ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: AUTOMATYKA z. 74 Nr kol. 810

Tadeusz Kaczorek
Politechnika Warszawska

SYNTEZA REGULATORA TYPU "DEADBEAT" DLA UKŁADÓW 2-D

Streszczenie. Sformułowano i udowodniono warunki dostateczne istnienia regulatora typu "deadbeat" dla dwuwymiarowych (2-D) układów liniowych dyskretnych. Podano algorytm wyznaczania macierzy wielomianowych opisujących ten regulator.

1. Wstęp

Problem sterowania prawie idealnego (deadbeat control), tj. z uchybem zerowym po skończonym czasie był rozpatrywany w wielu pracach [2,5,7,8, 10,13,15,16]. Nowe sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia syntezy regulatora typu "deadbeat" dla układów liniowych stacjonarnych przedstawił Kučera w pracy [7]. Podejście to zostało następnie rozwinięte w pracach [2,8,15].

Układom wielowymiarowym, a w szczególności układom dwu i trójwymiarowym (2-D i 3-D) poświęcono ostatnio wiele prac. Warunki konieczne i dostateczne istnienia regulatora typu "deadbeat" dla układów 2-D z jednym wejściem i jednym wyjściem zostały podane w pracy [5]. Celem tej pracy jest uogólnienie tej metody na przypadek układów 2-D o wielu wejściach i wyjściach.

Niech $R_{mn}[d_1,d_2]$ będzie zbiorem macierzy wielomianowych zmiennych d_1,d_2 o wymiarach mxn i współczynnikach rzeczywistych. Weźmy pod uwagę macierze wielomianowe o tej samej liczbie wierszy $\bar{A} \in R_{mq}[d_1,d_2]$, $\bar{B} \in R_{ml}[d_1,d_2]$ takie, że $t=q+l \geqslant m \geqslant 1$ oraz macierz z nich zbudowaną o postaci

$$D = [\bar{A} \vdots \bar{B}] \in R_{mt}[d_1,d_2] \tag{1}$$

Definicja [18]

Macierze $\bar{A},\bar{B}$ nazywamy zerowo lewostronnie pierwsze (ZLP), jeżeli nie istnieje para (d_1,d_2) będąca zerem wszystkich minorów stopnia m macierzy $\bar{D}$. Macierze $\bar{A},\bar{B}$ o tej samej liczbie kolumn nazywamy zerowo prawostronnie pierwsze (ZPP), jeżeli macierze transponowane $\bar{A}^T,\bar{B}^T$ są ZLP.

Twierdzenie 1 [18]

Macierze $\bar{A},\bar{B}$ są ZLP wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją macierze wielomianowe $\bar{X} \in R_{qm}[d_1,d_2]$, $\bar{Y} \in R_{lm}[d_1,d_2]$ takie, że

$$\bar{A}\bar{X} + \bar{B}\bar{Y} = I_m , \tag{2}$$

przy czym I_m jest macierzą jednostkową m-tego stopnia.

Twierdzenie 2 [18]

Istnieją macierze wielomianowe $\bar{X} \in R_{qm}[d_1,d_2]$, $\bar{Y} \in R_{lm}[d_1,d_2]$, $C_2 \in R_{t-m,t}[d_1,d_2]$, $D_2 \in R_{t,t-m}[d_1,d_2]$ takie, że

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \vdots & \bar{B} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & C_2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X} & \vdots & \\ \cdots & \vdots & D_2 \\ \bar{Y} & \vdots & \end{bmatrix} = I_t \tag{3}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy macierze $\bar{A},\bar{B}$ są ZLP.

2. Sformułowanie zadania

Dany jest obiekt 2-D opisany równaniem

$$Ay = Bu + C, \tag{4}$$

przy czym $y \in R_{m1}(d_1,d_2)$ i $u \in R_{11}(d_1,d_2)$ są transformatami Z odpowiednio $y(i,j)$ i $u(i,j)$ będącymi funkcjami zmiennych $d_1=z_1^{-1}$, $d_2=z_2^{-2}$, $A \in R_{mm}[d_1,d_2]$, $B \in R_{ml}[d_1,d_2]$, $C \in R_{m1}[d_1,d_2]$, a $R_{mk}(d_1,d_2)$ jest zbiorem macierzy wymiernych zmiennych d_1 i d_2 o wymiarach $m \times k$ i współczynnikach rzeczywistych. Zakładamy, że macierz A jest odwracalna. Dana jest również klasa sygnałów odniesienia $r \in R_{m1}(d_1,d_2)$ opisana równaniem

$$Fr = G, \tag{5}$$

przy czym $F \in R_{mm}[d_1,d_2]$ i $G \in R_{m1}[d_1,d_2]$.
Wektory C i G zależą od warunków brzegowych obiektu i odpowiednio generatora sygnałów odniesienia. Zmieniając warunki brzegowe generatora sygnałów odniesienia, tj. wektor G otrzymujemy całą klasę sygnałów odniesienia, określoną macierzą F.

Poszukiwać będziemy regulatora liniowego opisanego równaniem

$$Pu = -Qy+Rr+S, \tag{6}$$

przy czym $P \in R_{11}[d_1,d_2]$, $Q \in R_{1m}[d_1,d_2]$, $R \in R_{1m}[d_1,d_2]$, $S \in R_{11}[d_1,d_2]$ a S zależy od warunków brzegowych regulatora.
Zadanie syntezy regulatora typu "deadbeat" dla układów 2-D można sformułować następująco: Dane są macierze A,B i F ; wyznaczyć macierze P,Q i R tak, aby uchyb śledzenia $e=r-y$ oraz u były wektorami wielomianowymi zmiennych d_1 i d_2 dla dowolnych wektorów C,G i S.

3. Rozwiązanie zadania

Twierdzenie 3

Zadanie syntezy regulatora ma rozwiązanie jeżeli:
1) A,B są ZLP.
2) F jest prawym dzielnikiem A, tj. istnieje $A_0 \in R_{mm}[d_1,d_2]$ takie, że $A=A_0F$, przy czym $\det A_0=c\neq 0$, a c nie zależy od d_1 i d_2.

Dowód

Z założenia 1) i twierdzenia 2 wynika, że istnieją: $A_2 \in R_{ll}[d_1,d_2]$, $B_2 \in R_{ml}[d_1,d_2]$, $P \in R_{ll}[d_1,d_2]$, $Q \in R_{lm}[d_1,d_2]$, $P_2 \in R_{mm}[d_1,d_2]$ i $Q_2 \in R_{lm}[d_1,d_2]$ takie, że

$$\begin{bmatrix} A & B \\ Q & -P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_2 & B_2 \\ Q_2 & -A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_l \end{bmatrix} \tag{7}$$

Biorąc pod uwagę, że $AB_2=BA_2$ oraz podstawiając (5) i

$$y = B_2A_2^{-1}u+A^{-1}C$$

do (6) otrzymamy

$$u = A_2(PA_2+QB_2)^{-1}(RF^{-1}G+S-QA^{-1}C) \tag{8}$$

oraz

$$e = r-y = \left[I_m-B_2(PA_2+QB_2)^{-1}R\right]F^{-1}G-\left[I_m-B_2(PA_2+QB_2)^{-1}Q\right]A^{-1}C - B_2(PA_2+QB_2)^{-1}S \tag{9}$$

Z (7) mamy

$$PA_2+QB_2=I_l \;,\quad P_2A+B_2Q=I_m \;,\quad A_2Q=Q_2A \tag{10}$$

Podstawiając (10) do (8) i (9) otrzymamy

$$u = A_2RF^{-1}G+A_2S-Q_2C \tag{11}$$

oraz

$$e = \left[I_m-B_2R\right]F^{-1}G-P_2C-B_2S \tag{12}$$

Zauważmy, że $B_3=A_o^{-1}B$ jest macierzą wielomianową dla każdej macierzy wielomianowej B. Z zależności $[AB]=A_o[FB_3]$ oraz z warunku 1) wynika, że F, B_3 są ZLP. Z równania

$$A_o\left[FB_3\right]\begin{bmatrix} B_2 \\ -A_2 \end{bmatrix} = 0$$

oraz z twierdzenia 2 wynika więc, że istnieją $R \in R_{lm}[d_1,d_2]$, $T \in R_{ll}[d_1,d_2]$, $T_2 \in R_{mm}[d_1,d_2]$, $R_2 \in R_{lm}[d_1,d_2]$ takie, że

$$\begin{bmatrix} F & B_3 \\ R & -T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_2 & B_2 \\ R_2 & -A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_l \end{bmatrix} \tag{13}$$

Z (13) mamy

$$T_2F+B_2R = I_m \tag{14}$$

oraz

$$R_2F = A_2R \tag{15}$$

Podstawiając (15) i (14) do (11) i (12) otrzymamy

$$u = HR_2G+A_2S-Q_2C$$

oraz

$$e = T_2G-P_2C-B_2S$$

Stwierdzamy więc, że u i e są wektorami wielomianowymi zmiennych d_1 i d_2 dla dowolnych wektorów C,G i S. □

Z porównania (7) i (13) wynika, że można przyjąć Q=R.

4. Algorytm

Jeżeli warunki 1) i 2) twierdzenia 3 są spełnione, wtedy macierze P i Q=R można wyznaczyć korzystając z następującego algorytmu:

krok 1.

Korzystając z działań elementarnych na kolumnach i wykonując przekształcenie

$$\begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \cdots & & \cdots \\ I_m & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & I_l \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_m & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ U_1 & \vdots & U_2 \\ \cdots & & \cdots \\ U_3 & \vdots & U_4 \end{bmatrix} \tag{16}$$

wyznaczamy $A_2=U_4$ i $B_2=-U_2$.

krok 2.

Korzystając z działań elementarnych na wierszach i wykonując przekształcenie

$$\begin{bmatrix} A_2 & \vdots & I_l & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ B_2 & \vdots & 0 & \vdots & I_m \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_l & \vdots & V_1 & \vdots & V_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & V_3 & \vdots & V_4 \end{bmatrix} \tag{17}$$

wyznaczamy rozwiązanie $P=V_1$, $Q=V_2$ równania

$$PA_2 + QB_2 = I_l \tag{18}$$

Rozwiązanie równania (18) można również wyznaczyć korzystając z algorytmu podanego w pracy [6] (zwłaszcza w tych przypadkach, w których zawodzi algorytm oparty na działaniach elementarnych).

5. Przykład

Rozwiązać zadanie syntezy regulatora dla

$$A = P = \begin{bmatrix} d_1 & -1 \\ 1 & d_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Łatwo sprawdzić, że macierze (19) są ZLP a $A_0=I_2$.

krok 1.

Korzystając z działań elementarnych na kolumnach wykonujemy przekształcenie

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline I_m & 0 \\ \hline 0 & I_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} d_1 & -1 & 0 \\ 1 & d_2 & d_2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & d_2 \\ -1 & d_1 & -d_1d_2 \\ \hline 1 & -d_1 & 1+d_1d_2 \end{array}\right]$$

Wobec tego

$$A_2 = 1+d_1d_2 \quad \text{and} \quad B_2 = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_1d_2 \end{bmatrix}$$

krok 2.

Aby wyznaczyć rozwiązanie równania

$$P\left[1+d_1d_2\right] + Q\begin{bmatrix} d_2 \\ d_1d_2 \end{bmatrix} = 1$$

wykonujemy przekształcenie (korzystając z działań elementarnych na wierszach)

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A_2 & I_1 & 0 \\ \hline B_2 & 0 & I_m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|cc} 1+d_1d_2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline d_2 & 0 & 1 & 0 \\ d_1d_2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c|cc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & -d_2 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & -d_1 & 1 \end{array}\right]$$

Poszukiwane macierze są więc równe

$$P = \left[1\right], \quad Q = R = \left[0 \ -1\right].$$

LITERATURA

[1]. Bose N.K.: Multidimensional Systems: Theory and Applications, IEEE Press., 1979.

[2]. Eichstaedt B.; Multivariable closed-loop deadbeat control: a polynomial-matrix approach. Automatica 18, 1982.

[3]. Eising R.: Realization and stabilization of 2-D systems. IEEE Trans. Autom.Contr., vol.AC-23, 1978.

[4]. Fornasini M. and Marchesini G.: State space realization theory of two-dimensional filters. IEEE Trans.Autom.Contr., AC-21, 1976.

[5]. Kaczorek T: Dead-beat servo problem for 2-dimensional linear systems. Int.J.Control, vol.37, 1983.

[6]. Kaczorek T.: Solving of 2-D polynomial matrix equations. Functional-Differential Systems and Related Topics III. Proc.of the III International Conference, Błażejewko, Poland, May 23-31 1983.

[7]. Kučera V.: Discrete Linear Control, The polynomial Equation Approach. John Wiley, Chichester, 1979.

[8]. Kučera V. and Šebek M.: On deadbeat controllers. IEEE Trans. Autom. Contr., AC-28 (in print).

[9]. Kung S., Lévy B., Morf M. and Kailath T.: New results in 2-D systems theory, part II: 2-D state-space models-realization and the notions of controllability, observability and minimality.

IEEE, vol.65,1977.

[10]. Leben B.: Multivariable deadbeat control. Automatica 13, 1977.

[11]. Paraskevopoulos P.N.: Characteristic polynomial assignment and determination of the residual polynomial in 2-D systems. IEEE Trans, Autom.Contr.,vol.AC-26, 1981.

[12]. Paraskevopoulos P.N. and Mertzios B.G.: Transfer function factorization of 2-D systems using state feedback. Int.J.Systems Sci., vol.12, 1981.

[13]. Porter B. and Bradshaw A.: Design of dead-beat controllers and full-order observers for linear multivariable discrete-time plants. Int.J.Contr.,vol.22, 1975.

[14]. Roesser R.: A discrete state space model for linear image processing IEEE Trans.Autom.Contr.,vol.20, 1975.

[15]. Šebek M.: Multivariable dead-beat servo problem. Kibernetika,vol.16, 1980.

[16]. Seraji H.: Deadbeat control of discrete-time systems using output feedback. Int.J.Control,vol.21,1975.

[17]. Tzafestas S.G. and Pimenides T.G.: Exact model-matching control of three-dimensional systems using state and output feedback. Int.J. Systems Sci.,vol.13,1975.

[18]. Youla D. and Gnavi G.: Notes on n-dimensional system theory. IEEE Trans.Circuits and Systems,CAS-26,1979.

Recenzent: Doc.dr inż.Jerzy Klamka

Wpłynęło do Redakcji do 30.03.1984r.

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА " ДИДБИТ " ДЛЯ СИСТЕМ Д- 2

Р е з ю м е

В работе сформулированы и доказаны достаточные условия существования регулятора типа " дидбит " для двухмерных (2 - Д) линейных дискретных систем. Дан алгоритм определения многочленных матриц, описывающих этот регулятор.

DEADBEAT CONTROLLER DESIGN FOR 2D SYSTEMS

S u m m a r y

Sufficient conditions of existence of deadbeat controller for 2D linear systems are formulated and proved. Algorithms for assignment of polynomal matrices describing the controller is presented.