ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: AUTOMATYKA z. 74 Nr kol. 810

Marian Błachuta, Andrzej Ordys
Politechnika Śląska

ZWIĄZEK ALGORYTMÓW ASTRÖMA I KALMANA DLA PROBLEMU STEROWANIA MINIMALNO-WARIANCYJNEGO

Streszczenie. W referacie prezentuje się prosty dowód równoważności algorytmu Aströma z graniczną, asymptotyczną postacią algorytmu Kalmana uzyskaną przy założeniu ustalenia się macierzy kowariancji błędu filtracji dla dowolnego opóźnienia i dowolnej postaci równań stanu opisujących obiekt.

1. Wstęp

Relacja między algorytmami Aströma i Kalmana dla problemu sterowania minimalizującego wariancję wyjścia obiektu opisanego modelem CARMA jest przedmiotem badań od ponad 10 lat. Opublikowane dotychczas wyniki są jednak dalekie od ogólności. I tak Caines (1972) pokazał, że algorytm sterowania minimalno-wariancyjnego jest ekwiwalentny rozwiązaniu odpowiednio sformułowanego problemu LQG dla przypadku opóźnienia jednostkowego. Watson (1976) wprowadzając przestrzeń stanu o wysokim wymiarze uzyskał wyniki dla dowolnego opóźnienia. Ostatnio Lam (1980) posługując się opisem takim jak Caines wykazał równoważność obu algorytmów dla opóźnienia większego od 1. Wspólną cechą tych prac jest oparcie rozważań o specjalną postać równań stanu oraz duża złożoność obliczeń. W referacie prezentuje się prosty dowód równoważności algorytmu Aströma z graniczną, asymptotyczną postacią algorytmu Kalmana uzyskaną przy założeniu ustalenia się macierzy kowariancji błędu filtracji dla dowolnego opóźnienia i dowolnej postaci równań stanu opisujących obiekt.

2. Algorytm Aströma

Rozważmy obiekt liniowy, dyskretny w czasie, opisany następującą zależnością :

$$y_i = z^{-k}\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u_i + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}v_i \, , \qquad /1/$$

gdzie : y - wyjście obiektu, u - sterowanie, v - zakłócenie będące dyskretnym w czasie szumem białym gaussowskim o zerowej wartości średniej i znanej wariancji η.

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_m z^{-m}$$
$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m} \qquad /2/$$
$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_m z^{-m}$$

Przy czym wielomiany $B(z^{-1})$, $C(z^{-1})$ są stabilne, to znaczy posiadają wszystkie zera na zewnątrz okręgu jednostkowego.

Twierdzenie 1 (Aström) :

Dla obiektu /1/ algorytm sterowania optymalnego, minimalizującego wariancję sygnału wyjściowego :

$$J = E(y_{i+k})^2 \qquad /3/$$

ma postać :

$$u_i = -\frac{F(z^{-1})}{B(z^{-1})E(z^{-1})} y_i \qquad /4/$$

Wielomiany $F(z^{-1})$ i $E(z^{-1})$ związane są z równaniami obiektu zależnością :

$$\frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} = E(z^{-1}) + z^{-k}\frac{F(z^{-1})}{A(z^{-1})} \qquad /5/$$

$$E(z^{-1}) = 1 + e_1 z^{-1} + \ldots + e_{k-1} z^{-k+1}$$
$$F(z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + \ldots + f_{m-1} z^{-m+1} \quad . \qquad /6/$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że algorytm sterowania jest dany w postaci transmitancyjnej. Jest on zatem niezależny od czasu i warunków początkowych. Ponadto nie jest wymagana znajomość wariancji η. Niech i_0 będzie chwilą rozpoczęcia sterowania. Wartości wyjścia i wskaźnika jakości uzyskiwane przy zastosowaniu algorytmu /4/ zmierzają przy $i_0 \to -\infty$ asymptotycznie do wartości :

$$y_i = v_i + \sum_{j=1}^{k-1} e_j v_{i-j}$$
$$/7/$$
$$J_i = \eta(1 + \sum_{j=1}^{k-1} e_j^2)$$

3. Opis obiektu w przestrzeni stanu

Niech będzie dany liniowy obiekt dyskretny w czasie, opisany za pomocą równań w przestrzeni stanu :

równanie stanu :

$$x_{i+1} = Ax_i + bu_i + gv_i \qquad /8/$$

równanie wyjścia :

$$y_i = d^T x_i + v_i, \qquad /9/$$

gdzie: x_i -wektor stanu, u_i -sterowanie (skalarne), y_i -wyjście (skalarne), A - macierz kwadratowa o wymiarze równym wymiarowi wektora stanu ($n \times n$), b, g, d - wektory o odpowiednich wymiarach.

Dokonując transformacji Z równań /8/ i /9/ można napisać :

$$zx(z) = Ax(z) + bu(z) + gv(z) \qquad /10/$$

$$y(z) = d^T x(z) + v(z) \qquad /11/$$

Czyli :

$$y(z) = d^T(z\mathbb{1} - A)^{-1}bu(z) + \left[d^T(z\mathbb{1} - A)^{-1}g + 1\right]v(z) \qquad /12/$$

Oznaczmy :

$$d^T(z\mathbb{1} - A)^{-1}b = \frac{B(z)}{A(z)} \qquad /13/$$

$$d^T(z\mathbb{1} - A)^{-1}g + 1 = \frac{C(z)}{A(z)} \qquad /14/$$

Wówczas :

$$y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}u(z) + \frac{C(z)}{A(z)}v(z) \qquad /15/$$

Wzory /13/ i /14/ definiują więc transmitancje wyjścia odpowiednio od sterowania i zakłócenia. Przy tym :

$$B(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m$$

$$A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \qquad m \leqslant n-1$$

$$C(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n$$

Definicja 1 : Mówimy, że układ opisany równaniami /8/, /9/ ma w torze sterowania opóźnienie k jeżeli :

$$d^T b = d^T Ab = \ldots = d^T A^{k-2} b = 0 \quad \text{i} \quad d^T A^{k-1} b \neq 0 \qquad /16/$$

Komentarz : Przez k-j krotne podstawienie równania /8/ do /9/ otrzymujemy :

$$y_{i+k} = d^T A^{k-j} x_{i+j} + d^T A^{k-j-1} bu_{i+j} + \ldots + d^T bu_{i+k-1} +$$

$$+ d^T A^{k-j-1} gv_{i+j} + \ldots + d^T gv_{i+k-1} + v_{i+k} \qquad /17/$$

Warunek podany w definicji oznacza, że y_{i+k} zależy od u_{i+j} dla $j=0$, natomiast nie zależy od u_{i+j} dla $0<j\leqslant k$.

Twierdzenie 2 :

Jeśli obiekt opisany równaniami /8/ i /9/ posiada opóźnienie k i wielomian B(z) jest stopnia m, to wielomian A(z) jest stopnia m+k, czyli n=m+k.

Dowód wynika z przedstawionego komentarza.

Teraz można stwierdzić, że po wydzieleniu liczników i mianowników transmitancji równanie /15/ przez z^{-n} otrzyma się transmitancję daną równaniem /1/.

4. Wyprowadzenie algorytmu w przestrzeni stanu

Niech wskaźnik jakości dany będzie (tak jak w algorytmie Aströma) wzorem /3/.

Twierdzenie 3 :

Sterowanie minimalizujące wskaźnik jakości /3/ ma postać :

$$u_i = -\frac{1}{d^T A^{k-1} b} d^T A^{k-1}\left[(A - gd^T)\hat{x}_i + gy_i\right], \qquad /18/$$

gdzie : $\hat{x}_i = E_{/\vec{y}_i}(x_i)$ /19/

$\vec{y}_i$ oznacza tu zbiór informacji o układzie dostępnych w chwili i, $E_{/\vec{y}_i}$ oznacza operację uśredniania warunkowego.

Dowód : Zadanie minimalizacji można rozwiązać następująco :

$$\min_{u_i(\vec{y}_i)} E(y_{i+k})^2 = E \min_{u_i} E_{/\vec{y}_i}(y_{i+k})^2 \qquad /20/$$

Przesunięcie o k kroków między u_i i y_{i+k} jest konieczne ze względu na opóźnienie w obiekcie.

Oznaczmy : $\hat{y}_{i+k} = E_{/\vec{y}_i}(y_{i+k})$, $\tilde{y}_{i+k} = y_{i+k} - \hat{y}_{i+k}$ /21/

Wówczas : $\min_{u_i} E_{/\vec{y}_i}(y_{i+k})^2 = \min_{u_i}(\hat{y}_{i+k})^2 + E_{/\vec{y}_i}(\tilde{y}_{i+k})^2$ /22/

W celu wyznaczenia $\hat{y}_{i+k}$ przepiszmy równanie /17/ dla $j=0$:

$$y_{i+k} = d^T A^k x_i + d^T A^{k-1} b u_i +$$
$$+ d^T A^{k-1} g v_i + d^T A^{k-2} g v_{i+1} + \dots + d^T g v_{i+k-1} + v_{i+k} \qquad /23/$$

Zgodnie z założeniami v jest białym szumem gaussowskim o wartości średniej równej zeru. W związku z tym, na podstawie informacji dostępnej w chwili i można ocenić, że wartości oczekiwane zakłóceń we wszystkich następnych chwilach będą wynosić zero :

$$E_{/\vec{y}_i}(v_{i+1}) = E_{/\vec{y}_i}(v_{i+2}) = \dots = E_{/\vec{y}_i}(v_{i+k}) = 0 \qquad /24/$$

Natomiast wartość zakłócenia v_i można ocenić biorąc pod uwagę równanie wyjścia /9/ i wielkość y_i wchodzącą w skład zbioru dostępnych informacji :

$$E_{/\vec{y}_i}(v_i) = E_{/\vec{y}_i}(y_i - d^T x_i) = y_i - d^T \hat{x}_i \qquad /25/$$

Teraz można już napisać wzór na $\hat{y}_{i+k}$:

$$\hat{y}_{i+k} = E_{/\vec{y}_i}(y_{i+k}) = d^T A^k \hat{x}_i + d^T A^{k-1} b u_i + d^T A^{k-1} g (y_i - d^T \hat{x}_i) \qquad /26/$$

Przy tym : $d^T A^{k-1} b = b_0$ - wynika to z porównania wzorów /15/ i /23/.

Minimalną wartość wskaźnika jakości - równanie /23/ - otrzyma się dobierając tak sterowanie u_i by $\hat{y}_{i+k} = 0$. Jest to możliwe gdyż układ posiada jedno wejście, jedno wyjście oraz $b_0 \neq 0$. Tak więc :

$$0 = d^T A^k \hat{x}_i + d^T A^{k-1} b u_i + d^T A^{k-1} g (y_i - d^T \hat{x}_i) \qquad /27/$$

$$u_i = -\frac{1}{b_0} d^T A^{k-1} [(A - g d^T) \hat{x}_i + g y_i] \qquad /28/$$

Twierdzenie zostało w ten sposób udowodnione. □

5. Filtr Kalmana

Dla wyznaczenia sterowania optymalnego z równania /28/ konieczna jest znajomość oceny stanu zdefiniowanej wzorem /19/. Służy do tego filtr Kalmana, który dla rozpatrywanego w pracy problemu zostanie przedstawiony w formie twierdzenia :

Twierdzenie 4 :

Rozważmy obiekt opisany równaniami /8/, /9/. Ocena stanu wyraża się rekurencyjnym wzorem :

$$\hat{x}_{i+1/i+1} = \hat{x}_{i+1/i} + K_{i+1}(y_{i+1} - d^T\hat{x}_{i+1/i}), \qquad /29/$$

gdzie :

$$\hat{x}_{i+1/i} = (A - gd^T)\hat{x}_{i/i} + bu_i + gy_i, \qquad /30/$$

$$K_{i+1} = P_{i+1/i}d(d^TP_{i+1/i}d + \eta)^{-1}, \qquad /31/$$

$$P_{i+1/i} = (A - gd^T)P_{i/i}(A - gd^T)^T, \qquad /32/$$

$$P_{i+1/i+1} = P_{i+1/i} - K_{i+1}d^TP_{i+1/i}, \qquad /33/$$

przy czym :

$$\hat{x}_{i+1/i+1} = \hat{x}_{i+1} = E_{/\bar{y}_{i+1}}(x_{i+1}), \quad \hat{x}_{i+1/i} = E_{/\bar{y}_i}(x_{i+1}), \qquad /34/$$

$$P_{i+1/i+1} = E_{/\bar{y}_{i+1}}[(x_{i+1} - \hat{x}_{i+1})(x_{i+1} - \hat{x}_{i+1})^T], \qquad /35/$$

$$P_{i+1/i} = E_{/\bar{y}_i}[(x_{i+1} - \hat{x}_{i+1/i})(x_{i+1} - \hat{x}_{i+1/i})^T]. \qquad /36/$$

Dowód : Ponieważ w równaniu stanu /8/ i w równaniu wyjścia /9/ występuje to samo zakłócenie v_i, więc można wyliczyć je z równania wyjścia :

$$v_i = y_i - d^Tx_i \qquad /37/$$

i wstawić do równania stanu :

$$x_{i+1} = (A - gd^T)x_i + bu_i + gy_i \qquad /38/$$

Zastosowanie teraz klasycznych wzorów filtru Kalmana [5] prowadzi do równań /29/ - /36/. □

Zostaną teraz podane pewne asymptotyczne własności filtru Kalmana udowodnione przez Cainesa [3].

Twierdzenie 5 (Caines) :

Niech bieżąca chwila ma numer i, a pierwsza chwila działania algorytmu filtracji numer i-n. Załóżmy, że filtr jest stabilny, to znaczy wielomian :

$$C(z) = \det(z\mathbb{1} - A + gd^T) \qquad /39/$$

posiada wszystkie zera wewnątrz koła jednostkowego. Wówczas :

$$\lim_{n\to\infty} \hat{x}_{i+1/i+1} = \hat{x}_{i+1/i} = (A - gd^T)\hat{x}_i + bu_i + gy_i \quad . \qquad /40/$$

Wzór ten określa rekurencyjne równanie na ocenę stanu po nieskończenie długim czasie działania filtru - po ustaleniu się jego parametrów. Ocena przy filtracji jest wówczas równa ocenie przy jednokrokowej predykcji.

Po dokonaniu transformacji Z równania /40/ mamy :

$$z\hat{x}(z) = (A - gd^T)\hat{x}(z) + bu(z) + gy(z) \qquad /41/$$

Ostatecznie poszukiwana ocena $\hat{x}$ wyraża się wzorem :

$$\hat{x}(z) = [z\mathbb{1} - (A - gd^T)]^{-1}[bu(z) + gy(z)] \qquad /42/$$

6. Przekształcenie algorytmu do postaci transmitancyjnej

Podamy teraz główny wynik pracy w postaci twierdzenia :

Twierdzenie 6 :

Algorytm sterowania optymalnego dany równaniem /18/, w którym ocena stanu pochodzi z "ustalonego filtru Kalmana" - równanie /40/ - jest równoważny algorytmowi Aströma - równanie /4/.

Dowód : Równanie /18/ po transformacji Z ma postać :

$$u(z) = -\frac{1}{d^TA^{k-1}b}\, d^TA^{k-1}[(A - gd^T)\hat{x}(z) + gy(z)] \qquad /43/$$

Po wstawieniu w miejsce $\hat{x}(z)$ równania /42/ otrzymuje się :

$$d^TA^{k-1}bu(z) = -d^TA^{k-1}gy(z) - d^TA^{k-1}(A - gd^T)(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1}bu(z) -$$

$$- d^TA^{k-1}(A - gd^T)(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1}gy(z) \qquad /44/$$

co po prostych przekształceniach daje :

$$\frac{u(z)}{y(z)} = -\frac{d^TA^{k-1}(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1}g}{d^TA^{k-1}(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1}b} \qquad /45/$$

Obliczenie wyrażenia $d^TA^{k-1}(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1}g$:

$$(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1} = (z\mathbb{1} - A)^{-1}[\mathbb{1} + gd^T(z\mathbb{1} - A)^{-1}]^{-1} \qquad /46/$$

$$[\mathbb{1} + gd^T(z\mathbb{1} - A)^{-1}]g = g[1 + d^T(z\mathbb{1} - A)^{-1}g] = g\,\frac{C(z)}{A(z)} \qquad /47/$$

(na podstawie równania /14/). Stąd :

$$[\mathbb{1} + gd^T(z\mathbb{1} - A)^{-1}]^{-1}g = \frac{A(z)}{C(z)}g \qquad /48/$$

Skorzystamy teraz z tożsamości macierzowej :

$$A^{k-1}(z\mathbb{1} - A)^{-1} = z^{k-1}(z\mathbb{1} - A)^{-1} - (z^{k-2}\mathbb{1} + z^{k-3}A + \ldots + A^{k-2}) \qquad /49/$$

W takim razie :

$$d^T A^{k-1}(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1}g = \frac{z^{k-1}C(z) - E(z)A(z)}{C(z)}, \qquad /50/$$

gdzie : $E(z) = z^{k-1} + z^{k-2}d^Tg + z^{k-3}d^TAg + \ldots + d^TA^{k-2}g =$

$$= z^{k-1} + e_1 z^{k-2} + e_2 z^{k-3} + \ldots + e_{k-1} \qquad /51/$$

Obliczenie wyrażenia $d^TA^{k-1}(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1}b$:

Tak jak poprzednio korzystamy z tożsamości /46/. Następnie obliczamy :

$$[\mathbb{1} + gd^T(z\mathbb{1} - A)^{-1}]b = b + g\frac{B(z)}{A(z)} \qquad /52/$$

stąd, po uwzględnieniu wzoru /48/, mamy :

$$[\mathbb{1} + gd^T(z\mathbb{1} - A)^{-1}]^{-1}b = b - g\frac{B(z)}{C(z)} \qquad /53/$$

W takim razie :

$$d^TA^{k-1}(z\mathbb{1} - A + gd^T)^{-1}b = \frac{B(z)E(z)}{C(z)} \qquad /54/$$

Korzystając ze wzorów /50/ i /54/ można napisać :

$$\frac{u(z)}{y(z)} = -\frac{z^{k-1}C(z) - E(z)A(z)}{B(z)E(z)} \qquad /55/$$

Oznaczmy : $F(z) = z^{k-1}C(z) - E(z)A(z)$ /56/

Można pokazać, że jeżeli $E(z)$ dane jest wzorem /51/ a stopień wielomianu $A(z)$ wynosi n, to $F(z)$ jest stopnia n-1. Mamy więc :

$$\frac{u(z)}{y(z)} = -\frac{F(z)}{B(z)E(z)} \qquad /57/$$

Wydzielmy licznik i mianownik prawej strony równania /57/ przez z^{n-1} :

$$\frac{u(z^{-1})}{y(z^{-1})} = -\frac{F'(z^{-1})}{B'(z^{-1})E'(z^{-1})} \qquad /58/$$

Wzory na F' i E' otrzymamy dzieląc równanie /56/ stronami przez z^{n+k-1} :

$$z^{-k}F'(z^{-1}) = C'(z^{-1}) - E'(z^{-1})A'(z^{-1}) \qquad /59/$$

I wreszcie w równaniu obiektu /15/ wydzielmy liczniki i mianownik przez z^n:

$$y(z^{-1}) = z^{-k}\frac{B'(z^{-1})}{A'(z^{-1})}u(z^{-1}) + \frac{C'(z^{-1})}{A'(z^{-1})}v(z^{-1}) \qquad /60/$$

Wzory /58/ - /60/ są wzorami z klasycznego algorytmu Aströma. W ten sposób teza twierdzenia została wykazana. □

7. Warunki stabilności układu

Obiekt regulacji opisany jest równaniami /8/, /9/, natomiast algorytm sterowania równaniami /18/, /40/. Po podstawieniu /9/ do /40/ i /18/, a następnie /18/ do /8/ i /40/ otrzymujemy :

$$x_{i+1} = (A - b\frac{e_k}{b_0}d^T)x_i - \frac{1}{b_0}bd^TA^{k-1}(A - gd^T)\hat{x}_i + (g - b\frac{e_k}{b_0})v_i \qquad /61/$$

$$\hat{x}_{i+1} = (g - b\frac{e_k}{b_0})d^Tx_i + \left[(A - gd^T) - \frac{1}{b_0}bd^TA^{k-1}(A - gd^T)\right]\hat{x}_i + (g - b\frac{e_k}{b_0})v_i, \qquad /62/$$

gdzie : $e_k = d^TA^{k-1}g$, poza tym pamiętamy, że : $b_0 = d^TA^{k-1}b$.

Równania /61/ i /62/ można zapisać w postaci :

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ \hat{x}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i \\ \hat{x}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(g - \frac{e_k}{b_0}b)v_i, \qquad /63/$$

gdzie :

$$A_1 = A - \frac{e_k}{b_0}bd^T$$

$$A_2 = -\frac{1}{b_0}bd^TA^{k-1}(A - gd^T) \qquad /64/$$

$$A_3 = (g - \frac{e_k}{b_0}b)d^T$$

$$A_4 = \left[1 - \frac{1}{b_0}bd^TA^{k-1}\right](A - gd^T)$$

Na podstawie wzoru /63/ można napisać równanie charakterystyczne układu. Ma ono postać :

$$0 = \det\begin{bmatrix} z\mathbb{1} - A_1 & -A_2 \\ -A_3 & z\mathbb{1} - A_4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} z\mathbb{1} - A_1 + A_3 & -z\mathbb{1} + A_4 - A_2 \\ -A_3 & z\mathbb{1} - A_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} z\mathbb{1} - A_1 + A_3 & -z\mathbb{1} + A_4 - A_2 \\ 0 & A_3(z\mathbb{1} - A_1 + A_3)^{-1}\cdot(-z\mathbb{1} + A_4 - A_2) + z\mathbb{1} - A_4 \end{bmatrix} \qquad /65/$$

$$z\mathbb{1} - A_1 + A_3 = z\mathbb{1} - (A - gd^T) \qquad /66/$$

$$z\mathbb{1} - A_4 + A_2 = z\mathbb{1} - (A - gd^T) \qquad /67/$$

Równanie charakterystyczne przyjmuje więc formę :

$$0 = \det\begin{bmatrix} z\mathbb{1} - A_1 + A_3 & -z\mathbb{1} + A_4 - A_2 \\ 0 & -A_3 - A_4 + z\mathbb{1} \end{bmatrix} =$$

$$= \det(z\mathbb{1} - A_1 + A_3)\cdot\det(z\mathbb{1} - A_3 - A_4) \qquad /68/$$

$$z\mathbb{1} - A_3 - A_4 = z\mathbb{1} - A + \frac{1}{b_0}bd^TA^k = (z\mathbb{1} - A)\left[\mathbb{1} + \frac{1}{b_0}(z\mathbb{1} - A)^{-1}bd^TA^k\right] \qquad /69/$$

Korzystając ze znanej tożsamości wyznacznikowej oraz /13/, /16/, /49/ można napisać :

$$\det(z\mathbb{1} - A)\left[\mathbb{1} + \frac{1}{b_0}(z\mathbb{1} - A)^{-1}bd^TA^k\right] = 1 + \frac{1}{b_0}d^TA^k(z\mathbb{1} - A)^{-1}b \times$$

$$\times\det(z\mathbb{1} - A) = A(z)\left\{1 + \frac{1}{b_0}d^T\left[z^k(z\mathbb{1} - A)^{-1} - (z^{k-1}\mathbb{1} + \ldots + A^{k-1})\right]b\right\} =$$

$$= A(z)\frac{z^kB(z)}{b_0A(z)} = \frac{1}{b_0}z^kB(z) \qquad /70/$$

Ze wzorów /46/ - /48/ wynika, że :

$$\det(z\mathbb{1} - A + gd^T) = C(z) \qquad /71/$$

Ostatecznie więc równanie charakterystyczne ma postać :

$$\frac{1}{b_0}z^kB(z)\cdot C(z) = 0 \qquad /72/$$

i warunkiem stabilności układu jest stabilność każdego z wielomianów B(z) i C(z). Wynik ten był znany intuicyjnie, równanie charakterystyczne /72/ stanowi jego matematyczne uzasadnienie.

8. Sygnał wyjściowy

Twierdzenie 7 :

Po zastosowaniu algorytmu optymalnego sterowania opisanego wzorem /18/, przy czym korzysta się z oceny stanu pochodzącej z ustalonego filtru Kalmana (równanie /40/) uzyskuje się następującą zależność wyjścia obiektu od zakłócenia i od warunków początkowych :

$$y(z) = \frac{d^T(z^{k-1}\mathbb{1} + z^{k-2}A + \ldots + A^{k-1})}{z^k}\hat{x}_0 +$$

$$+ \left(1 + \frac{E(z)}{z^{k-1}}\right)\frac{d^T \operatorname{adj}(z\mathbb{1} - A)}{C(z)}\tilde{x}_0 + \frac{E(z)}{z^{k-1}}v(z), \qquad /73/$$

gdzie : $\tilde{x}_0 = x_0 - \hat{x}_0$

Dowód polega na wyliczeniu y(z) z równań /8/, /9/, /18/, /40/.

Komentarz :

Pierwszy i drugi składnik w tym wzorze reprezentują zależność wyjścia od warunków początkowych. Przy tym pierwszy składnik pokazuje, jak zależy wyjście od przyjętej w równaniach filtru Kalmana początkowej oceny stanu $\hat{x}_0$. Warto zauważyć, że składnik ten zanika po k krokach. Drugi składnik pokazuje zależność wyjścia od różnicy między przyjętą oceną stanu początkowego i faktycznym stanem początkowym. Składnik ten zanika w nieskończoności jeśli układ jest stabilny. Trzeci składnik reprezentuje zakłócenia, które pojawiły się w układzie między chwilą zadziałania sterowania a chwilą wygenerowania przez układ odpowiedzi i w związku z tym nie mogły zostać skompensowane. Zauważmy, że uwzględniając tylko ten ostatni składnik otrzymamy wartość wskaźnika jakości i wyjścia taką jak we wzorze /7/. Jest to wartość asymptotyczna - po zaniknięciu wpływu $\hat{x}_0$ oraz $\tilde{x}_0$. Istnieje ona tylko przy założeniu stabilności wielomianu C(z).

9. Zakończenie

W pracy przedstawiono - dla najbardziej ogólnego przypadku - związki między opisem transmitancyjnym i korzystającym z tego opisu algorytmem sterowania Aströma, a opisem za pomocą równań stanu. Okazuje się, że algorytm Aströma jest równoważny pewnemu szczególnemu problemowi sterowania optymalnego w przestrzeni stanu. Chodzi tu mianowicie o sterowanie optymalne w "stanie ustalonym", to znaczy po zaniknięciu wpływu warunków początkowych.

Prowadzenie rozważań w przestrzeni stanu pozwoliło na pokazanie, co dzieje się w przypadku, gdy algorytm ten działa w chwilach, w których wpływ warunków początkowych jeszcze istnieje. Ma to duże znaczenie przy analizie, tzw. "regulatorów samonastrajających". Wówczas sterowanie dane wzorem /18/ nie będzie optymalne, jeśli jako ocenę stanu przyjmiemy ustalone rozwiązanie z filtru Kalmana. Rozwiązanie optymalne można by otrzymać stosując "nieustalony" filtr. Różnice w wartościach sygnału wyjściowego będą występować do momentu zaniku wpływu warunków początkowych.

Celowość badania własności algorytmu Aströma wynika z prostoty jego numerycznej realizacji. Sprawia to, że może on być stosowany, z użyciem mikroprocesora, do sterowania wycinkiem procesu w ciągu operacji technologicznych.

LITERATURA

[1] Aström K. J. (1970) Introduction to stochastic control theory, Academic Press.

[2] Aström K. J. (1977) Stochastic control problems, Proc. Canberra Australia, Springer Verlag.

[3] Caines P. E. (1972) Relationship between Box-Jenkins-Aström control laws and Kalman linear regulator, Proc. IEE 119 No 5.

[4] Lam K. P. (1980) Implicit and explicit self-tuning regulators, Ph. D. thesis Univ. of Oxford Dept. of Eng. Science.

[5] Meditch J. S. (1975) Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych, WNT, Warszawa.

[6] Watson W. (1976) Box-Jenkins-Aström and Kalman linear control laws and their equivalence, Proc. IEE 123 No 4.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Tadeusz Kaczorek
Wpłynęło do Redakcji do 30.03.1984r.

СВЯЗЬ АЛГОРИТМОВ АШТРЕМА И КАЛЬМАНА В ПРОБЛЕМЕ МИНИМАЛЬНО - ВАРИАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Р е з ю м е

В работе предложено простое доказательство соответствия алгоритма Аштрема предельному асимптотическому виду алгоритма Кальмана, полученного при условии постоянства ковариационной матрицы ошибок фильтрации для любого запаздывания и любого вида уравнений состояния описывающих объект.

RELATIONSHIP BETWEEN ASTRÖM AND KALMAN ALGORITHMS FOR MINIMAL - VARIANCE CONTROL PROBLEM

S u m m a r y

A simple proof of the equivalence between the Aströmalgorithm and the asymptotic version of Kalman algorithm is presented. An arbitrary form of state equations describing a plant and an arbitrary time delay are considered and the steady state of the covariance matrix for filter error is assumed.