ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: AUTOMATYKA z. 74 Nr kol. 810

Jerzy Klamka

Politechnika Śląska

STEROWALNOŚĆ I STEROWANIE OPTYMALNE UKŁADÓW TYPU M-D.

Streszczenie. W artykule podano definicję lokalnej sterowalności liniowego, stacjonarnego układu typu M-D. Zaproponowano postać transformacji przekształcającej układ typu M-D w liniowy, niestacjonarny, o zmiennej strukturze układ typu 1-D. Wykorzystując odpowiednio zdefiniowaną macierz lokalnej sterowalności, sformułowano warunki konieczne i wystarczające lokalnej sterowalności układów typu M-D. Rozpatrzono również problem optymalnego sterowania układami typu M-D przy kwadratowym wskaźniku jakości.

1. Wstęp.

W ostatnich latach w literaturze teorii sterowania ukazało się wiele prac dotyczących analizy, syntezy oraz zastosowań tzw. układów typu 2-D, tzn. układów dyskretnych o dwu zmiennych niezależnych, [1 - 8], [11 - 13]. Głównym celem niniejszej pracy jest rozszerzenie na przypadek układów typu M-D, rezultatów dotyczących sterowalności oraz sterowania optymalnego tymi układami.

Rozpatrywany będzie liniowy, stacjonarny układ typu M-D, tzn. układ dyskretny o M zmiennych niezależnych. Podana zostanie transformacja doprowadzająca układ typu M-D do postaci liniowego, niestacjonarnego, o zmiennej strukturze układu typu 1-D. Dzięki temu będzie można przy analizie układów typu M-D wykorzystać znane w literaturze [14], [15], rezultaty dotyczące układów typu 1-D.

Niniejsza praca koncentruje się na badaniu własności sterowalności lokalnej układów typu M-D, wykorzystując do tego celu macierz lokalnej sterowalności. Następnie rozpatrywany jest problem optymalnego sterowania układami typu M-D przy kwadratowym wskaźniku jakości. Jako szczególny przypadek, rozważa się zagadnienie tzw. sterowania z minimalną energią, które stosunkowo prosto można rozwiązać posługując się zmodyfikowaną macierzą lokalnej sterowalności.

Rezultaty niniejszej pracy są uogólnieniem na przypadek układów typu M-D rezultatów zawartych w pracy [10] a dotyczących układów typu 2-D.

2. Modele matematyczne układów M-D .

W celu uproszczenia skomplikowanego zapisu charakteryzującego układy M-D wprowadza się następujące oznaczenia :

Z ,zbiór liczb całkowitych,

$\underbrace{Z\times Z\times\ldots\times Z}_{M \text{ razy}} = Z^M$,M-krotny iloczyn kartezjański zbioru Z,

$(i_1,i_2,\ldots,i_M)\in Z^M$,punkt w przestrzeni Z^M,

Dla ustalonej liczby całkowitej $I\in Z$ symbolem C_I oznacza się M-1 wymiarową hiperpłaszczyznę postaci :

$$C_I = \left\{(i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_M)\in Z^M : \sum_{j=1}^{j=M} i_j = I\right\}$$

W zbiorze Z^M wprowadza się relację częściowego porządku w sposób następujący : niech $(i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_M)\in Z^M$ oraz $(r_1,\ldots,r_j,\ldots,r_M)\in Z^M$, wówczas :

$$(i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_M) = (r_1,\ldots,r_j,\ldots,r_M) \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{j=M} i_j = \sum_{j=1}^{j=M} r_j$$

$$(i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_M) < (r_1,\ldots,r_j,\ldots,r_M) \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{j=M} i_j < \sum_{j=1}^{j=M} r_j$$

Zatem poszczególnymi warstwami wyznaczonymi relacją częściowego porządku są zdefiniowane powyżej M-1 wymiarowe hiperpłaszczyzny C_I , $I\in Z$.

Dla $(s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_M) > (0,\ldots,0,\ldots,0)$ niech :

$$D_{(s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_M)} = \left\{(i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_M)\in Z^M : \sum_{j=1}^{j=M} i_j \geq 0 \ , \ -\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{l=M} s_l \leq i_j \leq s_j\right\}$$

$$C_k^{(s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_M)} = \left\{(i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_M) \in D_{(s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_M)} : 0 \leq k = \sum_{j=1}^{j=M} i_j \leq \sum_{j=1}^{j=M} s_j = S\right\}$$

Zatem : $D_{(s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_M)} = \bigcup_{k=0}^{k=S} C_k^{(s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_M)}$

Zbiór $C_k^{(s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_M)}$ jest podzbiorem hiperpłaszczyzny C_k,zawierającym następujące punkty :

$$C_k^{(s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_M)} = \Big\{(s_1,s_2,\ldots,s_{M-1}, -\sum_{j=1}^{j=M-1} s_j + k\ ) ,(s_1,s_2,\ldots,s_{m-1}-1 , -\sum_{j=1}^{j=M-1} s_j + k + 1\ ) ,\ldots,(-\sum_{j=2}^{j=M} s_j + k + 1 ,s_2-1,\ldots,s_{M-1},s_M),$$
$$(-\sum_{j=2}^{j=M} s_j+k , s_2,\ldots,s_{M-1},s_M\ )\Big\}$$

W przypadku, gdy nie będzie to prowadzić do nieporozumień stosowane także będzie oznaczenie $(s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_M) = S_M$.

Niech będzie dany liniowy, stacjonarny układ M-D opisany równaniem różnicowym postaci :

$$x(i_1+1,\dots,i_j+1,\dots,i_M+1) = \sum_{j=1}^{j=M} A_j x(i_1+1,\dots,i_j,\dots,i_M+1) + \sum_{j=1}^{j=M} B_j u(i_1+1,\dots,i_j,\dots,i_M+1) \qquad /2.1/$$

z warunkami brzegowymi zadanymi na M-1 wymiarowej hiperpłaszczyźnie C_0 postaci $x(C_0) = x_0(C_0)$,

gdzie $u(i_1,\dots,i_j,\dots,i_M) \in R^m$ jest wektorem sterowań ,

$x(i_1,\dots,i_j,\dots,i_M) \in R^n$ jest wektorem stanu lokalnego ,

A_j , $j = 1,2,\dots,M$ są $n \times n$ wymiarowymi stałymi macierzami ,

B_j , $j = 1,2,\dots,M$ są $n \times m$ wymiarowymi stałymi macierzami ,

W pracy [10] rozpatrywany jest inny model układu M-D ,bazujący na tzw. modelu Roessera [13] postaci następującej :

$$x_j(i_1,\dots,i_j+1,\dots,i_M) = \sum_{k=1}^{k=M} \bar{A}_{jk} x_k(i_1,\dots,i_j,\dots,i_M) + \bar{B}_j u(i_1,\dots,i_j,\dots,i_M) \quad , j=1,2,\dots,M \qquad /2.2/$$

gdzie $x_j(i_1,\dots,i_j,\dots,i_M) \in R^{n_j}$,$j=1,2,\dots,M$

$\bar{A}_{jk}$, $j,k=1,2,\dots,M$ są $n_j \times n_k$ wymiarowymi stałymi macierzami,

$\bar{B}_j$, $j=1,2,\dots,M$ są $n_j \times m$ wymiarowymi stałymi macierzami,

$$n = \sum_{j=1}^{j=M} n_j$$

Wektor stanu lokalnego $\bar{x}(i_1,\dots,i_j,\dots,i_M)$ dla układu M-D o modelu /2.2/ jest postaci następującej [10], [13]:

$$\bar{x}(i_1,\dots,i_j,\dots,i_M) = \begin{bmatrix} x_1(i_1,\dots,i_j,\dots,i_M) \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_j(i_1,\dots,i_j,\dots,i_M) \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_M(i_1,\dots,i_j,\dots,i_M) \end{bmatrix} \in R^n \qquad /2.3/$$

Wykażemy, że model postaci /2.2/ jest szczególnym przypadkiem ogólnego modelu /2.1/ . Istotnie, przyjmując : $x(i_1,\dots,i_j,\dots,i_M) = \bar{x}(i_1,\dots,i_j,\dots,i_M)$,oraz

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 , \dots , 0 , \dots , 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \bar{A}_{j1},\dots , \bar{A}_{jk},\dots , \bar{A}_{jM} \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 , \dots , 0 , \dots , 0 \end{bmatrix} \qquad B_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \bar{B}_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad j=1,2,\dots,M$$

otrzymujemy poszukiwaną regułę transformacji.

Obecnie zajmiemy się transformacją układu dynamicznego M-D o modelu postaci /2.1/ do modelu liniowego,niestacjonarnego,o zmiennej strukturze układu 1-D . W tym celu wprowadza się następujące oznaczenia :

$$x_{s_1,s_2,\dots,s_M}(k) = \begin{bmatrix} x(s_1,s_2,\dots,s_{M-1},-S+s_M+k) \\ x(s_1,s_2,\dots,s_{M-1}-1,-S+s_M+k+1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x(-S+s_1+k+1,\ s_2-1,\dots,s_{M-1},s_M) \\ x(-S+s_1+k\ ,\ s_2\ ,\dots\dots,s_{M-1},s_M) \end{bmatrix} \in R^{n(S-k+1)} \quad k=0,1,\dots,S \qquad /2.4/$$

$$u_{s_1,s_2,\dots,s_M}(k) = \begin{bmatrix} u(s_1,s_2,\dots,s_{M-1}\ ,-S+s_M+k) \\ u(s_1,s_2,\dots,s_{M-1}-1,-S+s_M+k+1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u(-S+s_1+k+1,\ s_2-1,\dots,s_{M-1},s_M) \\ u(-S+s_1+k\ ,\ s_2\ ,\dots\dots,s_{M-1},s_M) \end{bmatrix} \in R^{m(S-k+1)} \quad k=0,1,\dots,S \qquad /2.5/$$

$$A_{s_1,s_2,\dots,s_M}(k) = \begin{bmatrix} A_1\ A_2\ \dots\ A_M\ 0\ 0\ \dots\dots\dots\ 0 \\ 0\ A_1\ A_2\ \dots\ A_M\ 0\ \dots\dots\dots\ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\ \dots\dots\dots\ 0\ A_1\ A_2\ \dots\ A_M\ 0 \\ 0\ \dots\dots\dots\ 0\ 0\ A_1\ A_2\ \dots\ A_M \end{bmatrix} \quad k=0,1,\dots,S-1 \qquad /2.6/$$

$A_{s_1,s_2,\dots,s_M}(k)$ są $n(S-k)\times n(S-k+1)$ wymiarowymi macierzami.

$$B_{s_1,s_2,\dots,s_M}(k) = \begin{bmatrix} B_1\ B_2\ \dots\ B_M\ 0\ 0\ \dots\dots\dots\ 0 \\ 0\ B_1\ B_2\ \dots\ B_M\ 0\ \dots\dots\dots\ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0\ \dots\dots\dots\ 0\ B_1\ B_2\ \dots\ B_M\ 0 \\ 0\ \dots\dots\dots\ 0\ 0\ B_1\ B_2\ \dots\ B_M \end{bmatrix} \quad k=0,1,\dots,S-1 \qquad /2.7/$$

$B_{s_1,s_2,\dots,s_M}(k)$ są macierzami $n(S-k)\times m(S-k+1)$ wymiarowymi.

Stosując oznaczenia /2.4/ - /2.7/ układ M-D o modelu /2.1/ można przedstawić jako liniowy,niestacjonarny ,o zmiennej strukturze układ 1-D postaci następującej :

$$x_{s_1,s_2,\dots,s_M}(k+1) = A_{s_1,s_2,\dots,s_M}(k)\, x_{s_1,s_2,\dots,s_M}(k) + B_{s_1,s_2,\dots,s_M}(k)\, u_{s_1,s_2,\dots,s_M}(k) \qquad k=0,1,\dots,S-1 \qquad /2.8/$$

z warunkiem początkowym $x_{s_1,s_2,\ldots,s_M}(0)$.

Ponieważ dalsze rozważania będą prowadzone dla ustalonego punktu $(s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_M)$ Z^M ,więc bez utraty ogólności stosowane będzie oznaczenie skrótowe $(s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_M) = S_M$.

W celu przedstawienia rozwiązania równania /2.8/ w zwartej postaci definiuje się tzw. macierz tranzycji $A_{S_M}(k,l)$ dla układu /2.8/ w następujący sposób [14], [15]:

$A_{S_M}(k,k) = I_{n(S-k+1)}$ $k = 0,1,2,\ldots,S$ /macierz jednostkowa o odpowiednim wymiarze /

$A_{S_M}(k,l) = A_{S_M}(k-1)A_{S_M}(k-2)\ldots A_{S_M}(l+1)A_{S_M}(l)$ dla $k > l \geqslant 0$

$A_{S_M}(k,l)$ są $n(S-k+1)$ $n(S-l+1)$ wymiarowymi macierzami.

$A_{S_M}(k,l)$ są niedefiniowalne dla $k < l \in Z$.

Używając macierzy tranzycji $A_{S_M}(k,l)$ można rozwiązanie równania /2.8/ przedstawić następująco [14],[15].

$$x_{S_M}(k) = A_{S_M}(k,0)x_{S_M}(0) + \sum_{l=0}^{l=k-1} A_{S_M}(k,l)B_{S_M}(l)u_{S_M}(l) \quad ,k=1,2,\ldots,S \quad /2.9/$$

Zatem do tak transformowanego układu M-D możemy stosować znaną z literatury teorię niestacjonarnych układów 1-D o zmiennej strukturze.Zostanie to wykorzystana do badania sterowalności oraz sterowania optymalnego tych układów.

3. Sterowalność.

Pojęcie sterowalności jest przydatnym narzędziem służącym do analizy dynamicznych układów sterowania, [14], [15]. W niniejszym podrozdziale rozpatrzymy lokalną sterowalność układów M-D zdefiniowaną w sposób następujący [10]:

Definicja 1. Układ dynamiczny /2.8/ nazywa się lokalnie sterowalnym w przedziale $[k_1,k_2]$,$(0 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant S)$,jeżeli dla dowolnego lokalnego stanu początkowego $\bar{x}(k_1) \in R^{n(S-k_1+1)}$ oraz dowolnego żądanego końcowego stanu lokalnego $\bar{x}_{S_M}(k_2) \in R^{n(S-k_2+1)}$,istnieje sekwencja sterowań $\{u_{S_M}(k_1), u_{S_M}(k_1+1), \ldots, u_{S_M}(k_2-2), u_{S_M}(k_2-1)\}$,taka, że odpowiadająca tej sekwencji sterowań trajektoria $x_{S_M}(k)$ układu /2.8/ spełnia następujący warunek końcowy :

$$x_{S_M}(k_2) = \bar{x}_{S_M}(k_2)$$

Wykorzystując znane z literatury rezultaty dotyczące sterowalności układów niestacjonarnych 1-D / patrz przykładowo [14], [15]/ ,można stosunkowo łatwo otrzymać warunki konieczne i wystarczające lokalnej sterowalności w przedziale $[k_1,k_2]$ układu M-D.

Twierdzenie 1. Układ /2.8/ jest lokalnie sterowalny w przedziale $[k_1,k_2]$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\text{rząd } W(k_1,k_2) = n(S - k_2 + 1) \qquad /3.1/$$

gdzie symetryczna $n(S-k_2+1)\times n(S-k_2+1)$ wymiarowa macierz sterowalności $W(k_1,k_2)$ jest zdefiniowana następująco :

$$W(k_1,k_2) = \sum_{l=k_1}^{l=k_2-1} A_{S_M}(k_2,l)B_{S_M}(l)B^T_{S_M}(l)A^T_{S_M}(k_2,l) \qquad /3.2/$$

Wniosek 1. Układ /2.8/ jest lokalnie sterowalny w przedziale $[k_1,k_2]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}\left[A_{S_M}(k_2,k_1)B_{S_M}(k_1) \,\vdots\, A_{S_M}(k_2,k_1+1)B_{S_M}(k_1+1) \,\vdots\, \dots \,\vdots\, A_{S_M}(k_2,k_2-2)B_{S_M}(k_2-2) \,\vdots\, A_{S_M}(k_2,k_2-1)B_{S_M}(k_2-1)\right] = n(S - k_2 + 1) \qquad /3.3/$$

Dowód. Oznaczając macierz występującą po lewej stronie równości /3.3/ jako $P(k_1,k_2)$,łatwo można wykazać,że

$$W(k_1,k_2) = P(k_1,k_2)P^T(k_1,k_2)$$

Zatem wniosek 1 jest prostą konsekwencją twierdzenia 1.

Wniosek 2. Lokalna sterowalność w przedziale $[k_1,k_2]$ implikuje lokalną sterowalność w przedziale $[h_1,h_2]$ dla każdych h_1 , h_2 spełniających następujące nierówności :

$$0 \leq h_1 \leq k_1 < k_2 \leq h_2 \leq S \qquad /3.4/$$

Dowód. Z równości /3.2/ wynika następująca nierówność :

$$\text{rząd } W(k_1,k_2) \leq \text{rząd } W(h_1,h_2).$$

Zatem lokalna sterowalność w przedziale $[k_1,k_2]$ implikuje lokalną sterowalność w przedziale $[h_1,h_2]$.

Twierdzenie 1 wynika bezpośrednio z /2.8/ oraz znanych [14], [15] warunków koniecznych i wystarczających sterowalności układów 1-D .

W przypadku, gdy dane jest również algebraiczne równanie wyjścia układu M-D ,można stosunkowo łatwo sformułować warunki konieczne i wystarczające, tzw. lokalnej wyjściowej sterowalności. Warunki te uzyskuje się w oparciu o znane kryteria wyjściowej sterowalności układów 1-D ,[15].

4. Sterowanie optymalne w układach M-D.

Wykorzystując znaną zasadę optymalności Bellmana [14],[15],w oparciu o model postaci /2.8/ można rozwiązać zagadnienie optymalnego regulatora dla układów M-D. Problem ten formułuje się w sposób następujący : Dla liniowego,stacjonarnego układu M-D postaci /2.1/ z warunkami brzegowymi $x_0(C_0)$,należy wyznaczyć $(s_1+1)(s_2+1)\ldots(s_M+1)-1$ wektorów sterowań $\{u(i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_M)\ ;(i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_M)\in D_{(s_1,s_2,\ldots,s_M)} - C_S^{(s_1,s_2,\ldots,s_M)}\}$,jako funkcji stanów lokalnych $x(i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_M)$, tak aby kwadratowy wskaźnik jakości

$$J_{s_1,s_2,\ldots,s_M}(x(i_1,i_2,\ldots,i_M),\ u(i_1,i_2,\ldots,i_M)) = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_M)\in D_{S_M}-C_0^{S_M}} x^T(i_1,i_2,\ldots,i_M)Q(i_1,i_2,\ldots,i_M)x(i_1,\ldots,i_M) + \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_M)\in D_{S_M}-C_S^{S_M}} u^T(i_1,i_2,\ldots,i_M)P(i_1,i_2,\ldots,i_M)u(i_1,\ldots,i_M) \qquad /4.1/$$

osiągał wartość minimalną, gdzie $Q(i_1,i_2,\ldots,i_M)$ są n×n wymiarowymi , symetrycznymi,nieujemnie określonymi macierzami , $P(i_1,i_2,\ldots,i_M)$ są m×m wymiarowymi,symetrycznymi,dodatnio określonymi macierzami.

W celu rozwiązania zagadnienia sterowania ze sprzężeniem zwrotnym w układach M-D należy transformować wskaźnik jakości $J_{s_1,s_2,\ldots,s_M}$ w podobny sposób jak równanie /2.1/. W tym celu wprowadza się następujące oznaczenia :

$$Q_{s_1,s_2,\ldots,s_M}(k) = Q_{S_M}(k) = \mathrm{diag}(Q(s_1,s_2,\ldots,s_{M-1},-S+s_M+k)\ ,$$
$$Q(s_1,s_2,\ldots,s_{M-1}-1,-S+s_M+k),\ldots,Q(-S+s_1+k+1\ ,\ s_2-1,\ldots,s_{M-1},s_M)\ ,$$
$$Q(-S+s_1+k,s_2,\ldots,s_{M-1},s_M)) \qquad k=1,2,\ldots,S \qquad /4.2/$$

$$P_{s_1,s_2,\ldots,s_M}(k) = P_{S_M}(k) = \mathrm{diag}(P(s_1,s_2,\ldots,s_{M-1}\ ,-S+s_M+k)\ ,$$
$$P(s_1,s_2,\ldots,s_{M-1}-1\ ,-S+s_M+k),\ldots,P(-S+s_1+k+1\ ,\ s_2-1,\ldots,s_{M-1},s_M)\ ,$$
$$P(-S+s_1+k,\ s_2,\ldots,\ s_{M-1}\ ,\ s_M)) \qquad k=0,1,\ldots,S-1 \qquad /4.3/$$

Zatem $Q_{S_M}(k)$ są $n(S-k+1)\times n(S-k+1)$ wymiarowymi, symetrycznymi,nieujemnie określonymi macierzami, $P_{S_M}(k)$ są $m(S-k+1)\times m(S-k+1)$ wymiarowymi,symetrycznymi,dodatnio określonymi macierzami.

Wykorzystując oznaczenia /2.4/,/2.5/,/4.2/ oraz /4.3/ można przedstawić kwadratowy wskaźnik jakości /4.1/ w następującej,bardziej przydatnej do dalszych rozważań,formie :

$$J_{s_1,s_2,\ldots,s_M}(\{x(i_1,i_2,\ldots,i_M)\},\{u(i_1,i_2,\ldots,i_M)\}) = J_{S_M}(\{x_{S_M}(k)\},\{u_{S_M}(k)\})$$

$$= \sum_{k=1}^{k=S} x^T_{S_M}(k)Q_{S_M}(k)x_{S_M}(k) + \sum_{k=0}^{k=S-1} u^T_{S_M}(k)P_{S_M}(k)u_{S_M}(k) \qquad /4.4/$$

Biorąc pod uwagę relacje /2.8/ oraz /4.4/ jest oczywiste,że problem optymalnego regulatora dla układów typu M-D może być sprowadzony do równoważnego problemu optymalnego regulatora dla liniowych,niestacjonarnych, o zmiennej strukturze układów typu 1-D.Zatem przy rozwiązywaniu problemu optymalnego regulatora dla układów typu M-D można bez utraty ogólności posługiwać się znanymi z literatury [14], [15] rezultatami dotyczącymi układów typu 1-D .

Twierdzenie 2. Optymalne sterowanie dla problemu /2.8/ oraz /4.4/, a tym samym dla problemu /2.1/ oraz /4.1/ jest dane następującym wzorem :

$$u^o_{S_M}(S-l-1) = -G(S-l)A_{S_M}(S-l-1)x_{S_M}(S-l-1) \qquad l=0,1,\ldots,(S-1) \qquad /4.5/$$

gdzie :

$$G(S-l) = (B^T_{S_M}(S-l-1)F(S-l)B_{S_M}(S-l-1) + P_{S_M}(S-l-1))^{-1}B^T_{S_M}(S-l-1)F(S-l) \qquad /4.6/$$

są $m(l+2)\times n(l+1)$ wymiarowymi macierzami,

$$F(S-l) = A^T_{S_M}(S-l)H(S-l+1)A_{S_M}(S-l) + Q_{S_M}(S-l) \qquad /4.7/$$

są $n(l+1)\times n(l+1)$ wymiarowymi macierzami ,

$$H(S-l) = F(S-l) - F(S-l)B_{S_M}(S-l-1)G(S-l) \qquad /4.8/$$

są $n(l+1)\times n(l+1)$ wymiarowymi macierzami.

Z powyższych zależności wynika,że optymalne sterowanie jest liniową funkcją stanu lokalnego,a ponadto kwadratowy wskaźnik jakości odpowiadający sterowaniu optymalnemu jest kwadratową funkcją początkowego stanu lokalnego $x_{S_M}(0)$, a mianowicie :

$$J^o_{S_M}(\{x_{S_M}(k)\},\{u^o_{S_M}(k)\}) = x^T_{S_M}(0)A^T_{S_M}(0)H(1)A_{S_M}(0)x_{S_M}(0) \qquad /4.9/$$

Podstawiając zależność /4.5/ do wzoru /2.8/ uzyskuje się równanie rekurencyjne dla stanu lokalnego $x_{S_M}(k)$, a mianowicie :

$$x_{s_M}(S-l) = (A_{s_M}(S-l-1) - B_{s_M}(S-l-1)G(S-l)A_{s_M}(S-l-1))x_{s_M}(S-l-1) \qquad /4.10/$$
$$l = 0,1,\ldots,(S-1)$$

W celu rozpoczęcia rekurencyjnych obliczeń należy najpierw założyć, że $H(S+1) = 0$. Następnie obliczenia przeprowadza się rekurencyjnie przy zmniejszającym się indeksie l .

Podobne rezultaty można uzyskać dla sterowania z ustalonym punktem końcowym,czyli dla tzw. problemu sterowania z minimalną energią [9], [11], [12]. Problem sterowania z minimalną energią może być sformułowany w sposób następujący :należy wyznaczyć sekwencję $(s_1+1)\ldots(s_j+1)\ldots(s_M+1) - 1$ wektorów sterowań $\{u(i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_M)$; $(i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_M)$ $D_{(s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_M)} - C_S^{(s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_M)}\}$ tak ,aby końcowy stan lokalny $x(s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_M)$ przyjmował z góry zadaną wartość c oraz aby kwadratowy wskaźnik jakości

$$J_{s_1,s_2,\ldots,s_M}(\{u(i_1,i_2,\ldots,i_M)\}) = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_M)\in D_{S_M} - C_S^{S_M}} u^T(i_1,i_2,\ldots,i_M)P(i_1,i_2,\ldots,i_M)u(i_1,i_2,\ldots,i_M) =$$
$$= \sum_{k=0}^{k=S-1} u_{S_M}^T(k)P_{S_M}(k)u_{S_M}(k) \qquad /4.11/$$

osiągał swoje minimum.

Rozwiązanie problemu sterowania z minimalną energią może być uzyskane na podstawie twierdzenia 2 ,przy dodatkowym założeniu,że rozpatrywany układ typu M-D jest lokalnie sterowalny w przedziale [0 , S] .

Zatem po prostych modyfikacjach,wykorzystując dodatkowo pewne zależności macierzowe podane w pracach [14] oraz [15] otrzymuje się następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. Niech rozpatrywany układ typu M-D będzie sterowalny w przedziale [0 , S]. Wówczas sterowanie optymalne dla problemu minimalno-energetycznego uzyskuje się na podstawie twierdzenia 2 podstawiając $Q(i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_M) = 0$ dla $(i_1,\ldots,i_j,\ldots,i_M)\in D_{S_M} - C_S^{S_M}$ oraz $Q(s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_M) = \infty I_{n\times n}$.

Należy zaznaczyć, że równania /4.5/ - /4.8/ mogą być przedstawione w postaci umożliwiającej określenie wzajemnych zależności pomiędzy optymalnym sterowaniem a macierzą lokalnej sterowalności zdefiniowaną relacją /3.2/. Wykorzystując tzw. zmodyfikowaną macierz sterowalności [11], [12], w pracach [11] oraz [12] sformułowano i udowodniono analityczną zależność określającą sterowanie z minimalną energią oraz podano wzór na wartość wskaźnika jakości odpowiadającą temu sterowaniu, w odniesieniu do układów typu 2-D. Rozszerzenie tych rezultatów na układy typu 3-D zawiera praca [9], gdzie wyznaczono również ogólną postać rozwiązania dla układów typu 3-D.

5. Układy typu 2-D.

Najczęściej spotykaną w praktyce klasą układów typu M-D są układy typu 2-D, opisane następującym, macierzowym równaniem różnicowym o stałych współczynnikach :

$$x(i_1+1,i_2+1) = A_1x(i_1+1,i_2) + A_2x(i_1,i_2+1) + B_1u(i_1+1,i_2)+B_2u(i_1,i_2+1), \qquad /5.1/$$

gdzie:

$u(i_1,i_2) \in R^m$ jest wektorem sterowania,

$x(i_1,i_2) \in R^n$ jest wektorem stanu lokalnego,

A_1, A_2, B_1, B_2 są stałymi macierzami o odpowiednich wymiarach, wynikających z wymiarów wektorów $x(i_1,i_2)$ oraz $u(i_1,i_2)$.

W celu rozwiązania równania /5.1/ należy zadać warunek brzegowy na prostej $i_1 + i_2 = 0$ / jest to jednowymiarowa hiperpłaszczyzna /. Warunek ten jest postaci następującej :

$$x(h,-h) = x_0(h) \quad , \quad h \in Z .$$

Zgodnie z zależnościami podanymi w podrozdziałach 2 oraz 3 macierz sterowalności dla układów typu 2-D jest postaci :

$$W(k_1,k_2) = \sum_{l=k_1}^{l=k_2-1} A_{s_1,s_2}(k_2,l)B_{s_1,s_2}(l)B^T_{s_1,s_2}(l)A^T_{s_1,s_2}(k_2,l), \qquad /5.2/$$

gdzie:

A_{s_1,s_2} oraz B_{s_1,s_2} są macierzami wyznaczonymi na podstawie wzorów /2.6/ oraz /2.7/.

Macierz sterowalności /5.2/ jest oczywiście macierzą symetryczną , $n(s_1+s_2-k_2+1)\times n(s_1+s_2-k_2+1)$ wymiarową.

Twierdzenie 1 oraz wnioski 1 i 2 pozostają w mocy, podobnie jak i rezultaty podrozdziału 4. Czytelnik pragnący dokładniej zaznajomić się z problematyką układów typu 2-D, znajdzie wyczerpujące omówienie tych zagadnień w pracach [2], [4], [6], [8], [10], [11], [13].

6. Podsumowanie.

W artykule sformułowano warunki konieczne i wystarczające lokalnej sterowalności układów typu M-D. Warunki te uzyskano w oparciu o odpowiednio zdefiniowaną macierz lokalnej sterowalności. Wykorzystując znane z literatury rezultaty dotyczące układów typu 1-D niestacjonarnych, rozwiązano kilka podstawowych problemów sterowania optymalnego układami typu M-D. Zasadniczą sprawą jest tutaj sformułowanie transformacji doprowadzającej układ typu M-D do niestacjonarnego, liniowego, o zmiennej strukturze układu typu 1-D.

Wyniki prezentowane w niniejszej pracy mogą być uogólnione na przypadek układów typu M-D opisanych w nieskończenie-wymiarowych przestrzeniach liniowych, np. w przestrzeniach Hilberta. Pracą traktującą o tych zagadnieniach w odniesieniu do układów typu 2-D jest publikacja [11]. Inne uogólnienie polega na możliwości rozpatrywania niestacjonarnych układów typu M-D, zarówno w przestrzeniach Euklidesowych, jak i w przestrzeniach Hilberta.

Istnieje również możliwość zastosowania do analizy i syntezy układów typu M-D metod ściśle algebraicznych, bazujących na teorii wielomianów M-zmiennych. Metody te zostały z powodzeniem zastosowane w odniesieniu do układów typu 2-D w pracach [1 - 3, 5, 6], oraz [7]. Zastosowanie metod algebraicznych pozwala na pewne uproszczenia zapisu oraz umożliwia otrzymanie zwartych i łatwo czytelnych zależności matematycznych.

W pracy [12] rozpatrywano zagadnienia sterowalności układów typu M-D opisanych za pomocą modelu Roessera [13], który jest szczególnym przypadkiem modelu /2.1/. Zatem rezultaty niniejszej pracy w odniesieniu do zagadnień sterowalności lokalnej są uogólnieniem wyników uzyskanych w pracy [12].

LITERATURA

[1] Eising R.:Realization and stabilization of 2-D systems, IEEE Transactions on Automatic Control,vol.AC-23,no.5,1978,str.793-799.

[2] Eising R.:Controllability and observability of 2-D systems,IEEE Transactions on Automatic Control,vol.AC-24,no.1,1979,str.132-133.

[3] Eising R.:Separability of 2-D transfer matrices, IEEE Transactions on Automatic Control,vol.AC-24,no.3,1979,str.508-510.

[4] Fornasini E, Marchesini G.:State-space realization theory of two-dimensional filters, IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-21,no.4,1976,str.484-492.

[5] Fornasini E, Marchesini G.:Computation of reachable and observable realizations of spatial filters,International Journal of Control, vol.25,no4,1977,str.621-635.

[6] Fornasini E, Marchesini G.:Doubly-indexed dynamical systems:state space models and structural properties, Mathematical System Theory, vol.12,no.1,1978,str.59-72.

[7] Kaczorek T.:Separability of transfer function matrices of 2-D linear systems by state feedbacks, International Journal of Control,vol.15, no.9,1982,str.1013-1018.

[8] Kaczorek T.:Pole assignment problem in two-dimensional linear systems International Journal of Control,vol.37,no.1,1983,str.183-190,

[9] Kaczorek T.:Minimum energy control of 3-D linear systems,Proceedings of IV Polish-English Seminar on Real Time Process Control,Jabłonna, 1983,str.137-152.

[10] Klamka J.:Controllability and optimal control of 2-D linear systems, Foundations of Control Engineering /w druku/.

[11] Klamka J.:Sterowalność układów dynamicznych typu 2-D,Zeszyty Naukowe Politechniki Sląskiej,zeszyt Automatyka,no.63,1982,str.51-68.

[12] Klamka J.:Controllability of M-dimensional linear systems, Foundations of Control Engineering,vol.8,no.2,1983,str.65-74.

[13] Roesser R.:A discrete state-space model for linear image processing, IEEE Transactions on Automatic Control,vol.AC-20,no.1,str.1-10.

[14] Sorenson H.:Kalman filtering techniques,Advances in Control Theory, Academic Press,New York,1966,str.219-192.

[15] Sorenson H.:Controllability and observability of linear,stochasic, time-discrete control systems,Advances in Control Theory,Academic Press,New York,1968,str.95-158.

Recenzent:Prof.dr hab.inż.Tadeusz Kaczorek
Wpłynęło do Redakcji do 30.03.1984r.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ ТИПА М - Д

Р е з ю м е

В статье представлено определение локальной управляемости системы типа М - Д. Показывается преобразование системы типа М - Д в линейную нестационарную , с переменной структурой, систему типа I - Д . Используя соответственным образом определённую матрицу управляемости , сформулированы необходимые и достаточные условия локальной управляемости системы типа М - Д . Рассмотрена также проблема оптимального управления при квадратном критерии качества для систем типа М - Д.

CONTROLLABILITY AND OPTIMAL CONTROL OF M-D SYSTEMS

S u m m a r y

In the paper a definition of local controllability for linear, time-invariant M-D system is given. Transformation mapping M-D system into linear, time-varying, variable structure 1-D system is proposed. Using appropriately defined controllability matrix, necessary and sufficient conditions for local controllability of M-D system are formulated. Moreover the optimal control problem with quadratic performance index for M-D systems is also considered.