie 5.5

Dla aproksymacji na siatce 8-spójnej zachodzi oszacowanie

$$\rho_p = \frac{S_1}{l_1} \approx \frac{2 + \sin^2 \alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha}{8(\cos \alpha - \sin \alpha)} h, \quad 0 \leq \alpha \leq \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$$

Dowód

Wprowadźmy uproszczenie identyczne, jak w dowodzie twierdzenia 5.4. Wyznamy więc stosunek

$$\frac{S_1(\acute{a}r)}{l_1} \text{ w miejsce stosunku } \frac{S_1}{l_1}$$

Prawdziwe są zależności:

$$\frac{h}{2} \cos \alpha - h \sin \alpha \leq \alpha \leq \frac{h}{2} \cos \alpha$$

$$d_1 + d_{1+1} = h(\cos \alpha - \sin \alpha).$$

oraz związek wprowadzony w dowodzie twierdzenia 5.3:

$$\frac{d_1}{l_1} = \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Na podstawie tych zależności otrzymujemy /dla $S'_1 = S'_{1+1}$ /

$$\min(S'_1 + S'_{1+1}) = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{4 \sin \alpha} h^2$$

Wartość maksymalną sumy pól otrzymamy przy skrajnej ich różnicy /a więc przy skrajnej różnicy d_1 oraz d_{1+1} /:

$$S'_1(\max) = \frac{d^2(\max) \operatorname{ctg} \alpha}{2}$$

$$S'_1(\min) = \frac{d^2(\min) \operatorname{ctg} \alpha}{2}$$

$$\max(S'_1 + S'_{1+1}) = \frac{h^2 \cos^2 \alpha}{4 \sin \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha)} - \frac{h^2}{2}$$

Stąd

$$\frac{S_1(\acute{a}r)}{l_1} = \frac{2 + \sin^2 \alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha}{8(\cos \alpha - \sin \alpha)} h, \quad 0 \leq \alpha \leq \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$$

A ze względu na przyjęte uproszczenie $\frac{S_1}{l_1} \approx \frac{S'_1(\acute{a}r)}{l_1}$ mamy jak w twierdzeniu:

$$\oint_p = \frac{2 + \sin^2 \alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha}{8(\cos \alpha - \sin \alpha)} h$$

Sredni moduł pola przylegającego do odcinka /krótkiej/ cięciwy zależy więc jedynie od rzędu spójności siatki kwadratowej, a nie zależy od krzywizny i stopnia krzywej.

5.2.2. Srednie wartości modułu pola przylegającego do jednostkowego odcinka krzywej

Uśredniając wyrażenie $\oint_p \approx \frac{S_1(\acute{a}r)}{l_1}$ wzdłuż łuku krzywej, zgodnie ze wzorem:

$$\varrho_{sp} = \frac{S}{l}(\bar{s}r) = \frac{\int_1^2 \frac{S_1(\bar{s}r)}{l_1} ds(\alpha) d\alpha}{\int_1^2 ds(\alpha) d\alpha} \quad /5.24/$$

tj. całkując wyrażenie $\frac{S_1(\bar{s}r)}{l_1}$ wzdłuż łuku krzywej i odnosząc całkę do długości łuku, wzdłuż którego odbywało się całkowanie, uzależniamy stosunek $\frac{S}{l}$ od typów i parametrów krzywych.

Wzory określające średnie wartości modułu pola przylegającego do odcinka krzywej są jednak złożone. Istotne wnioski, które wynikają z analizy tych wzorów są następujące:

- 1/ wartość średnia błędu polowego zależy w dość istotny sposób od typu i parametrów geometrycznych krzywych oraz wzajemnego położenia siatki i krzywej;
- 2/ dla pewnych wartości parametrów krzywych i ich położenia względem linii siatki, dla których występuje kres górny średniej wartości błędu polowego w aproksymacji na siatce 4-spójnej, występuje kres dolny błędu w aproksymacji na siatce 8-spójnej;
- 3/ dla pewnych ekstremalnych wartości parametrów geometrycznych krzywych /lub ich stosunku/ i pewnych kątów obrotu siatki w stosunku do osi krzywych średnie wartości błędu polowego w aproksymacji na siatce 4-spójnej i 8-spójnej zmierzają do wartości 0,25 h: pierwsza z góry, a druga z dołu.

5.3. Podstawowe rezultaty oceny jakości aproksymacji

Analizując wyniki przeprowadzonej oceny błędów szczytowych i polowych aproksymacji krzywych n-stopnia zadanych w postaci $F(x,y)=0$ na siatkach kwadratowych 4- i 8-spójnych, można stwierdzić, że:

- 1/ względny szczytowy błąd oraz błąd polowy nie zależą od typu i stopnia krzywizny krzywej, a jedynie od rzędu spójności siatki;
- 2/ kres górny błędu szczytowego, wartość średnia względnego błędu szczytowego oraz wartość średnia błędu polowego zależą w dość istotny sposób od rodzaju krzywych i ich parametrów geometrycznych oraz od rzędu spójności siatki;
- 3/ każda z trzech wyznaczonych wartości błędu lokalnego, tj.: kres górny wartości szczytowej, względny szczytowy błąd oraz wartość średnia względnego szczytowego błędu są ponad dwukrotnie większe przy siatce 4-spójnej niż przy siatce 8-spójnej;
- 4/ wartość średnia błędu polowego jest większa o ok. jedną trzecią przy siatce 4-spójnej niż przy siatce 8-spójnej.

Prawdziwe są więc dwa generalne wnioski:

- 1/ niezależnie od stopnia i typu krzywej błędy lokalne aproksymacji są ponad dwukrotnie większe dla siatki 4-spójnej niż dla siatki 8-spójnej;
- 2/ niezależnie od typu błędów każdy z nich jest większy dla siatki 4-spójnej niż dla siatki 8-spójnej.

Aproksymacja na siatce 8-spójnej jest więc bezwzględnie dokładniejsza. Masuwa się więc wniosek, że w dyskretyzacji krzywych na siatkach kwadratowych jednorodnych dokładność aproksymacji wzrasta wraz ze wzrostem rzędu spójności siatki, na której jest dokonywana dyskretyzacja.

6. ZAKOŃCZENIE

Celem prowadzonych badań było rozwinięcie teorii i uzyskanie wyników aplikacyjnych w dziedzinie całkowitoliczbowej aproksymacji krzywych algebraicznych płaskich. W świetle badania tego typu są prowadzone od kilkunastu lat i uzyskano wiele pozytywnych wyników w zakresie algorytmów dyskretyzacji prostej i krzywych 2-stopnia. Badania niniejsze rozwijają i udoskonalają algorytmy całkowitoliczbowej aproksymacji prostej i krzywych 2-stopnia na całą klasę krzywych algebraicznych płaskich. W ramach tych badań przeprowadzono również ocenę dokładności aproksymacji w mierze lokalnej i średnioglobalnej oraz ocenę złożoności obliczeniowej algorytmów w ich realizacji komputerowej.

Różnorodność w zbiorze możliwych rozwiązań tak postawionego zadania została ograniczona nałożeniem na algorytmy aproksymacji istotnych ograniczeń:

- działania jedynie na liczbach całkowitych,
- niewystępowanie zjawiska kumulacji błędów,
- stosowanie jedynie prostych operacji algebraicznych /arytmetycznych całkowitoliczbowych bądź elementarnych operacji boolowskich/,
- prostota obliczeniowa /duża szybkość działania w realizacji komputerowej/.

6.1. Podstawowe wyniki badań

Omówione w pracy badania są analizą zagadnienia dyskretyzacji krzywych algebraicznych płaskich na jednorodnych siatkach kwadratowych 4- i 8-spójnych i syntezą algorytmów dyskretyzacji tych krzywych metodą podejścia warunkowego, w której moduł wartości opisującej krzywą funkcji $F(x,y)$ został przyjęty za miarę odległości punktu od krzywej /metrykę aproksymacyjną/.

Opracowane i opisane /po raz pierwszy w niniejszej rozprawie/ algorytmy są rozwinięciem i uogólnieniem znanych z literatury algorytmów dyskretyzacji prostej i krzywych 2-stopnia, a szczególnie algorytmów, które autor niniejszej rozprawy opisał w pracy z 1977 r. /algorytmy aproksymacji krzywych 2-stopnia na siatkach kwadratowych 4- i 8-spójnych/, na całą klasę krzywych algebraicznych płaskich, w tym i wielogąździowych.

W ramach prowadzonych badań oszacowane zostały również szczytowe i połowe błędy algorytmów. W szczególności wyprowadzone zostało równanie /5.10/, z którego można wyznaczyć kres górny bezwzględnego szczytowego błędów aproksymacji jako funkcję stopnia krzywej. Oszacowane względne szczytowe błędy aproksymacji /wzory /5.18/ i /5.19// są funkcjami rzędu spójności siatki i w zasadzie nie zależą od stopnia krzywej /promienia krzywizny i parametrów geometrycznych krzywej/.

Przeprowadzona średnioglobalna ocena jakości aproksymacji ma postać wzorów na średni moduł pola przypadającego na odcinek krótkiej cięciwy oraz na jego wartość średnią powstałą z podwójnego uśrednienia modułu pola wzdłuż konturów krzywych.

Wyniki oceny szczytowych i połowych błędów aproksymacji krzywych algebraicznych stanowią uogólnienie oszacowań błędów dyskretyzacji krzywych algebraicznych płaskich 2-stopnia /wykonanych i opisanych przez autora rozprawy w 1977 r./ na całą klasę krzywych algebraicznych płaskich i są publikowane po raz pierwszy w niniejszej rozprawie.

Oszacowana została także złożoność obliczeniowa dyskretyzacji /liczba podstawowych operacji algorytmu wykonywanych w jednym cyklu dyskretyzacji/ jako funkcja stopnia krzywej, rodzaju siatki i wielkości jej modułu oraz sposobu wyznaczania wartości funkcji w węzłach siatki.

Szczególnie duży wpływ na szybkość dyskretyzacji ma stopień krzywej oraz wielkość modułu siatki h .

Tak jednoznaczne i precyzyjne metody oceny złożoności obliczeniowej /szybkości działania/ nie były do oceny algorytmów dyskretyzacji krzywych dotychczas stosowane. Autor sądzi jednak, że do-

kładne określenie szybkości działania algorytmów dyskretyzacyjnych jest niezbędne do właściwej oceny ich możliwości aplikacyjnych.

Wyniki przeprowadzonych badań mają aspekty zarówno poznawcze, jak też i aplikacyjne.

Osiągnięte wyniki, sformułowane w postaci dziewięciu twierdzeń z dowodami, są przyczynkiem do teorii aproksymacji krzywych algebraicznych. Stanowią zasadniczą materię teorii dyskretyzacji krzywych - są rozwinięciem teorii aproksymacji krzywych w nowym kierunku, który jest nazywany "aproksymacją całkowitoliczbową" bądź też "aproksymacją na dwuwymiarowych siatkach". Stworzone zostały ulepszone i uproszczone metody tej aproksymacji oraz ich ocena zarówno pod względem dokładności, jak i złożoności obliczeniowej algorytmów.

Aspekty aplikacyjne przeprowadzonych badań są nie mniej znaczące, jak aspekty poznawcze. Opracowane algorytmy upraszczają proces aproksymacji krzywych algebraicznych oraz stwarzają nowe możliwości. Mają bowiem cechę, której brakuje algorytmom znany wcześniej: nie kumulują błędów. Pozwalają także na rozwiązywanie zadań aproksymacji krzywych łatwiej i szybciej. Dotyczy to w szczególności krzywych wielogałęziowych, oceny dokładności i złożoności obliczeniowej algorytmów, pozwalającej stosować je optymalnie tak ze względu na dokładność, jak i wymagane środki sprzętowe oraz czas ich wykonywania.

6.2. Przewidywane zastosowania

Zaproponowane algorytmy dyskretyzacji zostały zsyntetyzowane pod kątem potrzeb grafiki komputerowej i numerycznego sterowania obrabiarkami. Autor sądzi jednak, że znajdują zastosowanie w wielu różnych dziedzinach nauki i techniki: w grafice komputerowej, w szczególności w monitorach graficznych, kreślakach czy drukarkach graficznych - do konstrukcji układowych bądź programowych interpolatorów i generatorów krzywych i funkcji; w koderach rysunków /dyskretyzatorach/ - do dyskretyzacji konturów, obrysów i dokumentacji rysunkowej wprowadzanej do komputerów; w mapach konturowych i projektowaniu inżynierskim - w zadaniach dopasowania kształtów /modelowanie profilowanych, opływowych kształtów, zwłaszcza w przemyśle okrętowych i lotniczych, czy nawet architekturze/, a także doborze optymalnych wzorników /wykrojników/, czy też w układaniu zabaw mozaikowych.

Algorytmy te - wydaje się - znajdują zastosowanie również w modelowaniu i przetwarzaniu rysunków liniowych i obrazów, w graficznych procesorach obrazów /procesory kwantujące sekwencyjne dane i rozkazy graficzne na postać komórkową, procesory kompresji obrazu/, do opisu obrazów w zadaniach rozpoznawania szablonów, czy do analizy pisma odręcznego /grafologia/.

Ponadto algorytmy i zastosowane w nich metody, mogą znaleźć także zastosowanie w konstrukcji interpolatorów dla obrabiarek sterowanych numerycznie i w technologicznych programach generacji krzywych dla celów interpolowania profilowanych powierzchni, numerycznym sterowaniu procesami technologicznymi, czy w konstrukcji specjalnych jednostek decyzyjno-sterujących do sterowania na bieżąco, zwłaszcza procesami szybkozmiennymi.

Algorytmy i stosowane w nich metody mogłyby także znaleźć zastosowanie w zupełnie odmiennych dziedzinach nauki i techniki: w fizyce cząstek wysokiej energii do identyfikacji torów cząstek elementarnych; w teorii obliczeń współbieżnych czy lingwistyce matematycznej /modelowanie języków formalnych/, a nawet w modelach mechanizmów neuropsychologicznych i teorii sieci nerwowych.

Zastosowana metodyka oceny błędów aproksymacji może być wykorzystana nie tylko w grafice komputerowej oraz przetwarzaniu rysunków i obrazów, ale również w innych dziedzinach nauki i techniki, np. przy określaniu tolerancji obróbki w programach technologicznych sterowania obróbką detali, gdzie wymagana jest wysoka /ściśle określona/ tolerancja obróbki profilu, czy też w cyfrowym sterowaniu innymi procesami technologicznymi, w metrologii i systemach automatycznego sterowania do oceny dyskretyzacji przebiegów ciągłych, itp.

Przy wyborze algorytmu do określonego zastosowania należy brać pod uwagę przede wszystkim dwa czynniki: złożoność obliczeniową /mierzoną liczbą wykonywanych operacji przypadających na jednostkę długości krzywej/ oraz efektywną jakością /oceniającą wizualnie lub mierzoną w jednej z zastosowanych w rozprawie metryk/.

6.3. Określenie kierunku dalszych badań

Uzyskane przez różnych badaczy wyniki, jak również i te, które prezentowane są w niniejszej pracy, nie wyczerpują bynajmniej listy nierozwiązanych problemów w dyskretyzacji na siatkach w ogóle, a w szczególności na siatkach kwadratowych. Wiele problemów czeka jeszcze na pilne rozwiązania. Dotyczy to szczególnie zagadnienia operowania na wielkich liczbach w warunkowej dyskretyzacji krzywych algebraicznych na siatkach kwadratowych, w których $|F(x,y)|$ jest metryką generacyjną.

Za celowe należy uznać podjęcie badań nad strukturalnymi dyskretyzacjami krzywych na jednorodnych siatkach kwadratowych, a także nad dyskretyzacjami krzywych na siatkach kwadratowych niejednorodnych oraz na siatkach innych niż kwadratowe /trójkątne, sześciokątne, koncentryczne/.

Pilnym do rozwiązania problemem jest też dyskretyzacja na siatkach przestrzennych /szczególnie w dziedzinie grafiki komputerowej i numerycznym sterowaniu obrabiarkami/, przede wszystkim na jednorodnych siatkach kwadratowych, ale również i na siatkach krzywoliniowych /koncentrycznych/.

Na rozwiązanie czeka również zagadnienie całkowitoliczbowej aproksymacji powierzchni, zarówno tych najprostszych /2-stopnia algebraicznych/, jak i też tych bardziej złożonych, których niezbędność w grafice komputerowej i numerycznym sterowaniu obrabiarkami jest coraz bardziej oczywista.

Literatura

1963

- [1] Stockton F.G.: Algorithm 162, XY move plotting. Communications of the ACM 1963 t.6 nr 2 s.161

1965

- [2] Bresenham J.E.: Algorithm for computer control of a digital plotter. IBM System Journal 1965 t.4 nr 1 s.25-30

1967

- [3] Pitteway M.L.V.: Algorithm for drawing ellipses or hyperbolas with a digital plotter. The Computer Journal 1967 t.10 nr 3 s.282-289

1968

- [4] Botting R.J., Pitteway M.L.V.: Algorithm for drawing ellipses or hyperbolas with a digital plotter. The Computer Journal 1968 t.11 nr 2 s.120
- [5] Morse S.P.: A mathematical model for the analysis of contour line data. Journal of the ACM 1968 t.15 nr 2 s.205-220
- [6] Montanari U.: A method for obtaining skeletons using a quasi-euclidean distance. Journal of the ACM 1968 t.15 nr 4 s.600-624
- [7] Partridge M.F.: Algorithm for drawing ellipses or hyperbolas with a digital plotter. The Computer Journal 1968 t.11 nr 2 s.119-120

1969

- [8] Freeman H.: A review of relevant problems in the processing of line-drawing data, Automatic Interpretation and Classification of Images. New York: G rasselli A. 1969
- [9] Metzger R.A.: Computer generated graphic segments in a raster display. Proceeding of the 1969 Spring Joint Computer Conference

[10] Rosenfeld A.: Picture Processing by Computer, London: Academic Press 1969

1970

[11] Freeman H.: Boundary encoding and processing, Picture Processing and Psychopictories. London: Lipkin B.S. and Rosenfeld A. 1970

[12] Danielsson P.E.: Incremental curve generation. IEEE Transactions on Computers 1970 t. C-19 nr 9 s.783-793

[13] Montanari U.: A note on minimal length polygonal approximation to a digitized contour. Communications of the ACM 1970 t.13 nr 1 s.41-47

[14] Montanari U.: On limit properties in digitization schemes. Journal of the ACM 1970 t.17 nr 2 s.348-360

[15] Rosenfeld A.: Connectivity in digital pictures. Journal on the ACM 1970 t.17 nr 1 s.146-160

[16] Poljakov V.G.: Estestvennaja diskretnaja model risunka, nekotorye asimptotičeskie ee svojstva i predskazanie choda sledjaščej razviortki. Problemy pereači informacii 1970 t.IV vyp.3

1972

[17] Lappalainen P., Ojala L.: A novel digital method generating a circle test pattern for television. The Radio and Electronic Engineer 1972 t.42 nr 1 s.21-27

[18] Reggiori G.B.: Digital computer transformations for irregular line drawings. Technical Report 403-22 New York University 1972

1973

[19] Jordan B.W., Holm B.D., Lennon W.J.: An improved algorithm for the generation of nonparametric curves. IEEE Transactions Computers 1973 t. C-22 nr 12 s.1052-1060

[20] Denert E.: A method for computing points of a circle using only integers. Computer Graphics and Image processing 1973 t.2 nr 1 s.83-91

[21] Newman W.M., Sproull R.F.: Principles of Interactive Computer Graphics. New York: McGraw-Hill 1973, 607 s.

[22] Rosenfeld A., Johnetron E.: Angle detection on digital curves. IEEE Transactions on Computers 1973 t. C-22 nr 9 s.875-878

[23] Rosenfeld A.: Arcs and curves in digital pictures. Journal of the ACM 1973 t.20 nr 1 s.81-87

1974

[24] Athani V.V.: The 16-vector algorithm for computer controlled digital X-Y plotter. IEEE Transactions on Computers 1974 t. C-24 nr 8 s.831-835

[25] Bornhill i Riesenfeld, ed.: Computer Aided Geometric Desing. New York: Academic Press 1974

[26] Brons R.: Linguistic methods for the description of a straight line on a grid. Computer Graphics and Image Processing 1974 t.3 nr 1 s.48-62

[27] Chaikin G.M.: Algorithm for high-speed curve generations. Computer Graphics and Image Processing 1974 t.3 nr 4 s.346-349

[28] Freeman H.: Computer processing of line-drawing images. Computing Surveys 1974 t.6 nr 1 s. 57-97

[29] McLain D.H.: Drawing contours from arbitrary data points. The Computer Journal 1974 r.17 nr 4 s.318-324

[30] Pitteway M.L.V., Botting R.J.: "Integer circles, etc." - Thee move extension of Bresenham's algorithm. Computer Graphics and Image Processing 1974 t.3 nr 2 s.260-261

[31] Pitteway M.L.V.: Integer circles, etc. - Some fourther thoughts. Computer Graphics and Image Processing 1974 t.3 nr 3 s.262-265

[32] Reumann K., Witkam A.P.M.: Optimizing curve segmentation in computer graphics. International Computing Symposium 1973. Konstanz: Gdnter A. i in. North-Holland Publ.Co. 1974 s.467-472

- [33] Rosenfeld A.: A note on perimeter in digital pictures. Information and Control 1974 t.24 nr 4 s.384-388
- [34] Rosenfeld A.: Adjacency in digital pictures. Information and Control 1974 t.26 nr 1 s.24-33
- [35] Stomopoulos C.D.: Parallel algorithms for joining two point by a straight-line segment. IEEE Transactions on Computers 1974 t. C-22 nr 6 s.642-646

1975

- [36] Arcelli C., Masarotti A.: Regular arcs in digital contours. Computer Graphics and Image Processing 1975 t.4 nr 2 s.339-360
- [37] Bongiovanni G., Luccio F., Zorat A.: The discrete equation of the straight line. IEEE Transactions on Computers 1975 t. C-24 nr 3 s.310-313
- [38] Komeswara R.C.F.: Comment on a method for computing points of a circle using only integers. Computer Graphics and Image Processing 1975 t.4 nr 1 s.79
- [39] Klaasman H.: Some aspects of the accuracy of the approximated position of a straight line on a square grid. Computer Graphics and Image Processing 1975 t.4 nr 3 s.225-235
- [40] Mokrzycki W.: Przyrostowa generacja krzywych drugiego stopnia w systemach obrazowania informacji. Biuletyn WAT 1975 nr 9/277 s.73-77
- [41] Riesenfeld F.R.: On Chaikin's algorithm. Computer Graphics and Image Processing 1975 t.4 nr 4 s.304-310
- [42] Rosenfeld A.: A converse to the Jordan curve theorem for digital curves. Information and Control 1975 t.29 nr 2 s.292-293
- [43] Rosenfeld A., Weszka J.: An improved method of angle detection on digital curves. IEEE Transactions on Computers 1975 t. C-24 nr 9 s.940-941
- [44] Walukiewicz S.: Prawie liniowe zadania programowania dyskretnego. Prace Instytutu Organizacji i Kierowania 1975 nr 23
- [45] Ziemkiewicz A.: Wybrane procedury graficzne w systemach komputerowych. Prace IMiD 1975 nr 2 s.43-62

1976

- [46] Belser K.: Comment on "An improved algorithm for the generation on nonparametric curves". IEEE Transactions on Computers 1976 t. C-25 nr 1 s.103
- [47] Horn V.K.P.: Circle generators for display devices. Computer Graphics and Image Processing 1976 t.5 nr 2 s.280-288
- [48] Morrin T.H.: Chain-link compression of arbitrary black-white images. Computer Graphics and Image Processing 1976 t.5 nr 2 s.172-189
- [49] Ramot J.: Nonparametric curves. IEEE Transactions on Computers 1976 r. C-25 nr 1 s.103-104
- [50] Rogers D., Adams J.: Mathematical Elements for Computer Graphics. New York: McGraw-Hill 1976, 239 s.
- [51] Rothstein J., Weiman C.: Parallel and sequential specification of a context sensitive language for straight lines on grids. Computer Graphics and Image Processing 1976 t.5 nr 1 s.106-124
- [52] Rubin P.: Generation of nonparametric curves. IEEE Transactions on Computers 1976 t. C-25 nr 1 s.103
- [53] Sutcliffe D.C.: An algorithm for drawing the curve $f(x,y)=0$. The Computer Journal 1976 r.19 nr 3 s.246-249
- [54] Sutcliffe D.C.: A remark on a contouring algorithm. The Computer Journal 1976, t.19 nr 4 s.333-335

1977

- [55] Badler N.I.: Disk generators for a raster display device. Computer Graphics and Image Processing 1977 t.6 nr 4 s.589-593

- [56] Bresenham J.E.: A linear algorithm for incremental digital display of circular area. *Communications of the ACM* 1977 t.20 nr 2 s.100-106
- [57] Chung W.L.: On circle generation algorithms. *Computer Graphics and Image Processing* 1977 t.6 nr 1 s.196-198
- [58] Freeman H., Davis L.: A corner-finding algorithm for chain-coded curves. *IEEE Transactions on Computers* 1977 t. C-26 nr 3 s.297-303
- [59] Gaafar M.: Convexity verification, block-chords, and digital straight lines. *Computer Graphics and Image Processing* 1977 t.6 nr 4 s.361-370
- [60] Mokrzycki W.: Algorytmy i ocena dokładności układowych generacji krzywych 2-stopnia na siatkach kwadratowych. *Biul. Inf. Obiektowe Systemy Komputerowe* 1977 R.XVI nr 5-6 s.89-109
- 1978
- [61] Arcelli C., Massarotti A.: On the parallel generation of straight digital lines. *Computer Graphics and Image Processing* 1978 t.7 nr 1 s.67-83
- [62] Freeman H.: Shape description via the use of critical points. *Pattern Recognition* 1978 t.11 nr 3 s.159-166
- [63] Groen P.C.A., Verbeek P.W.: Freeman - code probabilities of object boundary quantized contours. *Computer Graphics and Image Processing* 1978 t.7 nr 4 s.391-402
- [64] Mokrzycki W.: Analiza cyfrowych metod generacji układowej krzywych drugiego stopnia. *Prace naukowo-badawcze IMM* 1978 nr 2
- [65] Paszkowski S.: Optymalny algorytm kreślenia okręgu. Raport nr N-44 Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego 1978
- [66] Pratt W.K.: *Digital Image Processing*. A Wiley-Interscience Publication John Wiley and Sons, New York /Chichester/ Brisbane/Toronto 1978
- [67] Rosenfeld A.: Geodesics in digital pictures. *Information and Control* 1978 t.36 nr 1 s.74-84
- [68] Sankar P., Sharma C.: A parallel procedure for the detection of dominant points on the digital curve. *Computer Graphics and Image Processing* 1978 t.7 nr 3 s.403-412
- [69] Sankar P.V.: Grid intersect quantization schemes for solid object digitization. *Computer Graphics and Image Processing* 1978 t.8 nr 1 s.25-42
- [70] Ward A.S.: Real time plotting of approximate contour maps. *Communications of ACM* 1978 t.21 nr 9 s.788-790
- 1979
- [71] Coderberg R.L.T.: A new method for vector generation. *Computer Graphics and Image Processing* 1979 t.9 nr 2 s.183-195
- [72] Freeman H.: Algorithm for generating a digital straight line on a triangular grid. *IEEE Transactions on Computers* 1979 t. C-28 nr 2 s.150-152
- [73] Horn B.K.P.: Comments on: "A note on the paper by B.K.P. Horn" by Zenon Kulpa. *Computer Graphics and Image Processing* 1979 t.9 nr 1 s.104
- [74] Kulpa Z.: A note on the paper by B.K.P. Horn: "Circle generators for display devices". *Computer Graphics and Image Processing* 1979 t.9 nr 1 s.102-103
- [75] Lindner R.: A processor for real time TV raster scan conversion. *Computer and Graphics* 1979 t.4 nr 1 s.23-28
- [76] Maxwell P.C., Baker P.W.: The generation of polygons representing circles, ellipses and hyperbolas. *Computer Graphics and Image Processing* 1979 t.10 nr 1 s.84-93
- [77] Moss R., Lindgard A.: Parametric spline curves in integer arithmetic designed for use in micro-computer controlled plotters. *Computers and Graphics* 1979 t.4 nr 1 s.51-61
- [78] Suenaga Y., Kamae T., Kobayashi T.: A high-speed algorithm for the generation of straight lines and circular arcs. *IEEE Transactions on Computers* 1979 t. C-28 nr 10 s.728-736

[79] Weisman C.F.R., Chaikin G.: Logarithmic spiral grids for image processing and display. Computer Graphics and Image Processing 1979 t.11 nr 2 s.197-226

1980

[80] Beetem J.: Vector graphics for raster displays. BYTE Publications inc. 1980 s.286-293
[81] Chow W.W.: Interlocking shapes in art and engineering. Computer Aided Design 1980 t.12 nr 1 s.29-34
[82] Conseignoux Ph. Guedj R.: Computer Generation of Colored Planar Patterns on TV-like Rasters. Proceedings of the IEEE 1980 t.68 nr 7 s.753-944
[83] Danielsson P.E.: Euclidean distance mapping. Computer Graphics and Image Processing 1980 t.14 nr 3 s.227-248
[84] Earnshaw R.A.: Line tracking for incremental plotters. The Computer Journal 1980 t.23 nr 1 s.46-52
[85] Frank A.J., Daniels J.D., Unangst D.R.: Progressive image transmission using a growth-geometry coding. Proceedings of the IEEE 1980 t.68 nr 7 s.897-909
[86] Freeman H., Saghri J.A.: Comparative analysis of line-drawing modeling schemes. Computer Graphics and Image Processing 1980 t.12 nr 2 s.203-223

1981

[87] Chakravarty I.: A single-pass, chain generating algorithm for region boundaries. Computer Graphics and Image Processing 1981 t.15 nr 2 s.182-193
[88] Gosling T.H.: Bulge, shear and squash: a representation for the general conic arc. Computer Aided Design 1981 t.13 nr 2 s.81-84

1982

[89] Kim Ch. E.: On cellular straight line segments. Computer Graphics and Image Processing 1982 t.18 nr 3 s.369-381
[90] Lee H.C., Fu K.S.: Using the FFT to determine digital straight line chain codes. Computer Graphics and Image Processing 1982 t.18 nr 3 s.359-368
[91] Mokrzycki W.: Dyskretyzacje krzywych algebraicznych na jednorodnych kwadratowych siatkach k-spójnych. Prace naukowo-badawcze IMM 1982 nr 2

Dodatek A

Dowód twierdzenia 1.1

Rozważmy obszar dyskretny $n \times n$ węzłów ponumerowanych od lewej do prawej - $i=1(1)n$ oraz z dołu do góry - $j=1(1)n$. Poprowadźmy odcinki z węzła początkowego do wszystkich innych węzłów leżących na lub poniżej przekątnej obszaru. Jak łatwo zauważyć, każdy z tych odcinków ma różną długość i tylko takie długości mogą przyjmować odcinki w tym obszarze. Liczba tych odcinków wynosi:

$$\varphi_1 = \sum_{i=2}^n i = \frac{n}{2}(n+1) - 1.$$

a więc wyraża się wielomianem 2-stopnia względem liczby n , co należało wykazać.

Liczbę odcinków łączących węzeł początkowy z wszystkimi węzłami obszaru otrzymamy mnożąc liczbę δ^1 przez 2 i odejmując $n-1$ odcinków leżących na przekątnej obszarze. Mamy więc

$$2 \delta^1 - (n-1) = n^2 - 1.$$

A więc węzeł pierwszy może być połączony z n^2-1 innymi węzłami /co jest oczywiste/.

Węzeł drugi może być połączony z n^2-2 innymi węzłami, węzeł trzeci - n^2-3 węzłami itd., węzeł n^2-1 może być połączony jedynie z jednym węzłem. Ogólna liczba odcinków, które daje się przeprowadzić między dowolnymi węzłami obszaru dyskretnego, wyraża się więc wzorem

$$\delta = \sum_{i=n-1}^1 \frac{1}{2} = \frac{n^2}{2}(n^2-1)$$

czyli wielomianem 2-stopnia względem liczby węzłów obszaru n^2 , co również należało wykazać.

Wykażemy teraz, że liczba odcinków mających różne orientacje wyraża się wielomianem 2-stopnia względem n , jak w twierdzeniu. Posłużymy się w tym celu siatką wielospójną.

Dla obszaru dyskretnego 2×2 węzły mamy 8 różnych orientacji odcinków.

Dla obszaru dyskretnego 3×3 węzły mamy dodatkowo 8 orientacji.

Dla obszaru dyskretnego 4×4 węzły mamy dodatkowo 16 orientacji.

Dla obszaru dyskretnego 5×5 węzłów mamy dodatkowo 24 orientacje.

A więc, przez indukcję w obszarze $n \times n$ węzłów daje się zdefiniować

$$\delta^2 = \sum_{i=2}^n 8(i-2) + 8 = 4n(n-3) + 16$$

odcinków prostych, mających różne orientacje, jest to zależność wielomianowa 2-stopnia względem liniowego obszaru n , co również należało wykazać.

Wyznamy teraz liczbę odcinków przyjmujących różne długości i orientacje. Zauważmy, że odpowiadającej liczbie możliwych wiązań /międzywęzłowych połączeń/ na siatce wielospójnej. A więc dla obszaru 2×2 węzły mamy 8 różnych odcinków /jak dla siatki 8-spójnej/. Zwiększając obszar dyskretny do wymiarów 3×3 węzły otrzymujemy dodatkowo 16 różnych odcinków /jak dla siatki 16-spójnej/, a po kolejnym powiększeniu obszaru do wymiarów 4×4 węzły, otrzymujemy dodatkowo 24 różne odcinki /jak dla siatki 32-spójnej/.

Tak więc liczba różniących się długością bądź orientacją odcinków obszaru dyskretnego $n \times n$ węzłów wyraża się wzorem

$$\delta^3 = \sum_{i=2}^n 8(i-1) = 4n(n-1)$$

czyli wielomianem 2-stopnia względem rozmiaru liniowego obszaru n , co także należało wykazać. ■

Dowód twierdzenia 3.1

Odległością punktu P_1 od krzywej jest moduł wartości funkcji w tym punkcie $|F(P_1)|$. Dwa punkty P_1 i P_2 są jednakowo odległe od krzywej, gdy moduły wartości funkcji w tych punktach są sobie równe, tj.:

$$|F(P_1)| = |F(P_2)|$$

Odległość między dwoma punktami P_1 i P_2 mierzymy jako moduł z różnicy modułów wartości funkcji w tych punktach, tj.:

$$d(P_1, P_2) = \left| |F(P_1)| - |F(P_2)| \right|$$

Twierdzenie udowodnimy, wykazując, że spełnione są trzy warunki, które każda metryka musi spełniać:

$$1/ d(P_1, P_2) = 0 \leftrightarrow P_1 = P_2$$

$$2/ d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$$

$$3/ d(P_1, P_2) \leq d(P_1, P_3) + d(P_3, P_2)$$

Ad1. $d(P_1, P_2) = 0$ oznacza, w przypadku rozważanej metryki, że punkty P_1 i P_2 są jednakowo odległe od krzywej lub, że leżą na tej krzywej. Istotnie. Zgodnie z definicją krzywa uwikłana $F(x, y)$ jest miejscem geometrycznym punktów, dla których zachodzi $F(x, y) = 0$. A więc $d(P_1, P_2) = 0$ oznacza, że albo $|F(P_1)| = |F(P_2)|$, tj. punkty P_1 i P_2 są od krzywej jednakowo odległe, albo $F(P_1) = F(P_2) = 0$, tj. obydwa punkty P_1 i P_2 leżą na konturze krzywej.

Ad2. $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$ istotnie zachodzi.

Zgodnie z definicją modułu mamy

$$d(P_1, P_2) = \left| |F(P_1)| - |F(P_2)| \right| = \left| |F(P_2)| - |F(P_1)| \right| = d(P_2, P_1)$$

Ad3. Nierówność $d(P_1, P_2) \leq d(P_1, P_3) + d(P_2, P_3)$ jest prawdziwa. Mamy bowiem

$$d(P_1, P_2) = \left| |F(P_1)| - |F(P_2)| \right|$$

$$d(P_1, P_3) = \left| |F(P_1)| - |F(P_3)| \right|$$

$$d(P_2, P_3) = \left| |F(P_2)| - |F(P_3)| \right| = \left| |F(P_3)| - |F(P_2)| \right|$$

Dlatego

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \left| |F(P_1)| - |F(P_2)| + |F(P_3)| - |F(P_3)| \right| = \\ &= \left| |F(P_1)| - |F(P_3)| + |F(P_3)| - |F(P_2)| \right| \leq \left| |F(P_1)| - |F(P_3)| \right| + \left| |F(P_3)| - |F(P_2)| \right| = \\ &= d(P_1, P_3) + d(P_2, P_3) \end{aligned}$$

co należało wykazać.

Dodatek B

Implementacja algorytmów

W celu zweryfikowania opracowanych w rozdz.3 algorytmów dyskretyzacji krzywych algebraicznych tzn. sprawdzenia poprawności ich działania, porównania uzyskanych wyników z założeniami na dyskretyzację i ujawnienia innych ich cech niż te, które były przewidziane na etapie ich syntezy, a także do wizualnej oceny krzywych dyskretnych generowanych przez te algorytmy, zaimplementowano je na komputerach IRIS 80 oraz MERA 400 w języku FORTRAN, z wyprowadzeniem wyników na drukarkę, rastrowy monitor graficzny oraz kreślak.

Wiele różnych przebiegów programów realizujących obydwa algorytmy /z różnymi typami, stopniami i kierunkami obiegów krzywych oraz wielkością modułu siatki h / dowodzi poprawności ich konstrukcji.

Jako ilustrację tych badań umieszczono dyskretne postaci pięciu różnych typów krzywych /4- i 6-stopnia/, z których każda jest generowana za pomocą każdego z algorytmów z modułem siatki $h = 1mm$, oraz za pomocą bądź algorytmu na siatce 4-spójnej bądź 8-spójnej z modułem siatki $h=0.25mm$.

Moduł siatki $h=1$ mm został tak dobrany, aby /dla określonych parametrów geometrycznych krzywych/ zachować kształty geometryczne tych krzywych i równocześnie uwidocznić istotną różnicę w gładkości łamanych generowanych za pomocą każdego z algorytmów. Moduł $H=0.25$ mm zapewnia dostateczną dla szerokiej klasy zastosowań dokładność zobrazowania, szczególnie na monitorach graficznych, niezależnie /w zasadzie/ od rzędu spójności siatki, chociaż pozwala /jeszcze/ dostrzec różnice w gładkości łamanych generowanych przez każdy z algorytmów. Na przedstawionych rysunkach widać istotną różnicę w gładkości wygenerowanych łamanych na korzyść krzywych wygenerowanych na siatce o wyższym rzędzie spójności. Stwierdzić można również wyraźną zależność między gładkością krzywej a promieniem krzywizny tej krzywej oraz wzajemnym położeniem siatki i krzywej /szczególnie w krzywych generowanych na siatce 4-spójnej/. Gładkość krzywych jest większa w tych rejonach krzywej, w których jest mniejsza krzywizna krzywej oraz kąt /liczony mod. 90° / między styczną do krzywej i głównymi liniami siatki.

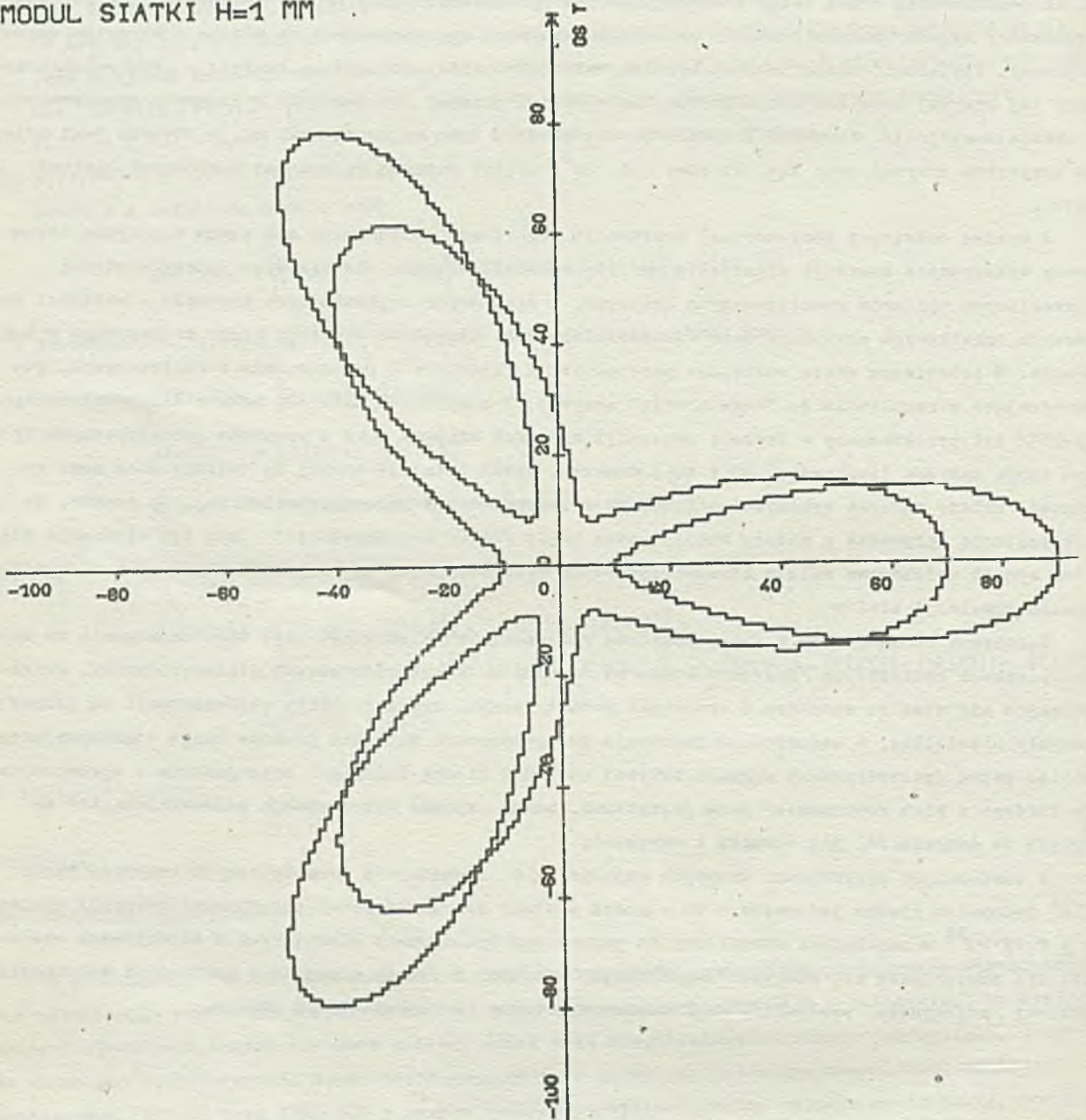
W wyniku omawianej komputerowej realizacji algorytmów uwidoczniła się pewna negatywna strona zasady wykonywania operacji algorytmów na liczbach całkowitych. Dla krzywych wyższych stopni i określonych wymiarów geometrycznych krzywych, w niektórych rejonach tych krzywych - wartości pochodnych cząstkowych przyjmują duże wartości liczbowe. Wymaga to długiego słowa rozkazowego w komputerze. W przeciwnym razie następuje przepełnienie rejestrów i przekłamanie w obliczeniach, doprowadzające w rezultacie do "degeneracji" krzywej. W komputerze MERA 400 zakres liczb całkowitych / ± 32767 / był przekraczany w trakcie generacji krzywych stopnia $n > 4$ i wymiarów geometrycznych krzywych spoza zakresu liczbowego $[-40 + 40]$ jednostek. Jeśli istnieje obawa, że opisany stan może zaistnieć, należy wówczas wykonywać obliczenia w reprezentacji zmiennoprzecinkowej. Co prawda, ta reprezentacja wprowadza z natury swojej pewne błędy /błędy reprezentacji/. Poza tym eliminuje się w ten sposób podstawowe zalety stosowanej metody dyskretyzacji, tj. szybkość obliczeń i niewystępowanie kumulacji błędów

Negatywną cechą metody będącej podstawą proponowanych algorytmów jest więc operowanie na dużych liczbach całkowitych /dużych w stosunku do zakresu liczb całkowitych minikomputerów/, zwiększających się wraz ze stopniem i wymiarami geometrycznymi krzywej. Błędy reprezentacji są jednak z reguły niewielkie, a degeneracja następuje po wyznaczeniu kilkuset punktów ciągu aproksymującego. Dzieląc zatem dyskretyzowany segment krzywej na pewną liczbę krótszych podsegmentów i wyznaczając dla każdego z nich /poprawnie/ dane początkowe, można uzyskać aproksymację zadowalającą, tak ze względu na dokładność, jak również i szybkość.

W testowanych przykładach krzywych stopnia $n \leq 6$ i wymiarach geometrycznych krzywych rzędu $\pm 10^4$ jednostek /jedna jednostka = $1h$ - moduł siatki/ zakres liczbowy pojedynczej precyzji wynoszący $\pm 0.17 \cdot 10^{39}$ w zupełności wystarczał do poprawnego wykonywania niezbędnych w algorytmach operacji. Nie stwierdzało się również "degeneracji" krzywych: z powodu stosowania arytmetyki zmiennoprzecinkowej /pojedynczej precyzji/, mimo wnoszonych przez tę reprezentację błędów.

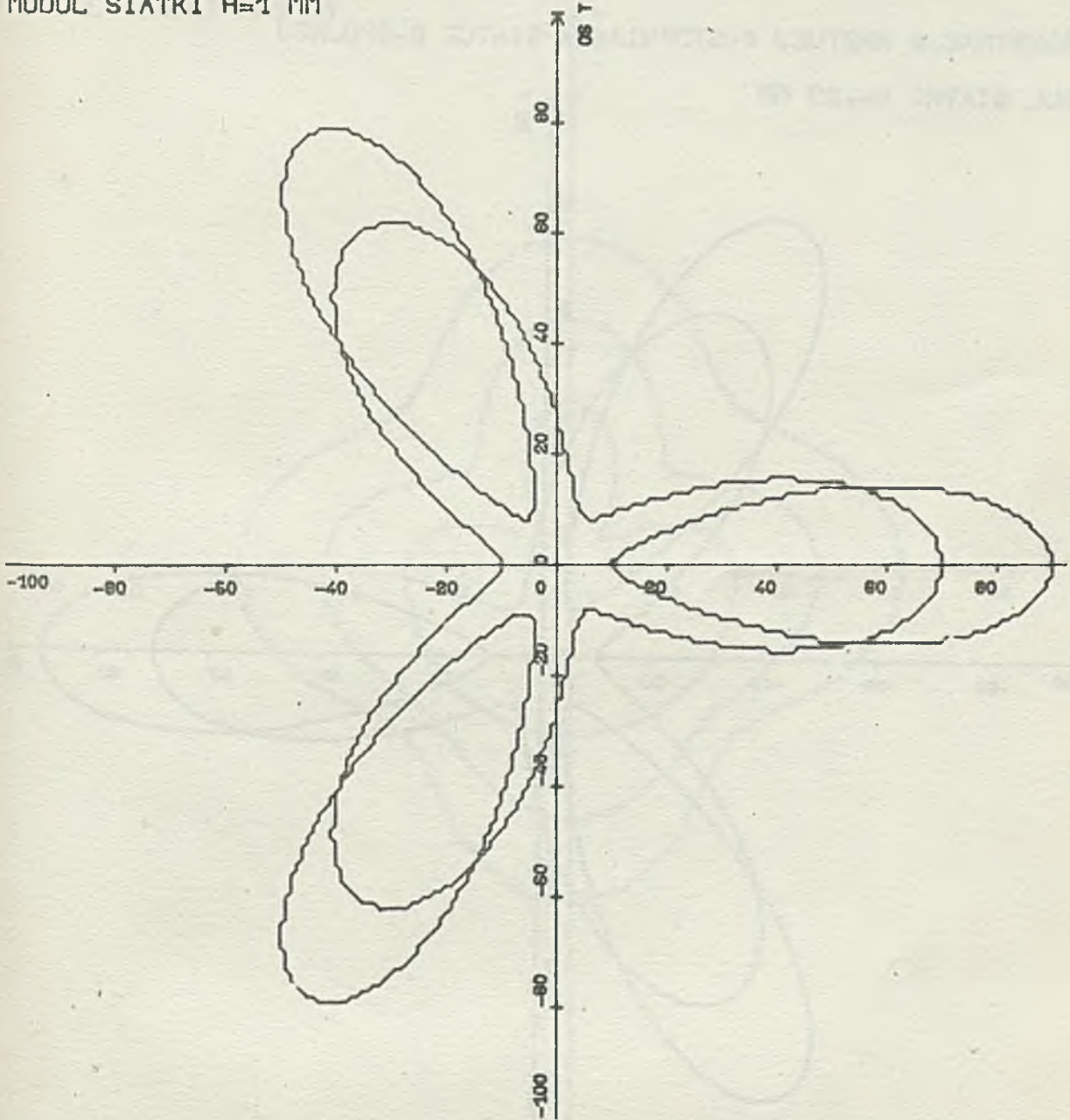
APROKSYMACJA KRZYWEJ 4-STOPNIA NA SIATCE 4-SPOJNEJ

MODUL SIATKI $H=1$ MM



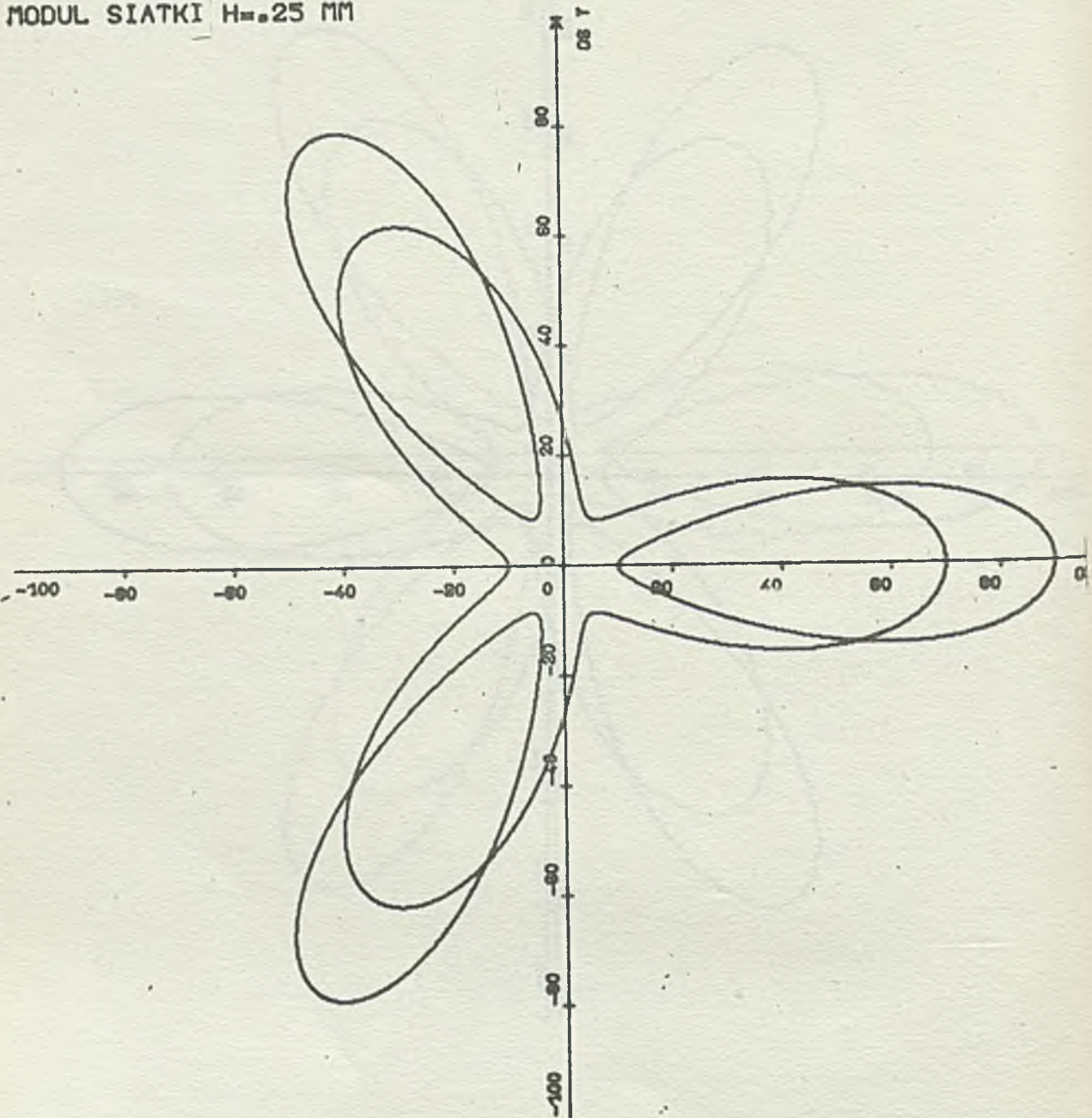
APROKSYMACJA KRZYWEJ 4-STCPCNIA NA SIATCE 8-SPOJNEJ

MODUL SIATKI $H=1$ MM



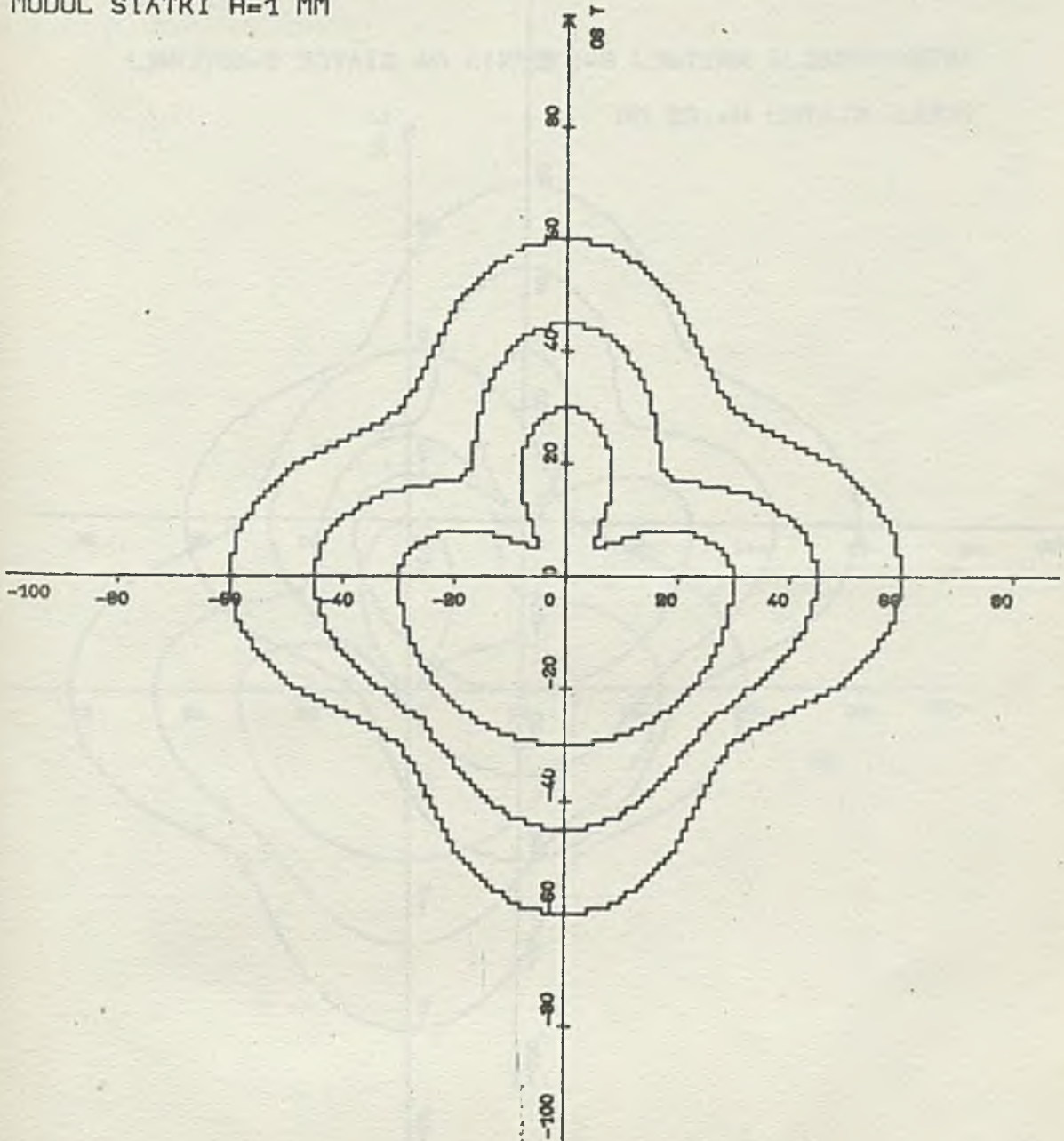
APROKSYMACJA KRZYWEJ 4-STOPNIA NA SIATCE 8-SPOJNEJ

MODUL SIATKI $H=25$ MM



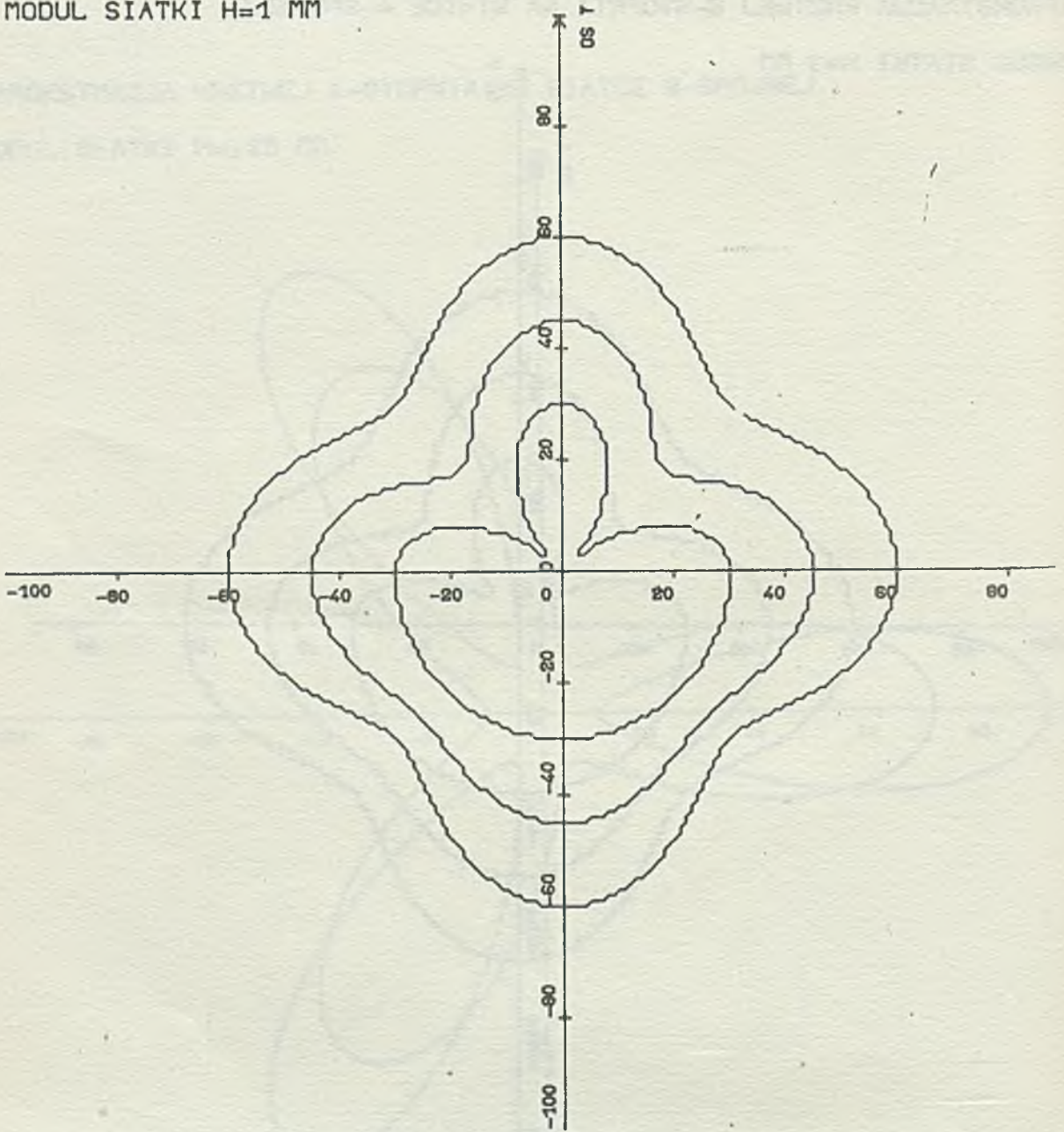
APROKSYMACJA KRZYWEJ 6-STOPNIA NA SIATCE 4-SPOJNEJ

MODUL SIATKI $H=1$ MM



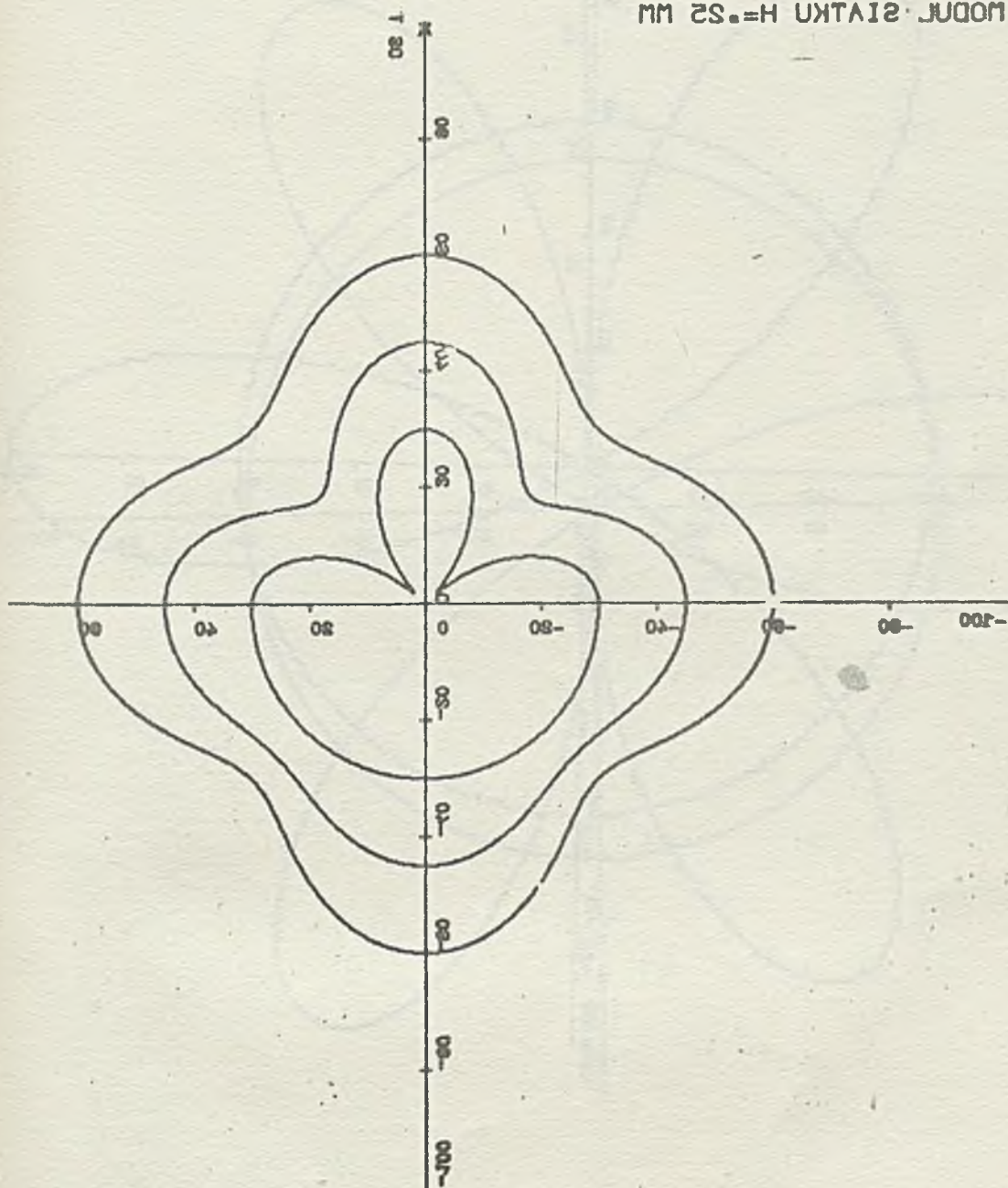
APROKSYMACJA KRZYWEJ 6-STOPNIA NA SIATCE 8-SPOJNEJ

MODUL SIATKI H=1 MM



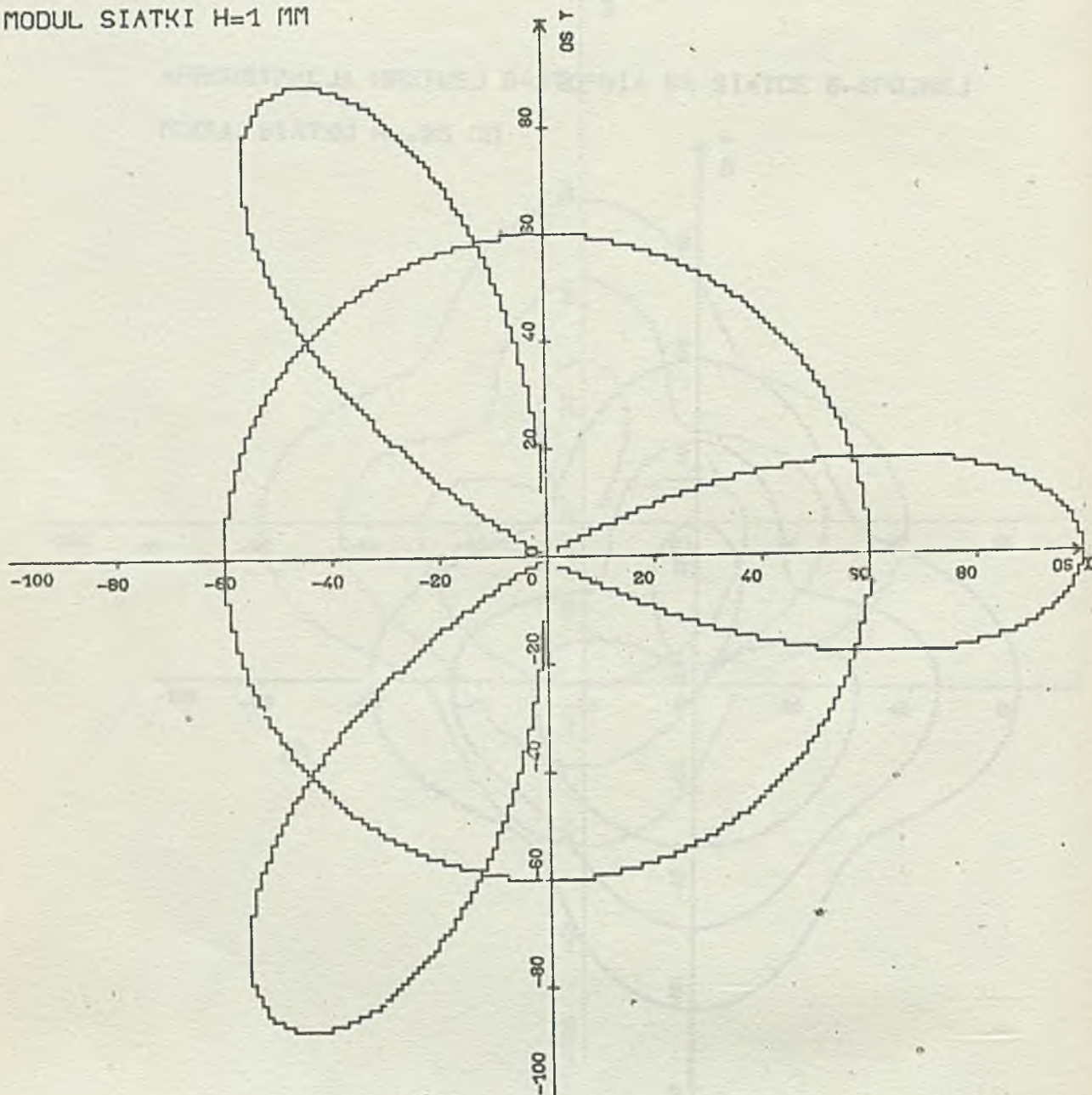
APRÓKSÝMÁCJA KRZYWEJ 8-STOPNIA W SIATCE 8-SPOJNEJ

MODUŁ SIATKI $H = 0.2$ MM



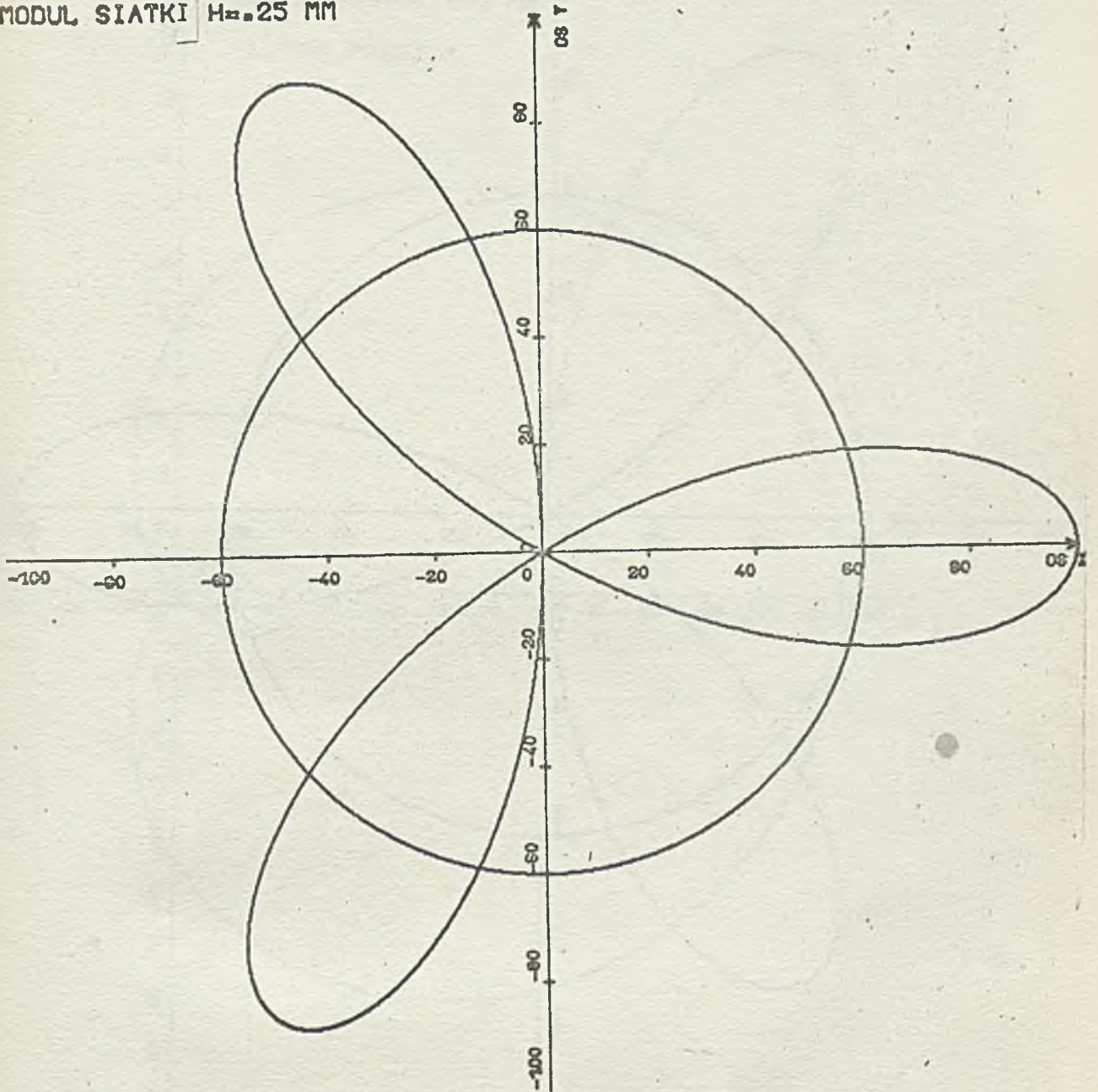
APROKSYMACJA KRZYWEJ 4-STOPNIA NA SIATCE 4-SPOJNEJ

MODUL SIATKI $H=1$ MM



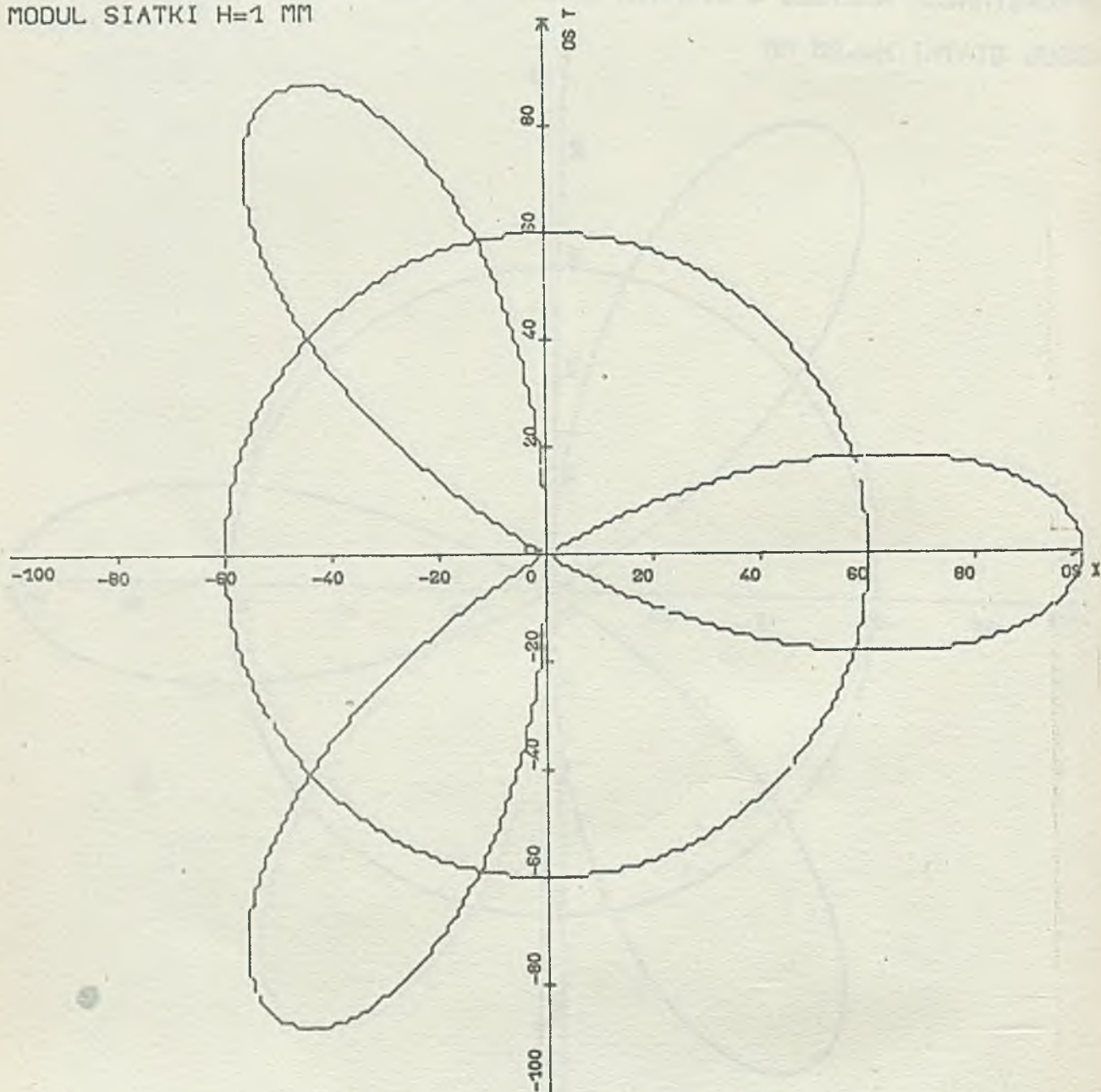
APROKSYMACJA KRZYWEJ 4-STOPNIA NA SIATCE 8-SPOJNEJ

MODUŁ SIATKI $H=25$ MM



APROKSYMACJA KRZYWEJ 4-STOPNIA NA SIATCE 8-SPOJNEJ

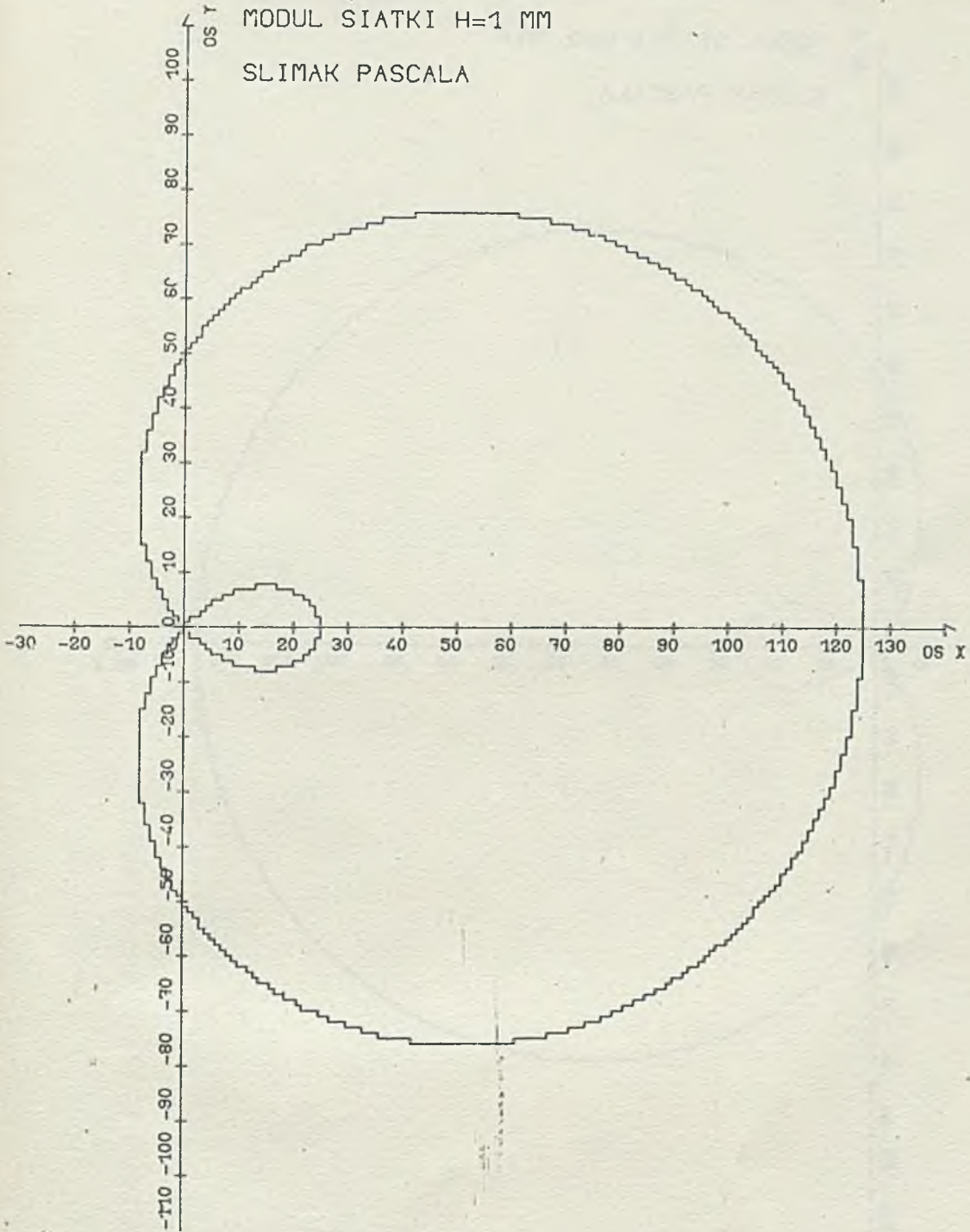
MODUL SIATKI $H=1$ MM



APROKSYMACJA KRZYWYCH 4-STOPNIA NA SIATCE 4-SPOJNEJ

MODUL SIATKI H=1 MM

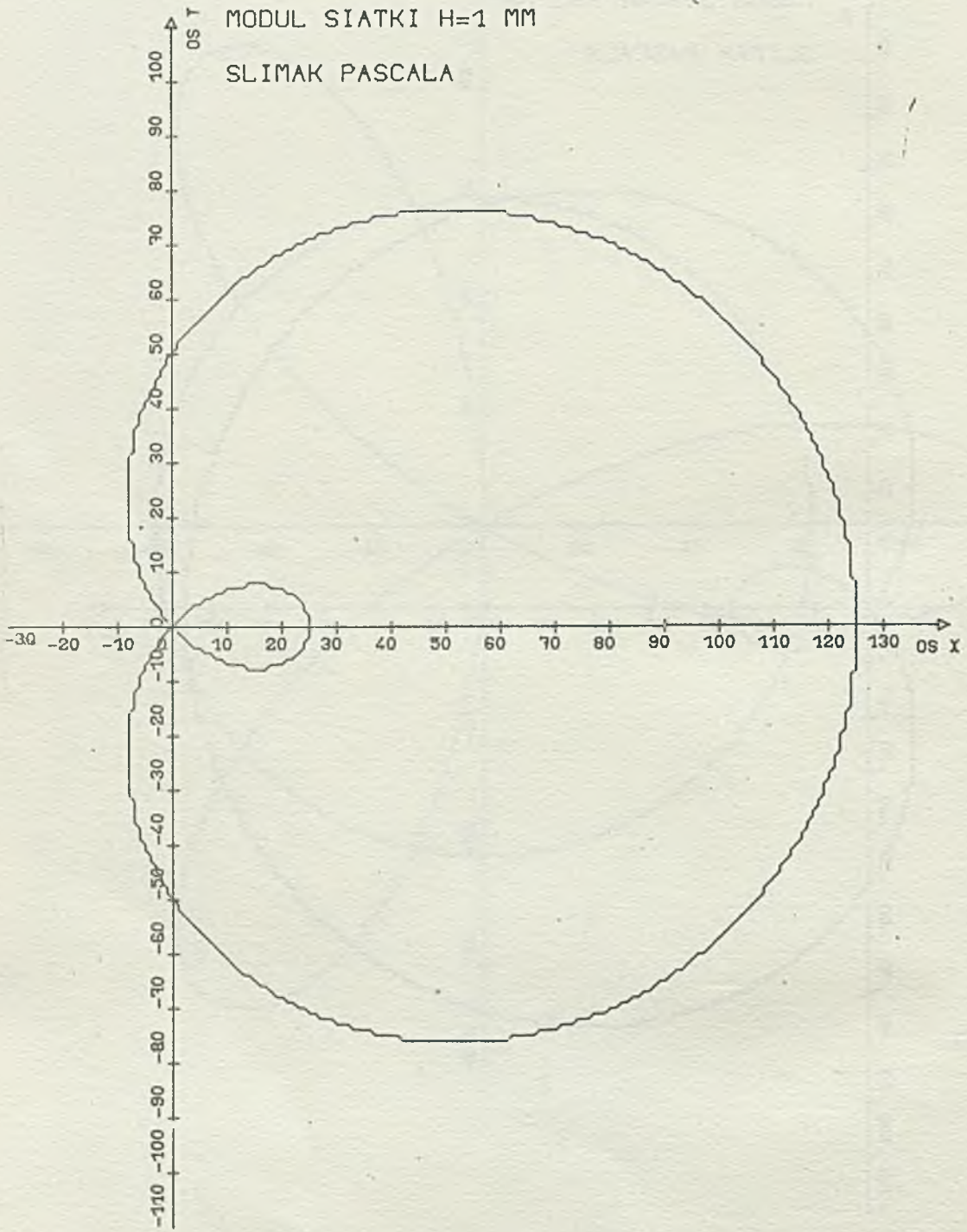
SLIMAK PASCALA



APROKSYMACJA KRZYWYCH 4-STOPNIA NA SIATCE 8-SPOJNEJ

MODUL SIATKI H=1 MM

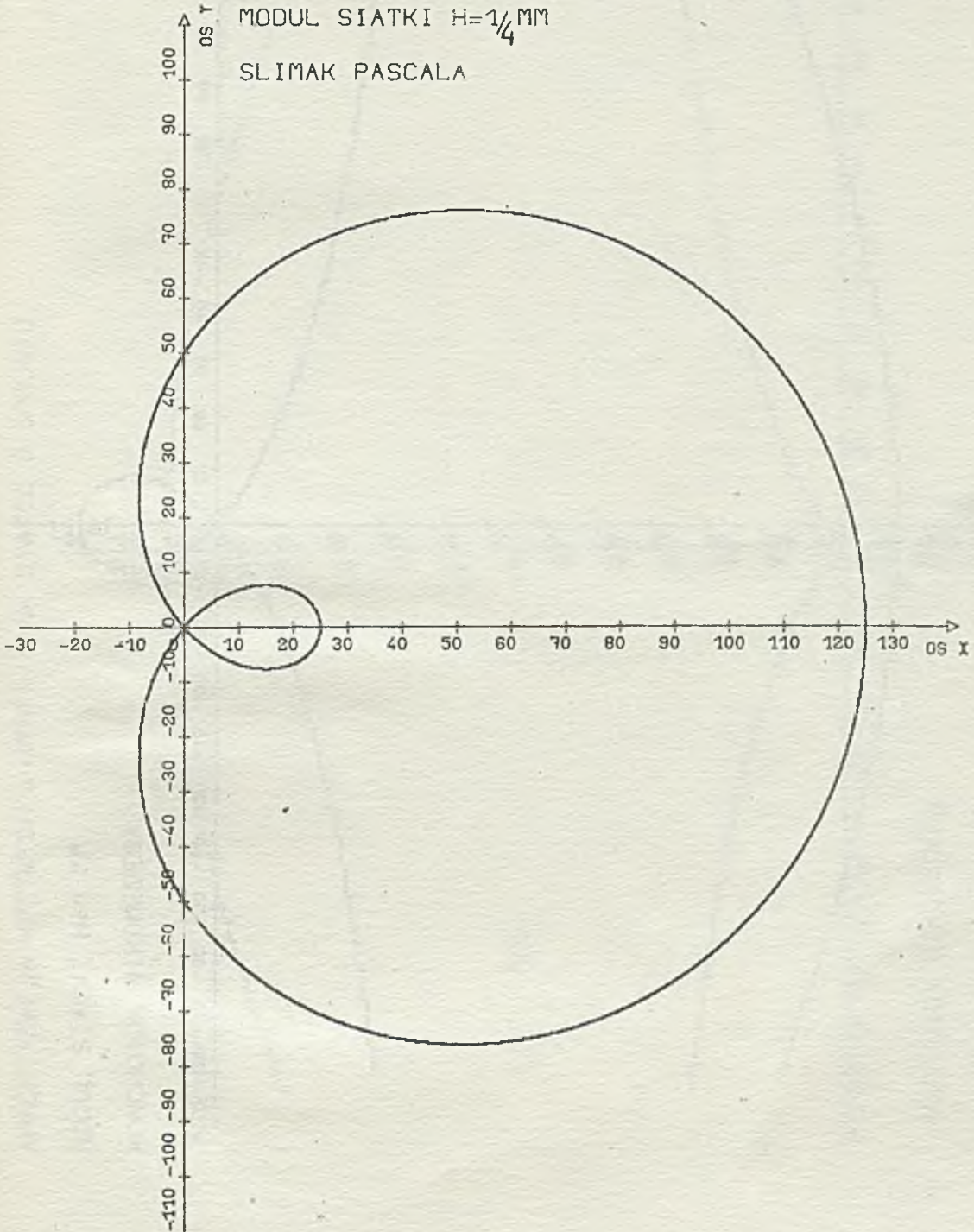
SLIMAK PASCALA



APROKSYMACJA KRZYWYCH 4-STOPNIA NA SIATCE 4-SPOJNEJ

MODUL SIATKI $H=1/4$ MM

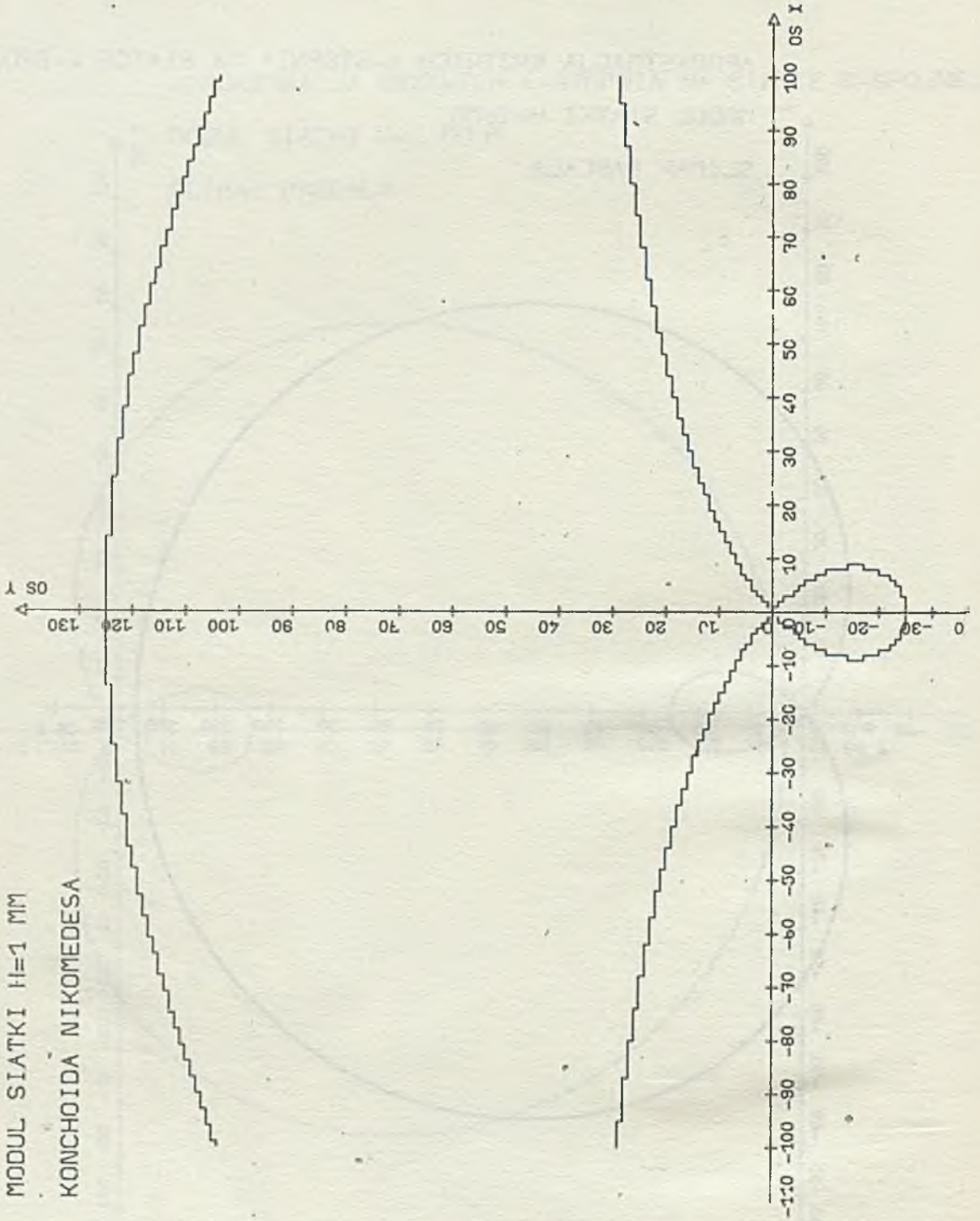
SLIMAK PASCALA



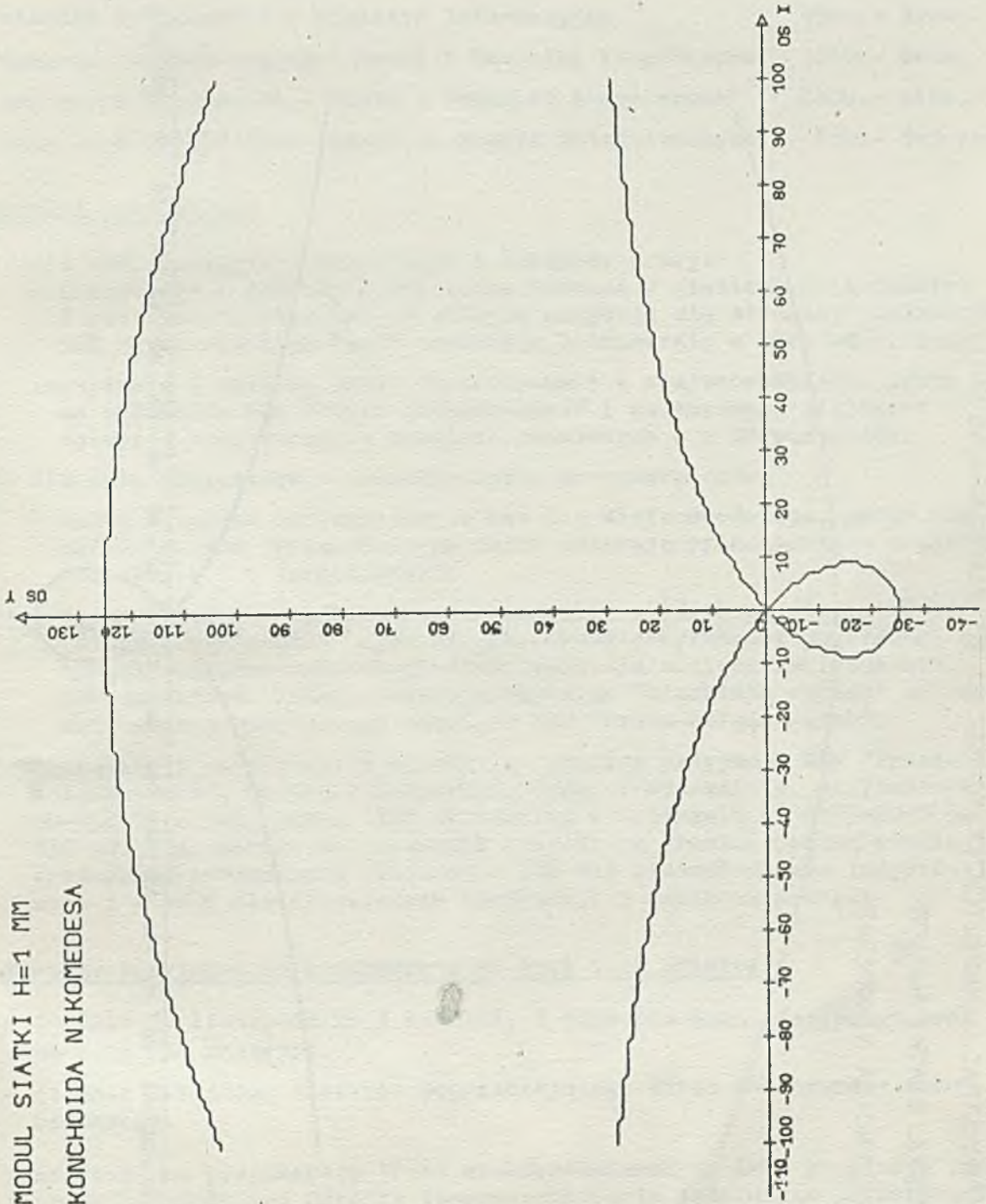
APROKSYMACJA KRZYWYCH 4-STOPNIA NA SIATCE 4-SPOJNIEJ

MODUL SIATKI $H=1$ MM

KONCHOIDA NIKOMEDESA



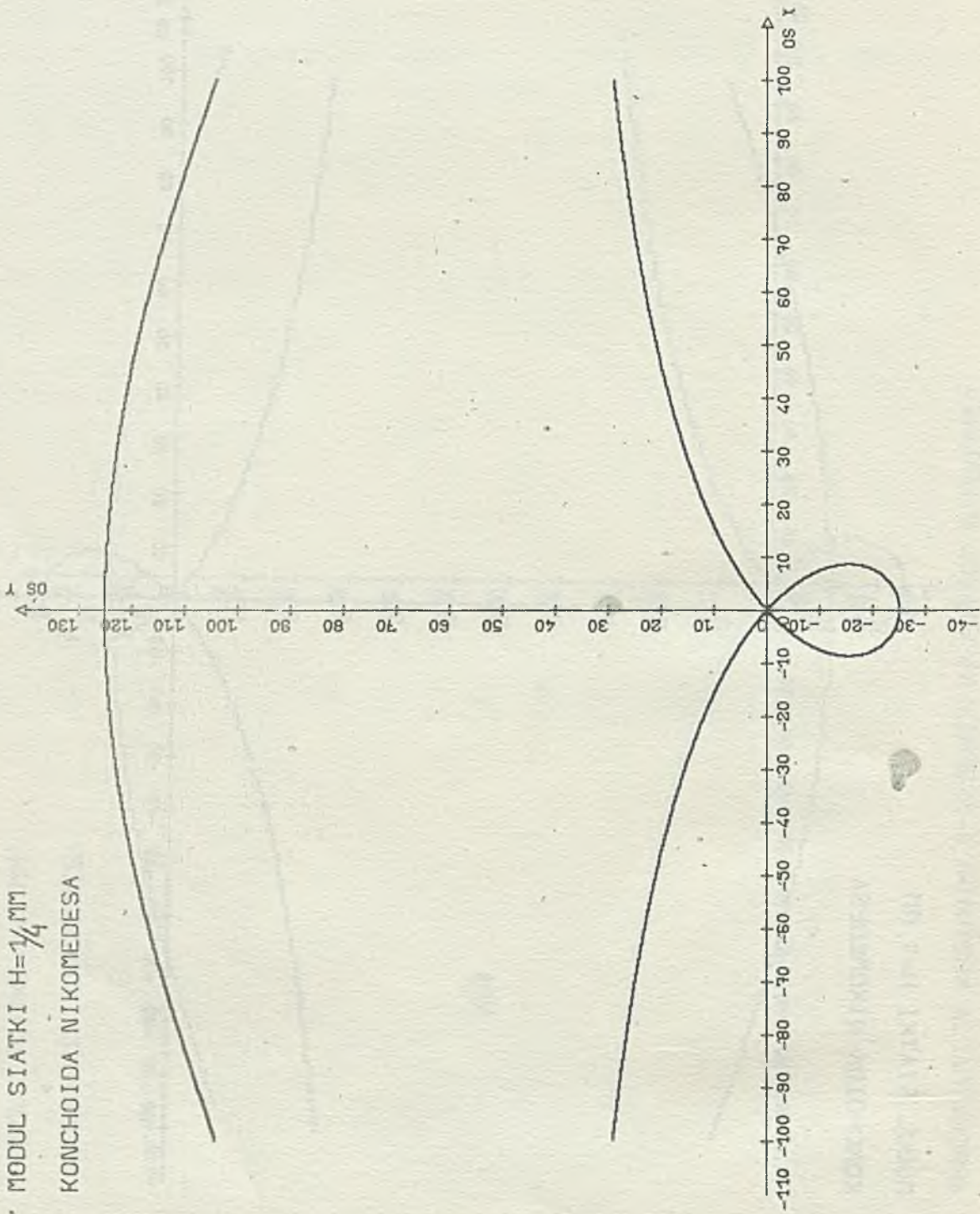
APROKSYMACJA KRZYWYCH 4--STOPNIA NA SIATCE 8-SPOJNEJ
MODUL SIATKI H=1 MM
KONCHOIDA NIKOMEDESA



APROKSYMACJA KRZYWYCH 4--STOPNIA NA SIATCE 4--SPOJNEJ

• MODUL SIATKI $H = \frac{1}{4}$ MM

KONCHOIDA NIKOMEDESA



Informacja o cenach i warunkach prenumeraty na 1984 r.
- dla czasopism Instytutu Maszyn Matematycznych

Cena prenumeraty rocznej

Techniki Komputerowe - Biuletyn Informacyjny	1560.- dwum.
Przegląd Dokumentacyjny - Nauki i Techniki Komputerowe	1260.- dwum.
Informacja Ekspresowa - Nauki i Techniki Komputerowe	2400.- mies.
Prace naukowo-badawcze Instytutu Maszyn Matematycznych	660.- 3xw roku

Warunki prenumeraty

- 1/ dla osób prawnych - instytucji i zakładów pracy:
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW "Prasa-Książka-Ruch" zamawiają prenumeratę w tych oddziałach;
 - instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW "Prasa-Książka-Ruch" i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli;
- 2/ dla osób fizycznych - indywidualnych prenumeratorów:
 - osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW "Prasa-Książka-Ruch" opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli;
 - osoby fizyczne zamieszkałe w miastach - siedzibach oddziałów RSW "Prasa-Książka-Ruch" opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając "blankietu wpłaty" na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW "Prasa-Książka-Ruch";
- 3/ Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW "Prasa-Książka-Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:

- do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz na cały rok następny,
- do dnia 1-każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Zamówienia na prenumeratę "Prac naukowo-badawczych IMM" przyjmuje Dział Sprzedaży Wysyłkowej Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, tel. 20-02-11 w. 2516. Egzemplarze pojedyncze Prac są do nabycia w księgarni ORWN PAN, Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, tel. 20-02-11 w. 2105.

Cena zł. 220.-