ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: AUTOMATYKA z. 74 Nr kol. 810

Józef Grabowski, Eugeniusz Nowicki,
Czesław Smutnicki, Stanisław Zdrzałka
Politechnika Wrocławska

BIBLIOTEKA PROCEDUR OPTYMALIZACJI DLA ZAGADNIEŃ KOLEJNOŚCIOWYCH. CZ. I - KLASYFIKACJA, WŁASNOŚCI I ALGORYTMY

Streszczenie. W artykule przedstawiono zakres merytoryczny opracowywanej biblioteki procedur optymalizacji dla zagadnień kolejnościowych, będącej wynikiem realizacji podproblemu resortowego R.I.21.01. Zaprezentowano także klasyfikację zagadnień kolejnościowych oraz podstawowe własności zagadnień, związane z podejściem blokowym, stosowane przy konstrukcji algorytmów dla poszczególnych klas zagadnień.

1. Wstęp

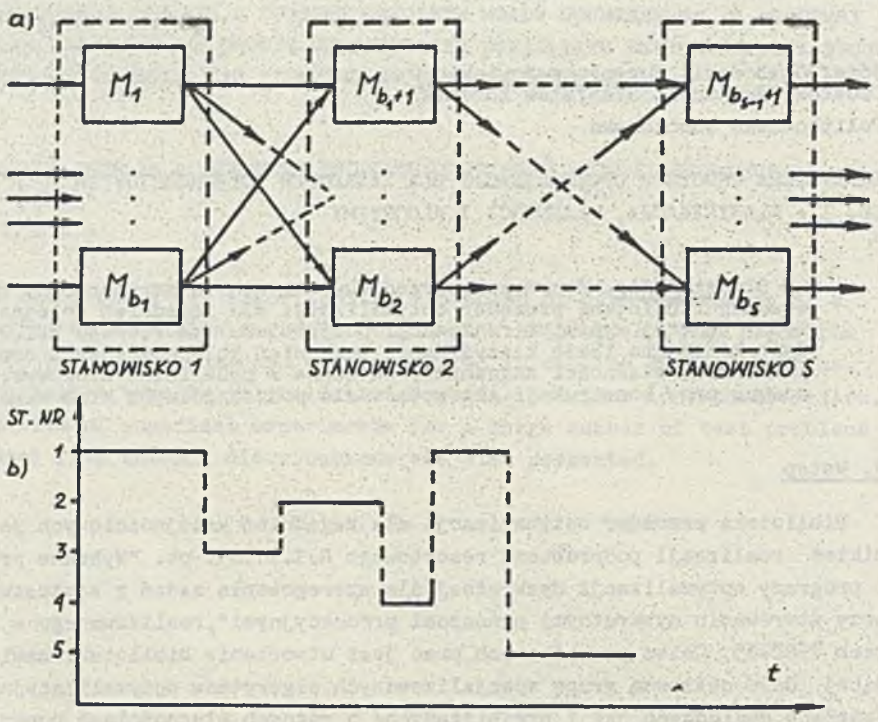
Biblioteka procedur optymalizacji dla zagadnień kolejnościowych jest wynikiem realizacji podproblemu resortowego R.I.21.01. pt. "Wybrane problemy i programy optymalizacji dyskretnej dla szeregowania zadań z zastosowaniem przy sterowaniu dyskretnymi procesami produkcyjnymi", realizowanego w latach 1982-85. Celem prowadzonych prac jest utworzenie biblioteki zawierającej dość obszerną grupę specjalizowanych algorytmów optymalizacyjnych /zarówno dokładnych jak i przybliżonych/ o różnych własnościach numerycznych, przeznaczonych do rozwiązywania typowych zagadnień związanych z szeregowaniem zadań, występujących w różnych gałęziach przemysłu /maszynowy, hutniczy, budowlany/ i/lub w transporcie (rys. 1.1).

Algorytmy są konstruowane głównie w oparciu o prace własne autorów z uwzględnieniem najnowszych metod rozwiązywania zagadnień kolejnościowych.

2. Pojęcia podstawowe

Charakterystyka zagadnień będących przedmiotem opracowania wymaga wprowadzenia następujących pojęć podstawowych.

Dany jest zbiór zadań $J = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ reprezentujący zadanie produkcyjne oraz zbiór maszyn $M = \{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$, które są przeznaczone do wykonywania wszystkich zadań. Każde zadanie J_i składa się z ciągu n_i operacji $J_i = \langle O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, O_{in_i} \rangle$ wykonywanych w podanej kolejności, tj. $O_{ik-1} \prec O_{ik} \prec O_{ik+1}$, $k=\overline{2,n_i-1}$. Dla każdego zadania $J_i \in J$ określony jest ciąg ν_i indeksów maszyn, $\nu_i = \langle \nu_i^1, \nu_i^2, \ldots, \nu_i^n \rangle$, będący marszrutą technologiczną zadania. Pojedyncza operacja O_{ik} odpowiada czynności wykonywanej na maszynie $M_{\nu_i k}$ w czasie $p_{ik} \geqslant 0$, $k=\overline{1,n_i}$, $i=\overline{1,n}$. Zatem całe zadanie produkcyjne możemy przedstawić w postaci grafu $Z = \langle N, RT \rangle$, gdzie



Rys. 1.1 /a/ System produkcyjny /stanowiska maszyn $M_1, M_2, \ldots$,
/b/ Diagram czasowy zadania produkcyjnego /marszruta technologiczna/

$$N = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{n_i} \{O_{ik}\} \quad , \quad RT = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{n_i-1} \{\langle O_{ik}, O_{ik+1}\rangle\}$$

Zadanie optymalizacji polega na ustaleniu takiej dopuszczalnej kolejności wykonywania zadań na poszczególnych maszynach, aby przyjęta funkcja celu osiągnęła wartość optymalną.

W zagadnieniach kolejnościowych spotyka się szereg typowych postaci funkcji celu. W celu ich bliższego scharakteryzowania wprowadzono dodatkowe oznaczenia dla następujących wielkości:

S_i - termin rozpoczęcia wykonywania zadania J_i,
C_i - termin zakończenia wykonywania zadania J_i,
p_{ik} - czas wykonywania operacji O_{ik},
r_i - najwcześniejszy możliwy termin rozpoczęcia wykonywania zadania J_i,
d_i - najpóźniejszy możliwy termin zakończenia wykonywania zadania J_i,
$L_i = C_i - d_i$ - nieterminowość zadania J_i,
$T_i = \max[0, C_i - d_i]$ - spóźnienie zadania J_i,

$E_i = \max[0, r_i - S_i]$ - przyspieszenie zadania J_i,
w_i - współczynnik wagowy zadania J_i,
$f_i(t)$, $g_i(t)$ - niemalejąca funkcja reprezentująca koszt związany z wykonywaniem zadania.

Uwzględniając powyższe oznaczenia możemy wyróżnić dwie główne grupy funkcji kryterialnych

/a/ $H_{max} = \max\left[\max_{1 \leq i \leq n} f_i(T_i), \max_{1 \leq i \leq n} g_i(E_i)\right]$

/b/ $\sum H_i = \sum_{i=1}^{n} \left[f_i(T_i) + g_i(E_i)\right]$.

W zależności od postaci funkcji $f_i(t)$, $g_i(t)$ otrzymamy szereg szczególnych funkcji kryterialnych.

/i/ kryteria związane z terminem zakończenia wykonywania zadań:

$$C_{max} = \max_{1 \leq i \leq n} C_i, \qquad \sum w_i C_i = \sum_{i=1}^{n} w_i C_i,$$

$$\bar{C} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} C_i,$$

/ii/ kryteria związane z maksymalną nieterminowością wykonywania zadań:

$$L_{max} = \max_{1 \leq i \leq n} L_i, \qquad \sum w_i L_i = \sum_{i=1}^{n} w_i L_i,$$

$$\bar{L} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} L_i,$$

/iii/ kryteria związane z maksymalnym spóźnieniem w wykonywaniu zadań:

$$T_{max} = \max_{1 \leq i \leq n} T_i, \qquad \sum w_i T_i = \sum_{i=1}^{n} w_i T_i,$$

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_i.$$

Uwzględniając równoważność pewnych kryteriów optymalizacji [1], [4] możemy stwierdzić, że wystarcza rozważać zagadnienia z następującymi funkcjami celu.

/1/ C_{max}
/2/ L_{max}
/3/ $\sum C_i$
/4/ $\sum w_i C_i$
/5/ $\sum T_i$
/6/ $\sum w_i T_i$
/7/ $f_{max} = \max_{1 \leq i \leq n} f_i(C_i)$
/8/ $h_{max} = \max_{1 \leq i \leq n} \max\left[f_i(T_i), g_i(E_i)\right]$
/9/ $\sum h_i = \sum_{i=1}^{n} \left[f_i(T_i) + g_i(E_i)\right]$

Dodatkowo funkcja celu C_{max} zapewnia maksymalny stopień wykorzystania maszyn oraz minimalizuje czas przestojów maszyn.

Wszystkie zagadnienia kolejnościowe występujące w praktyce można przedstawić w postaci symbolicznego zapisu:

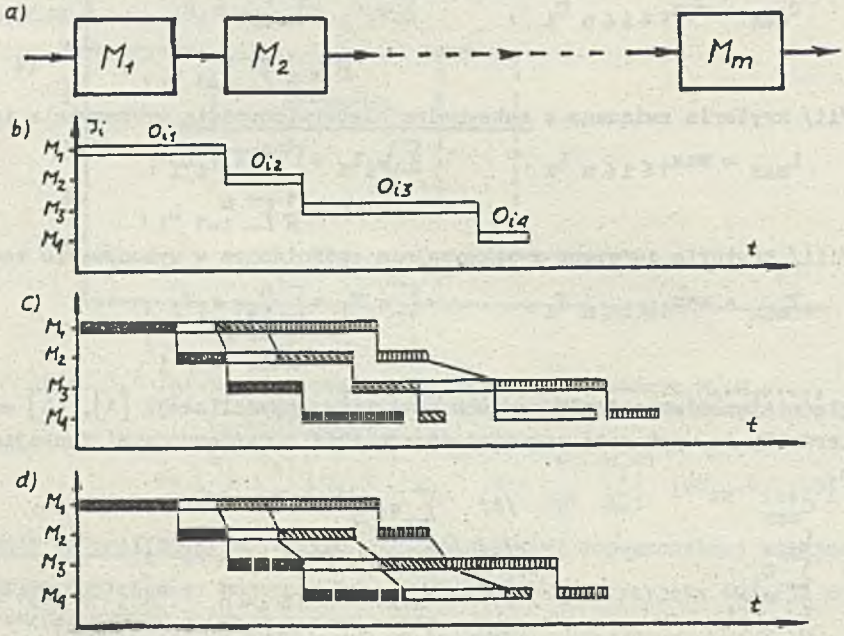
$$\alpha \,|\, \beta \,|\, \gamma, \Gamma \,|\, \delta,$$

gdzie α - liczba zadań,
β - liczba maszyn,
γ - typ systemu produkcyjnego $\gamma \in \{F, P, G, I\}$,

Γ - informacja określająca istnienie dodatkowych założeń i ograniczeń,
δ - postać funkcji celu.

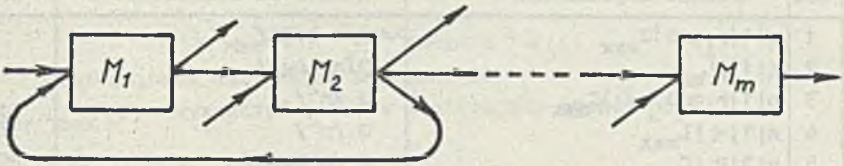
Wyróżniono następujące typy systemów produkcyjnych:

- F /lub P/ - system taśmowy /flow-shop/, w którym $n_i=m$, $\nu_i=\langle 1,2,\ldots,m\rangle$ $i=\overline{1,n}$, rys. 3.1. Jeżeli poszukiwana jest kolejność wykonywania zadań jednakowa na wszystkich maszynach mówimy o permutacyjnym zagadnieniu taśmowym (P) , rys. 3.1 d/, posiadającym n! rozwiązań dopuszczalnych; w przeciwnym przypadku mówimy o niepermutacyjnym zagadnieniu taśmowym (F) , rys. 3.1 c/ posiadającym $(n!)^m$ rozwiązań dopuszczalnych.



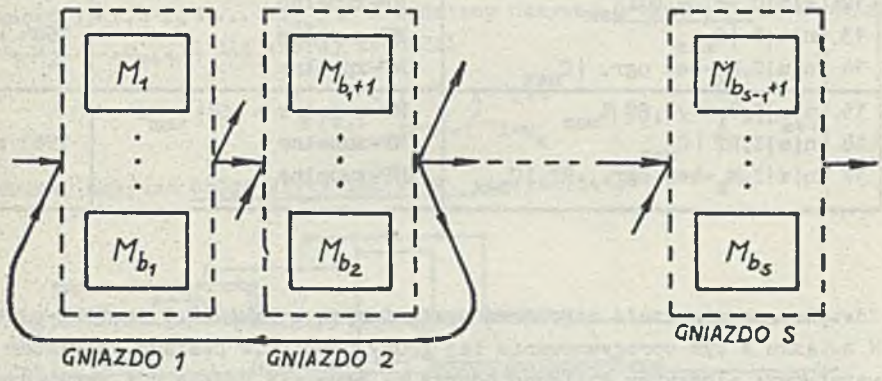
Rys. 3.1 /a/ Struktura systemu taśmowego
/b/ Marszruta pojedynczego zadania
/c/ Diagram Gantta dla niepermutacyjnego zagadnienia taśmowego
/d/ Diagram Gantta permutacyjnego zagadnienia taśmowego

- G - system gniazdowy, w którym n_i oraz ν_i mogą być różne dla różnych zadań, rys. 3.2



Rys. 3.2. Struktura systemu gniazdowego. Przykładową marszrutę przedstawiono na rys. 1.1 b/.

- I - system gniazdowy z równoległymi maszynami, tzn. taki system gniazdowy, w którym operacja może być wykonywana zamiennie na jednej z maszyn tego samego typu, rys. 3.3



Rys. 3.3. Struktura systemu gniazdowego z równoległymi maszynami.

4. Zakres merytoryczny biblioteki

Spośród dość licznej klasy praktycznych problemów kolejnościowych do opracowania wybrano zagadnienia o charakterze uniwersalnym /i jednocześnie podstawowym/ występujące najczęściej w praktyce. Zastosowania wybranych zagadnień kolejnościowych są związane z szeregowaniem zadań w dyskretnych procesach produkcyjnych z uwzględnieniem ewentualnego występowania wąskich gardeł. Taki wybór problemów kolejnościowych pozwala na wykorzystanie skonstruowanych procedur bezpośrednio /lub po niewielkich modyfikacjach/ oraz uelastycznia możliwości zastosowań przy sterowaniu procesami produkcyjnymi.

Specyfikacja zagadnień będących przedmiotem opracowania została przedstawiona w Tabl. 4.1.

Tablica 4.1

Specyfikacja zagadnień będących przedmiotem opracowania

Lp.	Postać zagadnienia	Złożoność obliczeniowa	Uwagi
1	$n\|1\|r_i \geq 0\|C_{max}$	O/n logn/	
2	$n\|1\|\|L_{max}$	O/n logn/	
3	$n\|1\|r_i \geq 0, \prec \|C_{max}$	O /n^2/	
4	$n\|1\|\prec \|L_{max}$	O /n^2/	1982 r.
5	$n\|2\|P \|C_{max}$	O /n logn/	
6	$n\|3\|P,M_2$ - bez ogr.$\|C_{max}$	O /n logn/	
7	$n\|1\|\|f_{max}$	O /n logn/	
8	$n\|1\|\|\sum w_i C_i$	O /n logn/	
9	$n\|1\|r_i \geq 0 \|L_{max}$	NP-zupełne	
10	$n\|m\|P,r_i \geq 0\|L_{max}$	NP-zupełne	1983 r.
11	$n\|m\|P \|C_{max}$	NP-zupełne	
12	$n\|m\|G, r_i \geq 0\|L_{max}$	NP-zupełne	
13	$n\|m\|G \|C_{max}$	NP-zupełne	1984 r.
14	$n\|m\|G,M_k$-bez ogr. $\|C_{max}$	NP-zppełne	
15	$n\|m\|I,r_i \geq 0,RT\|L_{max}$	NP-zupełne	
16	$n\|m\|I,RT \|C_{max}$	NP-zupełne	1985 r.
17	$n\|m\|I,M_k$-bez ogr., RT $\|C_{max}$	NP-zupełne	

Zdecydowana większość zagadnień wymienionych w Tabl. 4.1 jest NP-zupełna. W związku z tym oprogramowanie tej grupy problemów posiada charakter dwuwarstwowy: algorytmy dokładne oparte na metodzie podziału i ograniczeń, algorytmy heurystyczne; algorytmy heurystyczne proponuje się jako alternatywę algorytmów dokładnych, która może znaleźć zastosowanie szczególnie tam gdzie czasy obliczeń odgrywają istotną rolę.

5. Podstawowe własności zagadnień

Przy opracowywaniu biblioteki algorytmów szczególny nacisk położono na efektywne rozwiązanie problemów najtrudniejszych, NP-zupełnych. W wyniku analizy możliwych metod rozwiązywania zastosowano w algorytmach schemat podziału i ograniczeń. Podstawy teoretyczne oparto na podejściu blokowym. Podejście to jest najnowsze i dla rozważanej klasy problemów jest ono korzystniejsze od podejść opartych na tzw. planach aktywnych [3], [6]. Ogólną ideę podejścia blokowego przedstawimy na przykładzie zagadnienia postaci $n|m|P,r_i \geq 0|L_{max}$ [1], [3]. Ze sformułowania zagadnienia /rozdz. 3/ wynika, że należy wyznaczyć permutację indeksów zadań $\pi^* = \langle \pi^*(1), \pi^*(2), \ldots, \pi^*(n) \rangle$, spełniającą warunek

$$L_{max}(\pi^*) = \min_{\pi \in \Pi} L_{max}(\pi),$$

gdzie $$L_{max}(\pi) = \max_{1 \le i \le n} L_{\pi(i)}$$

oraz Π jest zbiorem wszystkich permutacji.

Wartość $L_{max}(\pi)$ wyznaczyć można w następujący sposób [3].

Własność 5.1

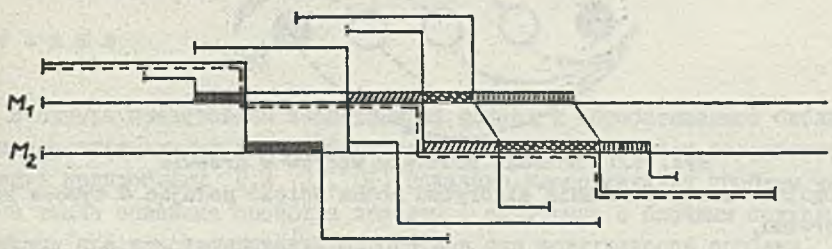
Niech $\pi \in \Pi$ będzie dowolną permutacją. Wówczas zachodzi

$$L_{max}(\pi) = \max_{1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_{m+1} \le n} \left(r_{\pi(i_1)} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=i_k}^{i_{k+1}} p_{\pi(i)k} - d_{\pi(i_{m+1})} \right)$$

Konsekwencją własności 5.1 jest pojęcie drogi oraz drogi krytycznej w π. Każdy ciąg liczb całkowitych $\langle i_1, i_2, \ldots, i_{m+1} \rangle$ spełniających nierówność $1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_{m+1} \le n$ będziemy nazywać <u>drogą w π</u>, zaś drogę $\langle u_1, u_2, \ldots, u_{m+1} \rangle$, dla której zachodzi

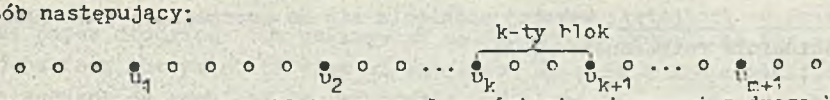
$$L_{max}(\pi) = r_{\pi(u_1)} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=u_k}^{u_{k+1}} p_{\pi(i)k} - d_{\pi(u_{m+1})}$$

będziemy nazywać <u>drogą krytyczną w π</u>, rys. 5.1.



Rys. 5.1. Diagram Gantta z zaznaczoną drogą krytyczną

W dalszym ciągu ciąg zadań $\langle J_{\pi(g)}, J_{\pi(g+1)}, \ldots, J_{\pi(h)} \rangle$, w którym $g = u_k$ oraz $h = u_{k+1}$ będziemy nazywać <u>k-tym blokiem w π</u>. W konsekwencji wprowadzonych pojęć droga krytyczna powoduje rozbicie permutacji na bloki w sposób następujący:



Posługując się pojęciem bloku oraz własnościami związanymi z drogą krytyczną można udowodnić następujące silne twierdzenie eliminujące [3].

<u>Twierdzenie 5.1.</u>

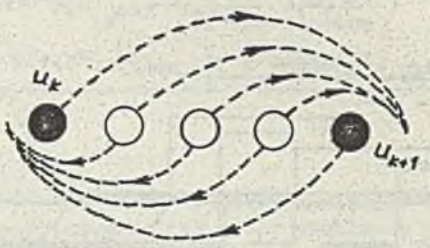
Niech π będzie dowolną permutacją z drogą krytyczną $\langle u_1, u_2, \ldots, u_{m+1} \rangle$. Jeżeli istnieje permutacja β taka, że $L_{max}(\beta) < L_{max}(\pi)$, wtedy w β przynajmniej jedno zadanie dla przynajmniej jednego bloku z

π poprzedza pierwsze lub następuje za ostatnim zadaniem tego bloku.

Twierdzenie to stało się podstawą konstrukcji algorytmu rozwiązywania zagadnienia $n|m|P,r_1 \geq 0|L_{max}$.

6. Algorytmy

Twierdzenia eliminacyjne analogiczne do twierdzenia 5.1 /wraz z własnościami pomocniczymi/ można udowodnić dla wszystkich zagadnień NP-zupełnych umieszczonych w Tabl. 4.1. W konsekwencji zasady konstrukcji algorytmów rozwiązywania są analogiczne. Wszystkie algorytmy są oparte na metodzie podziału i ograniczeń z mieszaną strategią przeglądania drzewa rozwiązań. Zaczynając od pewnego rozwiązania początkowego $\alpha \in \Pi$ generowany jest ciąg rozwiązań $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$. Dla każdego rozwiązania z ciągu wyznaczana jest wartość funkcji celu, droga krytyczna oraz bloki zadań. Nowe rozwiązanie β otrzymujemy z pewnego rozwiązania π z ciągu poprzez przesunięcie pewnego zadania z k-tego bloku w π na pozycję pierwszą /lub ostatnią/ w tym bloku, rys. 6.1.



Rys. 6.1. Schemat podziału węzłów w drzewie

Ogólną zasadę działania algorytmu można opisać podając 4 typowe kroki algorytmu.

krok 1 /iteracja testująca/ : oblicz dolne ograniczenie LB(π) oraz sprawdź warunek odrzucenia węzła.

krok 2 /iteracja obliczeniowa/ : oblicz wartość funkcji celu drogą krytyczną oraz bloki zadań. Wyznacz zbiór kandydatów /zadań/ do przesuwania.

krok 3 /generacja nowego węzła/ : wygeneruj nową permutację poprzez przeniesienie wybranego zadania na pierwszą /lub ostatnią/ pozycję w bloku.

krok 4 /cofanie/ : wykonaj cofnięcie się do poprzednika w drzewie względem aktualnie rozważanego węzła.

7. Uwagi końcowe

Przedstawiono ogólną klasyfikację problemów kolejnościowych oraz wyodrębniono pewną klasę problemów, Tabl. 4.1, dla których sformułowano ogólną metodę konstrukcji algorytmów typu podziału i ograniczeń. Aspekty praktyczne związane z realizacją biblioteki procedur optymalizacji dla tej klasy problemów przedstawione są w cz. II pracy.

LITERATURA

[1] Wybrane problemy i programy optymalizacji dyskretnej dla szeregowania zadań z zastosowaniem przy sterowaniu dyskretnymi procesami produkcyjnymi /praca zbiorowa/, Raporty Serii: Sprawozdania nr 20/82, 21/82, 22/82, 7/83, 8/83, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1982-1983.

[2] Grabowski J.: On two-machine scheduling with relase and due dates to minimize maximum lateness, Opsearch 17, 1980, s. 133-154.

[3] Grabowski J., Skubalska E., Smutnicki C.: On Flow Shop with Relase and Due Dates to Minimize Maximum Lateness, Journal of Opnal Res. Soc., vol. 34, nr 7, s. 615-620, 1983.

[4] Rinnooy Kan A.H.G.: Machine scheduling Problems. Clasification, Complexity and Computations, Nijhoff, The Hague 1976.

[5] Smutnicki C., Grabowski J., Nowicki E., Zdrzałka S.: Biblioteka procedur optymalizacji dla zagadnień kolejnościowych. Cz. II. Struktura biblioteki. Techniki obliczeniowe. Efektywność. Referat na IV Krajową Konferencję Automatyzacji DPP.

[6] Bouma R.W.: Job-Shop Scheduling: A Comparison of Three Enumeration Schemes in a Branch-and-Bound Approach, Technical Report, Erasmus University Rotterdam, Faculty of Economics, Department of Econometrics/ Operations Research, 1982.

Recenzent: Prof.dr hab.inż.Jan Węglarz

Wpłynęło do Redakcji do 30.03.1984r.

БИБЛИОТЕКА ОПТИМАЛИЗАЦИОННЫХ ПРОЦЕДУР ДЛЯ ПРОБЛЕМ ЧЕРЕДОВАНИЯ. Часть I. КЛАССИФИКАЦИЯ, СВОЙСТВА И АЛГОРИТМЫ.

Р е з ю м е

В статье представлен вещественный подход к обрабатываемой библиотеке процедур оптимизации для проблем чередования, являющейся результатом реализации подпроблемы Р.И. 2I. OI. Показана классификация проблем чередования а также основные свойства проблем, связанные с блочным подходом, применяемые при конструировании алгоритмов для всех классов проблем.

THE PACKAGE OF OPTIMIZATION PROCEDURES FOR SEQUENCING JOBS. PART I. CLASSIFICATION, PROPERTIES AND ALGORITHMS

S u m m a r y

The paper describes the package of optimization procedures for sequencing jobs from the point of view of the user. In part I the classification of job sequencing problems is introduced and basic properties of optimal schedules derived on the basis of "block approach" are shown. The paper presents also the fundamental scheme for all the algorithms considered. The package is the results of research made in the frame of Departmental Subproblem R.I. 21.01.