ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: AUTOMATYKA z. 74 Nr kol. 810

Lech Jamroż
Politechnika Krakowska

ZAGADNIENIE SZEREGOWANIA ZADAŃ Z OGRANICZENIAMI MIĘDZYOPERACYJNYMI

Streszczenie. W artykule przedstawiono rozwiązanie problemu szeregowania zadań z ograniczeniami międzyoperacyjnymi i addytywną funkcją celu typu kosztowego. Zbadano i wykorzystano pewne własności zbioru operacji konfliktowych. Algorytm oparto na schemacie metody podziału i ograniczeń.

1. Wstęp

Dla ogólnych typów problemów szeregowania i ogólnych funkcji celu ograniczenia w postaci przezbrojeń międzyoperacyjnych były pomijane lub rozważania zmierzały w kierunku uproszczeń do zagadnień jednomaszynowych lub m-identycznych maszyn. W tej sytuacji do otrzymania rozwiązania wykorzystywane były algorytmy właściwe dla zagadnień TSP /Traveling Salesman Problem/ m-TSP czy też VRP /Vehicle Routing Problem/. Ponieważ problem TSP jest jednym z podstawowych problemów optymalizacji kombinatorycznej, wobec tego istnieje obecnie wiele algorytmów rozwiązujących ten problem.
W stosunku do zagadnień TSP oraz VRP opracowano przede wszystkim algorytmy heurystyczne pozwalające na otrzymywanie dość dobrych rozwiązań dopuszczalnych. Wśród algorytmów dokładnych bazujących na schemacie metody podziału i ograniczeń / B-and-B/ należy wymienić algorytmy Little'a [3], Helda i Karpa [1], Orloffa [6].

W pracy przedstawiono optymalne rozwiązanie problemu szeregowania zadań z przezbrojeniami międzyoperacyjnymi i addytywną funkcją celu typu kosztowego. W algorytmie opartym na schemacie metody B-and-B zbadano i wykorzystano własności zbiorów operacji konfliktowych, które pozwalają na znaczne zmniejszenie liczby przeglądanych rozwiązań.

2. Sformułowanie problemu.

Dane są:

i/ $N=\{n_1, n_2, \ldots, n_n\}$ - zbiór niepodzielnych operacji,
ii/ $J=\{J_1, J_2, \ldots, J_z\}$ - zbiór zadań,
iii/ $M=\{m_1, m_2, \ldots, m_m\}$ - zbiór maszyn różnych typów,
iv/ $Q=\{1, 2, \ldots, q\}$ - zbiór typów maszyn,
v/ $\mathfrak{M}=\{M^1, M^2, \ldots, M^q\}$ - rodzina podzbiorów typów maszyn takich, że:

$$M^k \subseteq M \quad , \quad M^k \cap M^j = \emptyset \quad , \quad k \neq j \quad , \quad k,j \in Q$$

vi/ t_{il} /$t_{il} \geqslant 0$/ - czas wykonywania operacji $n_i \in N$ na maszynie $m_l \in M$.

vii/ $(n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots\ldots n_{i_n})$ - ciąg operacji zadania $J_i \in J$ /każde zadanie składa się z i_n operacji/.

viii/ $RT = \bigcup_{i=1}^{z} \bigcup_{l=1}^{i_n - 1} \{(n_l, n_{l+1})\}$ - relacja poprzedzeń reprezentująca wymogi porządku technologicznego w wykonywaniu poszczególnych operacji, $(n_l, n_j) \in RT$ powoduje, że operacja n_l musi być zakończona przed rozpoczęciem operacji n_j.

ix/ p^l_{ij} / $p^l_{ij} \geqslant 0$ - czas przezbrojenia maszyny $m_l \in M$ pod warunkiem, że ostatnio wykonywaną na niej operacją była operacja n_i, natomiast następną będzie n_j.

x/ Każdemu zadaniu przyporządkowane są normatywne terminy:

r_i - najwcześniejszy żądany termin rozpoczęcia realizacji zadania $J_i \in J$.

d_i - najpóźniejszy żądany termin zakończenia realizacji zadania $J_i \in J$.

Niech $\mathcal{N} = \{N^1, N^2, \ldots\ldots N^m\}$ oraz $\bar{\mathcal{N}} = \bar{N}^1, \bar{N}^2, \ldots\ldots \bar{N}^z$ - będą rodzinami podzbiorów zbioru N przyporządkowanych odpowiednio typom maszyn oraz zadaniom. Wówczas N^k będzie podzbiorem operacji przeznaczonych do wykonywania na maszynach k-tego typu, natomiast $\bar{N}^i$ będzie podzbiorem operacji należących do i-tego zadania. Podzbiory $N^i \in \mathcal{N}$ oraz $\bar{N}^i \in \bar{\mathcal{N}}$ są parami rozłączne i wyczerpujące elementy zbioru N.

Oznaczmy przez $s = (s_1, s_2, \ldots\ldots s_n)$ oraz $c = (c_1, c_2, \ldots\ldots c_n)$ ciąg wartości chwil odpowiednio rozpoczęcia i zakończenia wykonywania operacji ze zbioru N, natomiast przez s_j oraz c_j wartości chwil rozpoczęcia oraz zakończenia realizacji zadania $J_j \in J$. Wówczas:

$E_j = \max(0, r_j - s_j)$ - będzie przyśpieszeniem w wykonywaniu zadania $J_j \in J$.

$T_j = \max(0, c_j - d_j)$ - będzie spóźnieniem w wykonywaniu zadania $J_j \in J$.

Dana jest funkcja $h_i(s)$ reprezentująca koszt związany z wykonaniem zadania $J_i \in J$. Zakłada się, że funkcja $h_i(s)$, $i = \overline{1,z}$ daje się przedstawić w następującej postaci:

$$h_i(s) = g_i(E_i) + f_i(T_i) \qquad /2.1/$$

i posiada jedno minimum, gdzie $g_i(E_i)$ oraz $f_i(T_i)$ niemalejące funkcje swoich argumenrów oraz $g_i(0)$, $f_i(0) = 0$.

Def. 1

Funkcję μ: $m_l = \mu(i)$, $n_i \in N$, $m_l \in M$ nazywamy przydziałem i-tej operacji do l-tej maszyny.

Wektor $\mu = \mu(1), \mu(2), \ldots\ldots \mu(n)$ nazywamy przydziałem n operacji. /2.2/

Zbiór $\eta = \{\mu \mid \mu = (\mu(1), \mu(2), \ldots\ldots \mu(n)), \mu(i) = m_l \in M^k, n_i \in N^k, k \in Q\}$ /2.3/ będzie zbiorem możliwych przydziałów.

Niech $N_l = \{n_i \mid n_i \in N^k, \mu(i) = m_l \in M^k, k \in Q\}$ będzie zbiorem operacji wykonywanych na maszynie m_l. Kolejność realizacji operacji ze zbioru N_l na maszynie m_l

jest określona permutacją :

$$\pi_l = (\pi_l(1) \dots \pi_l(i) \dots \pi_l(L)),\ \pi_l(i) \in N_l,\ i=\overline{1,L},\ L = \mathrm{card}(N_l),\ l \in \overline{1,m} \qquad /2.4/$$

Niech dalej wektor permutacji $\bar{\pi} = (\pi_1, \dots \pi_l \dots \dots \pi_m)$ /2.5/

określa kolejność wykonywania operacji na poszczególnych maszynach, wówczas zbiorem wszystkich możliwych permutacji będzie zbiór $\Pi = \{\pi \mid \pi = (\pi_1, \dots \pi_l \dots \dots \pi_m)$ postaci /2.4/$\}$. Oznaczmy przez

$\mathcal{S} = \{ s \mid s = (s_1, s_2, \dots \dots s_n)\}$ -zbiór możliwych chwil rozpoczęcia wykonywania operacji ze zbioru Π oraz η.

W zagadnieniach szeregowania z przezbrojeniami międzyoperacyjnymi wymagany jest dodatkowy warunek, aby przy przejściu od realizacji określonej operacji do realizacji następującej po niej zachodziła konieczność dokonania przezbrojenia maszyny. Niech $N_p^k \subseteq N^k$, $k \in Q$ będzie zbiorem operacji k-tego typu maszyn wymagających przezbrojenia.

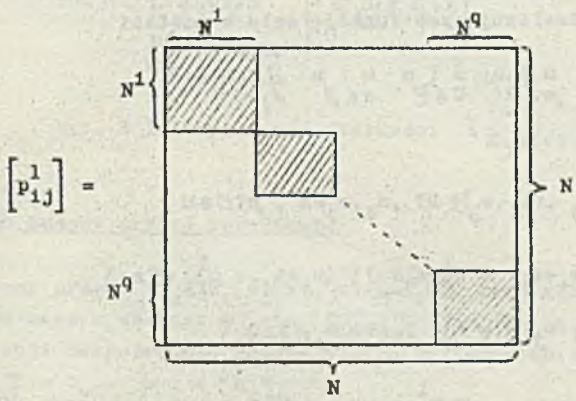
Def. 2

Przezbrojeniem maszyny nazywamy funkcję $P: N_p^k \times N_p^k \times M \to \mathbb{R}^+$ przyporządkowującą maszynie oraz parze operacji na niej wykonywanych liczbę rzeczywistą dodatnią.

Wartość funkcji $P(n_i, n_j, m_l) = p_{ij}^l \geqslant 0$, $\mu(i) = \mu(j) = m_l \in M^k$, $l \in \overline{1,m}$, $k \in Q$.

nazywamy czasem przezbrojenia maszyny m_l do wykonywania operacji n_j pod warunkiem, że ostatnio była wykonywana operacja n_i.

Wartości p_{ij}^l są określone tylko dla par $\{n_i, n_j\}$ takich, że $n_i, n_j \in N_p^k$.



Rys.1 Struktura macierzy czasów przezbrojeń maszyn.

Relaksacja problemu wyjściowego polegająca na chwilowym odrzuceniu założenia dotyczącego jednoczesnego wykonywania przez określoną maszynę tylko jednej operacji generuje na tej maszynie sytuacje konfliktowe.

Def. 3

Zbiór $C^l = \{\{n_i, n_j\} \mid s_j \leq c_i \wedge s_i \leq c_j \ , \ \mu(i) = \mu(j) = m_l \in M^k \ , n_i, n_j \in N_l, k \in Q\}$

nazywamy zbiorem par operacji konfliktowych maszyny $m_l \in M$.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na istnienie konfliktu między parą operacji na określonej maszynie jest aby przedziały czasowe wyznaczone dla zrelaksowanego problemu wyjściowego, w których mogą być wykonywane operacje pokrywały się. W przypadku wykonywania operacji ze zbioru operacji konfliktowych maszyna wykonuje je bez przestojów. Oznaczmy przez $C = \bigcup_{l=1}^{m} C^l$ /2.6/ sumę mnogościową zbiorów C^l, natomiast przez:

$\mathcal{C} = \{ C \mid C$ postaci/2.6/$\}$ zbiór możliwych konfliktów.

Własność 1.

Jeżeli $\{n_i, n_j\} \in C^l$, $l \in \overline{1,m}$, wówczas ustalenie kolejności takiej, aby w permutacji π_l

a/ operacja n_i poprzedzała operację n_j lub

b/ odwrotnie

nie wprowadza cykli w grafie rozwiązań.

Dowód pominięto ze względu na jego długość.

3. Model matematyczny.

Problem szeregowania polega na wyznaczeniu wartości zmiennych $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ minimalizujących funkcję celu w postaci

$$h_1(s^*) = \min_{\mu \in \eta} \ \min_{C \in \mathcal{C}} \ \min_{s \in S} \sum_{J_i \in J} h_1(s) \qquad /3.1/$$

przy ograniczeniach:

$$s_i + t_{i\,\mu(i)} \leq s_j \ , (n_i, n_j) \in RT \ , n_i, n_j \in N \ , \ \mu(i) \in M \qquad /3.2/$$

$$\{n_i, n_j\} \in C^l \Rightarrow (s_i + t_{il} + p_{ij}^l \leq s_j) \vee (s_j + t_{jl} + p_{ij}^l \leq s_i) \qquad /3.3/$$

$$n_i, n_j \in N^k \cup N_p^k \ , \ l \in \overline{1,m} \ , \ k \in Q$$

$$s_{\pi_l(i)} + t_{\pi_l(i)\,\mu(\pi_l(j))} + p^l_{\pi_l(i)\,\pi_l(j)} \leq s_{\pi_l(i+1)} \qquad /3.4/$$

$$\pi_l(i), \pi_l(i+1) \in N_p^k \ , \ \mu(\pi_l(i)) = \mu(\pi_l(i+1)) = m_l \in M^k \quad k \in Q$$

Funkcja celu /3.1/ przedstawia całkowity koszt związany z wykonaniem wszystkich zadań. Ograniczenie /3.2/ reprezentuje wymaganie porządku technologicznego przy realizacji operacji. Ograniczenie /3.3/ oznacza, że ope-

racje konfliktowe nie mogą być wykonywane jednocześnie lecz muszą być uszeregowane. Ograniczenie postaci /3.4/ orzeka, że jeżeli dwie operacje należące do zbioru operacji wymagających przezbrojenia maszyny występują w permutacji bezpośrednio jedna po drugiej, wówczas chwila rozpoczęcia wykonywania następnej operacji jest nie mniejsza niż suma czasu zakończenia realizacji poprzedniej oraz czasu trwania przezbrojenia.

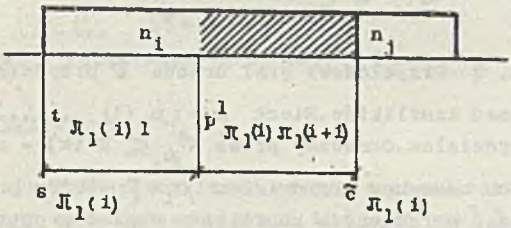
Problem /3.1/-/3.4/ jest w ogólności zadaniem optymalizacji nieliniowej z liniowymi ograniczeniami oraz dodatkowym warunkiem ograniczającym i jest NP-zupełny.

Dalej zakładać będziemy, że czas przezbrojenia międzyoperacyjnego jest włączany do czasu trwania operacji poprzedzającej to przezbrojenie, wówczas warunek /3.4/ przyjmie postać:

$$s_{\pi_1(i)} + \tilde{t}_{\pi_1(i)1} \leqslant s_{\pi_1(i+1)}, \qquad /3.5/$$

gdzie: $\tilde{t}_{\pi_1(i)} = t_{\pi_1(i)1} + p^1_{\pi_1(i)\pi_1(i+1)}$,

wówczas $\tilde{c}_{\pi_1(i)} = s_{\pi_1(i)} + \tilde{t}_{\pi_1(i)1}$



Rys. 2 Interpretacja wielkości $\tilde{t}_{\pi_1(i)1}$ oraz $\tilde{c}_{\pi_1(i)}$.

4. Sposób budowy drzewa rozwiązań.

Oznaczmy przez $N_\mu = \{n_i \mid n_i \in N,\ \mu(i) = m_1 \in M^k, k \in Q\}$ zbiór operacji przydzielonych do maszyn, wówczas $N^{\sim}_\mu = \{n_j \mid (n_i, n_j) \in RT, n_i \in N_\mu, n_j \in N \setminus N_\mu\}$ będzie zbiorem operacji bezpośrednio następujących względem zbioru N_μ.

Niech $\tau = c_{v'} = \min\limits_{n_v \in N^{\sim}_\mu} \{c_v\}$ /4.1/

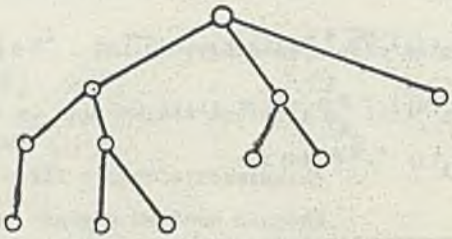
będzie wielkością określającą najwcześniejszą chwilę zakończenia operacji ze zbioru $N^{\sim}_\mu$.

Def. 4

Zbiorem operacji aktywnych nazywamy zbiór

$N^a(k) = \{n_i \mid s_i < \tau, n_i \in N^{\sim}_\mu \cap N^k\}$, $k \in Q$.

Zbiór $N^a(k)$ jest zbiorem operacji będących ze sobą w konflikcie.
Generacja przydziałów. Należy wygenerować wszystkie przydziały operacji ze zbioru $N^a(k)$ do maszyn ze zbioru M^k, $k \in Q$. Proces generowania przydziałów będzie się odbywał poprzez zmianę przydziału jednej z operacji, tzn. jeżeli przydział μ_p został otrzymany z przydziału μ_t to $\mu_t(v) = \mu_p(v)$ $n_v \in N^a(k)$, $\mu_t(v) \in M^k$ oraz $\forall v \neq u : \mu_t(u) \neq \mu_p(v)$ dla pewnego $n_u \in N^a(k)$, $\mu_t(u)$, $\mu_p(u) \in M^k$, $k \in Q$. Proces generacji przydziałów można przedstawić w postaci drzewa $\mathbb{P}$, w którym każdy węzeł będzie odpowiadał pewnemu przydziałowi $u_t \in \eta$. Dla przykładowych zbiorów $N^a(k) = \{1,2,\ldots 5\}$ oraz $M^k = \{1,2,3\}$ drzewo przydziałów ma postać jak na rys.3 .



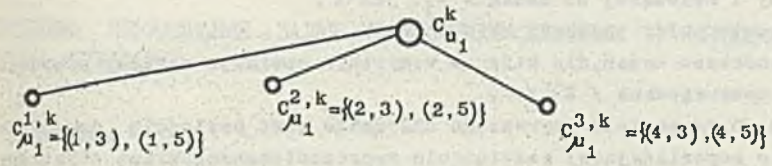
Rys. 3 Przykładowy graf drzewa $\mathbb{P}$ przydziałów

Generacja rozwiązań konfliktów. Niech $\mu_t = (\mu_t(1), \ldots\ldots \mu_t(L))$, $L = \mathrm{card}(M^k)$ będzie danym przydziałem. Oznaczmy przez $N^a_{\mu_t} \subseteq N^a(k)$ - zbiór operacji przyporządkowanych maszynom przydziałem $\mu_t \in \eta$. Każdy przydział μ_t wyznacza zbiór rozwiązań określonych konfliktów względem operacji przydzielonych. Niech tym zbiorem będzie zbiór $C^k_{\mu_t}$, $k \in Q$ wówczas:

$$C^k_{\mu_t} = \bigcup_{l=1}^{L} C^{l,k}_{\mu_t} \qquad k \in Q \qquad /4.2/$$

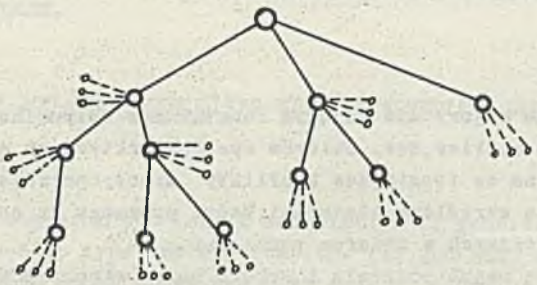
gdzie: $C^{l,k}_{\mu_t} = \{(n_v, n_{i_1}), \ldots\ldots, (n_v, n_{i_p}) \mid \mu(v) = m_l \in M^k, n_{i_1}, \ldots, n_{i_p} \in N^a(k) \setminus N^a_{\mu_t}\}$

jest rozwiązaniem konfliktu względem przydziału μ_t l-tej maszyny k-tego typu. Proces generacji zbiorów postaci /4.2/ dla przydziału μ_t można przedstawić w postaci drzewa $\mathbb{C}$, którego węzły odpowiadają podzbiorom $C^{l,k}_{\mu_t}$, natomiast korzeń tego drzewa umieszczony jest w węźle μ_t drzewa $\mathbb{P}$.
Dla przydziału μ_1 z rys.3 graf drzewa $\mathbb{C}$ ma postać jak na rys.4.
Pełne drzewo rozwiązań $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}$ jest superpozycją drzewa $\mathbb{P}$ odpowiadającego wszystkim możliwym przydziałom oraz drzewa $\mathbb{C}$ odpowiadającego wszystkim rozwiązaniom konfliktów wynikających z danego przydziału.



Rys. 4 Graf drzewa $\mathbb{C}$.

Rys.5 przedstawia strukturę pełnego drzewa rozwiązań dla przykładu z rys.3. Linią ——— zaznaczono drzewo $\mathbb{P}$, natomiast linią ----- drzewo $\mathbb{C}$.



Rys. 5 Przykładowy graf drzewa $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}$.

5. Dolne ograniczenie.

Dla każdego węzła drzewa rozwiązań należy znaleźć wartość dolnego ograniczenia funkcji celu. Oznaczmy przez $LB(\mu_t, C^k_{\mu_t}, N^s_{\mu_t})$ dolne ograniczenie związane z przydziałem μ_t oraz z rozwiązaniem konfliktu $C^{l,k}_{\mu_t}$ dla określonego zbioru $N^s_{\mu_t}$. Wartość dolnego ograniczenia zostanie wyznaczona przy zastosowaniu idei relaksacji możliwości wykonawczych maszyn oraz relaksacji czasów przezbrojeń.

$$LB(\mu_t, C^k_{\mu_t}, N^s_{\mu_t}) = \sum_{i\in Z'} h_i(s) + \sum_{j\in Z\setminus Z'} L_j(\tilde{S}_j, s_v, \tilde{c}_j), \qquad /5.1/$$

gdzie: $L_j(\tilde{S}_j, s_v, \tilde{c}_j)$ - jest zrelaksowaną wartością funkcji celu wyznaczona dla

$$\tilde{c}_j = s_v + \sum_{n_i\in N\cap\bar{N}^j} (t_{i1} + p^l_i), \quad j\in Z\setminus Z' \qquad /5.2/$$

$$p^l_i = \min_{n_u, n_v\in N^k_p} \{p^l_{vu}\}, \quad m_l\in M^k, \quad k\in Q$$

s_v - chwila rozpoczęcia wykonywania ostatnio przydzielonej operacji do maszyny i należącej do zadania J_j, $j \in Z \setminus Z'$,

$Z = \{1, 2, \ldots, z\}$ - zbiór indeksów zbioru zadań,

Z' - zbiór indeksów zadań, dla których wszystkie operacje zostały przydzielone i uszeregowane / $Z' \subseteq Z$ /.

W wyrażeniu /5.1/ wartość pierwszego składnika jest wartością częściową funkcji celu odpowiadającej rozwiązaniu reprezentowanemu przez określony węzeł drzewa rozwiązań. Natomiast drugi składnik reprezentuje wartość dolnego ograniczenia funkcji celu dla pozostałych zadań przy zrelaksowanych możliwościach wykonawczych maszyn i czasów przezbrojeń.

Algorytm oparty jest na schemacie metody podziału i ograniczeń z podziałem minimalnego węzła w drzewie rozwiązań.

6. Uwagi końcowe.

W zaproponowanym algorytmie dającym rozwiązanie optymalne rozważania sprowadzają się do analizy, tzw. zbiorów operacji aktywnych w zakresie, których rozwiązywane są istniejące konflikty międzyoperacjami.

Zbiory te posiadają określone własności, które prowadzą do dodatkowych możliwości eliminacyjnych w zbiorze rozwiązań.

Poprzez modyfikację reguł podziału i wyboru można skonstruować suboptymalny algorytm o wielomianowej złożoności obliczeniowej rzędu $O(n^4)$, jeżeli założyć globalny sposób rozwiązywania konfliktów otrzymamy złożoność $O(n^2)$.

LITERATURA

[1]. Held M., Karp R.M.: The traveling-salesman problem and minimum spaning trees. Part II, Mathematical Programming, No 1, 1971.

[2]. Jamroż L.: Optymalizacja harmonogramowania produkcji za pomocą algorytmu bazującego na metodzie zbiorów operacji konfliktowych. Zeszyty Naukowe AGH s Automatyka, No928, z.32, 1982.

[3]. Kovacs L.B.: Combinatorial methods of discrete programming, Akademiai, Kiado. Budapeszt 1980.

[4]. Lageweg B.J., Lenstra J.K., Rinnooykan A.H.G.: Job-shop scheduling by implicit enumerations, Management Science, Vo24, No4, 1977.

[5]. Lenstra J.K.: Sequencing by enumerative methods. Mathematical Centre Tract 69, Mathematisch Centrum Amsterdam, 1977.

[6]. Orloff C.S.: A fundamental problem in vehicle routing. Networks, No4, 1974.

[7]. Smutnicki Cz.: Zagadnienie optymalizacji kolejności operacji z kryterium minimalno-kosztowym. Pr. dokt., Preprinty, Politechnika Wrocławska, 1981.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Józef Grabowski
Wpłynęło do Redakcji do 30.03.1984r.

ПРОБЛЕМА ЧЕРЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ С ПЕРЕОБОРУДОВАНИЕМ И КРИТЕРИЕМ СУММЫ ШТРАФОВ

Р е з ю м е

В работе представлена проблема чередования задач с критерием суммы штрафов из-за невыполнения сроков изготовления задач. Представлен алгоритм решения этой проблемы на базе метода ветвей и границ. Правило ветвей и границ ограничено к множеству операций , от порядка которых зависит стоимость функции цели.

THE PROBLEM OF JOB-SHOP SCHEDULING WITH INTERMEDIATE CONSTRAINTS

S u m m a r y

This paper concerns the formal description of general discrete processes of the job-shop type and application. The job-shop scheduling problem with intermediate constraints and with general additive cumulative cost objective function is considered. This problem is NP-complete. The method of solving of the presented problem based on the conflict operations sets concept, and combines lower bound with enumeration scheme generating active schedules. Some properties of design algorithm are proved. For proving optymality, however, the schedulig tree may be traced back to explore those nodes, which have bounds less then the current solution obtained.