ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: AUTOMATYKA z. 74 Nr kol. 810

Marek Libura
Instytut Badań Systemowych PAN
Warszawa

ZADANIA PROGRAMOWANIA DYSKRETNEGO Z PARAMETRYCZNĄ FUNKCJĄ CELU

Streszczenie. W pracy rozważane są zadania programowania dyskretnego z liniową parametryczną funkcją celu. Omówiona jest ogólna, znana metoda rozwiązywania tego typu zadań i proponowane są jej modyfikacje. Następnie dla zadań programowania całkowitoliczbowego liniowego z parametryzowanymi pojedynczymi współczynnikami funkcji celu podany jest algorytm rozwiązywania zadania parametrycznego w przypadku, gdy znane są wartości funkcji zaburzeń zadania przy zmianach prawych stron ograniczeń.

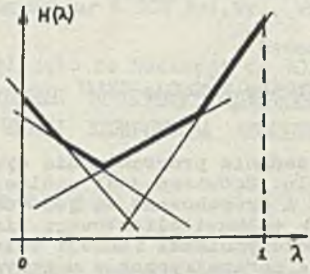
1. Wprowadzenie[o]

W praktycznych zastosowaniach programowania matematycznego rzadko mamy do czynienia z jednym zadaniem o ściśle określonych danych. Zwykle niepewność w określeniu parametrów zadania, a także przewidywana ich zmienność stwarzają konieczność rozwiązywania całej rodziny zadań różniących się elementami funkcji celu lub ograniczeń. Jest to celem tak zwanej analizy parametrycznej rozwiązań traktowanej jako część analizy pooptymalizacyjnej. Niektóre działy programowania matematycznego /na przykład programowanie liniowe ciągłe/ mają bardzo dobrze rozwiniętą analizę parametryczną, co decyduje o ich praktycznej użyteczności. W programowaniu dyskretnym metody analizy parametrycznej są jeszcze w początkowym stadium rozwoju.

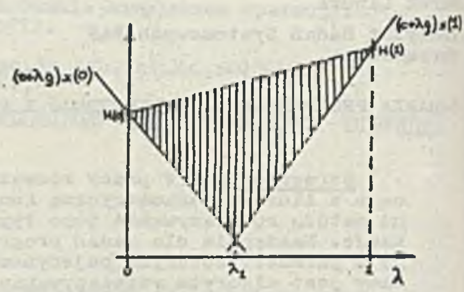
W pracy rozważane są zadania dyskretne z liniową funkcją celu, w których zbiór ograniczeń jest ustalony. Parametryzacji podlegają jedynie współczynniki funkcji celu, co prowadzi do następującej rodziny zadań parametrycznych:

$$H(\lambda) = \max_{x \in X} (c + \lambda g)\, x \qquad /P^{\lambda}/$$

gdzie $0 \leq \lambda \leq 1$ jest parametrem, $c, g \in \mathbb{R}^n$ są danymi wektorami, a X jest niepustym skończonym podzbiorem Z^n_+, gdzie Z^n_+ oznacza zbiór nieujemnych n-wymiarowych wektorów całkowitoliczbowych. Celem analizy parametrycznej jest wyznaczenie dla $\lambda \in [0,1]$ wartości $H(\lambda)$ oraz rozwiązań optymalnych $x(\lambda)$ jako funkcji parametru λ. Z dyskretności i skończoności zbioru X wynika, że funkcja H jako maksimum /punktowe/ skończonej liczby funkcji liniowych jest wypukłą, odcinkowo liniową funkcją parametru λ. Typowy przebieg $H(\lambda)$ przedstawiony jest na rysunku 1.



Rys.1. Przebieg funkcji $H(\lambda)$



Rys.2. Obszar niepewności po kroku 1°

2. Ogólna metoda rozwiązywania zadania parametrycznego

Wypukłość i odcinkowo liniowy charakter funkcji H są wykorzystywane w znanym podejściu do rozwiązywania zadania parametrycznego $/P^{\lambda}$ //patrz np. [1,4]/. Podejście to zakłada umiejętność znalezienia $H(\bar{\lambda})$ oraz $x(\bar{\lambda})$ dla ustalonego $\bar{\lambda} \in [0,1]$. Nie jest przy tym istotna metoda, jaką te wielkości są uzyskiwane. Postępowanie jest następujące:

1° Wyznaczane są rozwiązania zadania $/P^{\lambda}/$ dla $\lambda = 0$ i $\lambda = 1$. Otrzymuje się wartości $H(0)$, $H(1)$ oraz wektory $x(0)$, $x(1)$.

Z wypukłości funkcji H oraz faktu, że $x(0)$ i $x(1)$ dają oszacowanie dolne na $H(\lambda)$ wynika obszar niepewności co do przebiegu funkcji H /obszar zakreskowany na rys. 2 z wyłączeniem punktów $/0,H(0)/$ i $/1,H(1)//$. Dalsze postępowanie polega na powtarzaniu opisanego niżej kroku 2° i ma na celu zmniejszenie odstępu między oszacowaniem górnym i dolnym dla $H(\lambda)$. Procedura się kończy, jeśli ten odstęp dla każdego $\lambda \in (0,1)$ nie przekracza zadanego $\mathcal{E} \geqslant 0$.

2° Wybierany jest punkt λ', dla którego oszacowania górne i dolne dla H różnią się o więcej niż $\mathcal{E}$. Dla $\lambda = \lambda'$ wyznaczane jest rozwiązanie zadania $/P^{\lambda}/$.

Każde powtórzenie kroku 2° daje zmniejszenie obszaru niepewności co do przebiegu funkcji H. Jeśli na danym etapie postępowania znane są rozwiązania zadania $/P^{\lambda}/$ dla $\lambda = 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, 1$, to z wypukłości H wynika, że oszacowaniem górnym dla H jest łamana łącząca punkty $/0,H(0)/$, $/\lambda_1,H(\lambda_1)/,\ldots,/\lambda_k,H(\lambda_k)/$, $/1,H(1)/$. Oszacowaniem dolnym jest maksimum /punktowe/ funkcji liniowych $(c+\lambda g)x(\lambda)$, $\lambda = 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, 1$, co wynika bezpośrednio z dopuszczalności rozwiązań $x(\lambda)$. Rysunek 3 ilustruje sytuację jaka powstanie w omawianym przykładzie po rozwiązaniu zadania $/P^{\lambda}/$ dla $\lambda' = \lambda_1$.

Wybór punktu λ' w kroku 2^{o} jest w zasadzie dowolny; korzystne jednak wydaje się wybieranie tej wartości parametru, dla której odstęp między oszacowaniami górnym i dolnym dla H jest największy. Zauważmy, że równocześnie wybór taki odpowiada punktom załamań oszacowania dolnego dla H. Ocenimy liczbę powtórzeń kroku 2^{o} przy takim wyborze punktu λ' i przy założeniu, że zadanie parametryczne jest rozwiązywane dokładnie, to znaczy dla $\varepsilon = 0$. Zauważmy, że przy każdym wykonaniu kroku 2^{o} jest wyznaczony punkt /λ'; H (λ')/ należący do wykresu funkcji H. Mogą zajść dwa przypadki: /i/ punkt ten jest punktem załamania wykresu H(λ); /ii/ jest to punkt wewnętrzny któregoś z odcinków wykresu H(λ). Zatrzymanie procedury dla $\varepsilon = 0$ następuje w chwili pokrycia się oszacowań górnego i dolnego dla H. Do tej chwili liczba wystąpień przypadku /i/ musi być równa liczbie załamań r wykresu funkcji H, ponieważ wyzerowanie odstępu między tymi oszacowaniami w punkcie λ', odpowiadającym załamaniu wykresu funkcji H może nastąpić tylko w wyniku rozwiązania zadania /P^{λ}/ dla $\lambda = \lambda'$. Zatem minimalny nakład obliczeń mierzony liczbą rozwiązywanych zadań /P^{λ}/ przy dokładnym rozwiązywaniu zadania parametrycznego jest równy r + 2 /wliczając nakład obliczeń w kroku 1^{o}/. Dla oszacowania maksymalnego nakładu obliczeń zauważmy, że w kroku 2^{o} opisanego wyżej postępowania dla każdego odcinka łamanej będącej wykresem H /z wyjątkiem obu odcinków skrajnych/ może być wybrany co najwyżej jeden punkt wewnętrzny /w przypadku odcinków skrajnych żaden punkt wewnętrzny nie może być wybrany/. Tak istotnie jest, ponieważ wybranie punktu wewnętrznego λ' odcinka łamanej H(λ) powoduje dołączenie do zbioru prostych wyznaczających aktualne oszacowanie dolne dla H, prostej $H(\lambda) = (c + \lambda' g)x(\lambda')$.

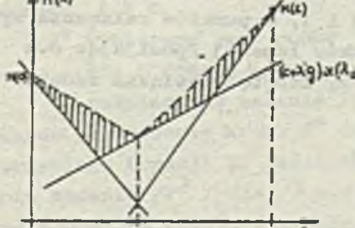
Każdy z generowanych potem w kroku 2^{o} punktów λ odpowiada punktowi załamania łamanej będącemu aktualnym oszacowaniem dolnym funkcji H. Punkt taki może się znaleźć albo poza odcinkiem łamanej odpowiadającym w wykresie H punktowi λ', albo może być końcem tego odcinka. Jeśli $r > 0$ jest liczbą punktów załamania wykresu H na odcinku $\langle 0,1 \rangle$, to liczba odcinków łamanej H jest równa r + 1. Zatem w najgorszym przypadku zadanie /P^{λ}/ trzeba będzie rozwiązać dla punktów $\lambda = 0$ i 1, r punktów załamania wykresu H oraz r - 1 punktów wewnętrznych odcinków łamanej /pomijając dwa odcinki skrajne/. Jeśli więc przez R oznaczymy liczbę rozwiązań zadania /P^{λ}/, to mamy:

$$r + 2 \leq R \leq 2r + 1$$

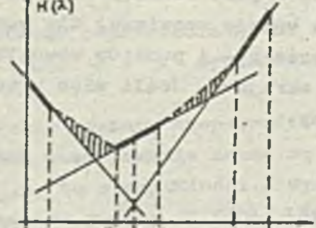
Wniosek:

Opisana wyżej procedura wyznaczania przebiegu funkcji H dla $\lambda \in [0,1]$ zakłada jedynie umiejętność obliczania wartości H(λ) oraz wyznaczania $x(\lambda)$ dla zadanego λ. Podejście powyższe można zmodyfikować, jeśli dysponujemy również możliwością prowadzenia przynajmniej częściowej analizy wrażliwości rozwiązania $x(\lambda)$.

Rozważmy sytuację, w której dla danego $\bar{\lambda}$ rozwiązano zadanie /$P^{\bar{\lambda}}$ / wyznaczając $H(\bar{\lambda})$ i $x(\bar{\lambda})$. Wówczas pełna analiza wrażliwości rozwiązania $x^{(\bar{\lambda})}$ ze względu na parametr λ polegałaby na wyznaczeniu przedziału $[\lambda^-, \lambda^+]$ wartości λ, dla którego $x(\bar{\lambda})$ pozostaje rozwiązaniem optymalnym. Byłoby to równoważne znalezieniu sąsiednich punktów załamania λ^- i λ^+ wykresu H takich, że $\lambda^- \leq \bar{\lambda} \leq \lambda^+$ i zlikwidowaniu niepewności co do przebiegu funkcji H na odcinku $[\lambda^-, \lambda^+]$. W praktyce rzadko dysponujemy możliwością pełnej analizy wrażliwości rozwiązania $x(\bar{\lambda})$. Ponadto analiza taka zwykle okazuje się zbyt pracochłonna. Często natomiast różnego rodzaju warunki dostateczne optymalności pozwalają na przeprowadzenie stosunkowo taniej obliczeniowo częściowej analizy wrażliwości otrzymanego rozwiązania. Wynikiem takiej analizy jest uzyskanie podzbiorów obszaru niewrażliwości rozwiązania $x(\bar{\lambda})$ na zmiany λ. Oznacza to, że zamiast przedziału $[\lambda^-, \lambda^+]$ wyznaczany jest przedział mniejszy $[\mu^-, \mu^+]$ taki, że $\lambda^- \leq \mu^- \leq \bar{\lambda} < \mu^+ \leq \lambda^+$. Z punktu widzenia omawianego podejścia do przybliżonego rozwiązania zadania parametrycznego wartość takiej częściowej analizy wrażliwości polega na tym, że z chwilą wyznaczenia przedziału $[\mu^-, \mu^+]$ wiadomo, że na tym odcinku oszacowanie górne H pokrywa się z aktualnym oszacowaniem dolnym, co prowadzi do zmniejszenia obszaru niepewności co do przebiegu funkcji H. Jeśli dla danego zadania częściowa analiza wrażliwości może być wykonywana znacznie mniejszym nakładem obliczeń niż uzyskiwanie rozwiązań w kroku 2°, to przy założonej dokładności ε rozwiązywania zadania parametrycznego takie podejście może być obliczeniowo korzystne na skutek zmniejszenia liczby powtórzeń kroku 2°. Rysunek 4 ilustruje sytuację, jaka może powstać w przykładzie przedstawionym na rys. 1,2,3, jeśli w wyniku częściowej analizy rozwiązań $x(0)$, $x(\lambda_1)$, $x(1)$ uzyskamy podobszary niewrażliwości $[0, \mu_1]$, $[\mu_2, \mu_3]$, $[\mu_4, 1]$. Jak poprzednio, obszar zakreskowany oznacza obszar niepewności co do przebiegu funkcji H.



Rys.3. Obszar niepewności po kroku 2°



Rys.4. Zmniejszenie obszaru niepewności po modyfikacji procedury

3. Parametryzacja pojedynczych współczynników funkcji celu

Opisane wyżej podejście może być również użyte w przypadku, gdy parametryzowane są tylko pojedyncze współczynniki funkcji celu. W niektórych przypadkach takie szczególne zadanie parametryczne może być jednak rozwiązane znacznie prościej. Tak jest na przykład wtedy, gdy znane są wartości funkcji zaburzeń zadania ze względu na zmiany prawych stron ograniczeń. Tym przypadkiem zajmiemy się w dalszej części pracy.
Rozważmy zadanie programowania dyskretnego w postaci

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \leq b \qquad /P/$$

$$x_i \in Z_+,\ i=1,\ldots,n$$

gdzie $b \in Z_+^m$, $f_i : Z_+ \to Z_+^m$. Załóżmy, że układ ograniczeń zadania wymusza ograniczenia górne na zmienne, tzn. $x_i \leq u_i$, $i=1,\ldots,n$.
Przyjmujemy dalej, że jeśli któreś z zadań programowania jest sprzeczne, wówczas jego wartość optymalna jest równa $-\infty$.

Będziemy zakładać, że dla zadania /P/ znana jest funkcja zaburzeń $G(y)$ dla $y \in Z_+^m$, $y \leq b$, gdzie

$$G(y) = \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \leq y$$

$$x_i \in Z_+,\ i=1,\ldots,n$$

Z taką sytuacją mamy do czynienia zwykle w przypadku, gdy zadanie /P/ jest rozwiązywane metodą programowania dynamicznego.
Załóżmy, że parametryzacji ulega tylko jeden współczynnik c_j /$j \in \{1,\ldots,n\}$/ funkcji celu i problem polega na wyznaczeniu dla zadanego przedziału $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ wartości funkcji H_j, gdzie

$$H_j(\tau) = \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \tau x_j$$

$$\sum_{i=1} f_i(x_i) \leq b \qquad /1/$$

$$x_i \in Z_+,\ i=1,\ldots,n.$$

oraz rozwiązań optymalnych odpowiadających tym wartościom τ.
Niech $v(P|x_j = k)$ oraz $v(P|x_j \geqslant k)$ oznaczają wartości optymalne zadania /P/ z dodatkowymi warunkami $x_j = k$ lub $x_j \geqslant k$ odpowiednio. Zauważmy, że z całkowitoliczbowości x_j wynika, że

$$H_j(\tau) = \max_{\substack{k \leqslant u_j \\ k \in Z_+}} \left\{ v(P|x_j = k) + k\tau \right\} \qquad /2/$$

Dla skorzystania z powyższej formuły konieczna jest znajomość wartości $v(P|x_j = k)$ dla całkowitych $k \leqslant u_j$. Po rozwiązaniu zadania /P/ dysponujemy tylko jedną wartością $v(P|x_j = x_j^*)$, gdzie x_j^* jest j-tym elementem rozwiązania optymalnego x^*. Co więcej, nie należy się zwykle spodziewać regularności w ciągu $v(P|x_j = k)$, $0 \leqslant k \leqslant u_j$, k całkowite. Ciąg ten, na przykład, nie jest zazwyczaj monotoniczny.

Z drugiej strony, znając wartości $G(y)$ dla $y \leqslant b$, y-całkowite, możemy łatwo wyznaczyć wartości ciągu $v(P|x_j \geqslant k)$, $0 \leqslant k \leqslant u_j$, k całkowite. Mamy bowiem dla $k \in Z_+$

$$v(P|x_j \geqslant k) = c_j k + G(b - f_j(k)) \qquad /3/$$

Niech

$$K_j = \left\{ k \in Z:\ x_j^* \leqslant k \leqslant u_j,\quad v(P|x_j \geqslant k) > v(P|x_j \geqslant k+1) \right\} \qquad /4/$$

Pokażemy, że dla wyznaczenia $H_j(\tau)$ przy $\tau \geqslant 0$ wystarczy znać wartości $v(P|x_j = k)$ dla $k \in K_j$. Co więcej, wartości te można łatwo obliczyć na podstawie ciągu $v(P|x_j \geqslant k)$, $0 \leqslant k \leqslant u_j$. Podstawą omawianego podejścia jest poniższy lemat.

<u>Lemat</u>: Zachodzą następujące zależności

$$v(P|x_j = k) \leqslant v(P|x_j \geqslant k) \quad \text{dla } 1 \leqslant k \leqslant u_j \qquad /5/$$

$$v(P|x_j = k) = v(P|x_j \geqslant k) \quad \text{dla } k \in K_j \qquad /6/$$

<u>Dowód</u>: Zależność /5/ wynika bezpośrednio z faktu, że zadanie /P/ z dodatkowym warunkiem $x_j \geqslant k$ jest relaksacją zadania /P/ z warunkiem $x_j = k$. Aby wykazać /6/ rozważmy $\bar{k} \in K_j$. Zauważmy, że z definicji K_j wynika, że $v(P|x_j \geqslant \bar{k}) > -\infty$. Mamy ponadto

$$v(P|x_j \geqslant \bar{k}) = \max\left\{ v(P|x_j = \bar{k}),\ v(P|x_j \geqslant \bar{k} + 1) \right\} \qquad /7/$$

Z definicji zbioru K_j wynika, że $v(P|x_j \geqslant \bar{k}) > v(P|x_j \geqslant \bar{k} + 1)$, a zatem z /7/ $v(P|x_j \geqslant \bar{k}) = v(P|x_j = \bar{k})$ c.n.d.

Wniosek Dla $\vartheta \geq 0$

$$H_j(\vartheta) = \max_{k \in K_j} \left\{ (c_j + \vartheta)k + G(b - f_j(k)) \right\} \qquad /8/$$

Dowód Z /3/ i /6/ wynika, że dla $k \in K_j$

$$v(P|x_j = k) + \vartheta k = (c_j + \vartheta)k + G(b - f_j(k))$$

Należy więc tylko pokazać, że w /2/ wystarczy brać maksimum po elementach $k \in K_j$ w miejsce maksimum po zbiorze $\widetilde{K} = \{ k \in Z_+ : k \leq u_j \}$.
Zauważmy, że w /2/ można od razu odrzucić wszystkie $k \leq x_j^*$, bowiem z optymalności x^* wynika, że dla dowolnego k $v(P|x_j = k) \leq v(P|x_j = x_j^*)$, a zatem dla $\vartheta \geq 0$ i $k \leq x_j^*$

$$v(P|x_j = k) + \vartheta k \leq v(P|x_j = x_j^*) + \vartheta x_j^*$$

Rozważmy teraz dowolne $\widetilde{k} \geq x_j^*$, $\widetilde{k} \notin K_j$.
Mogą zajść dwa przypadki:

1° $v(P|x_j = \widetilde{k}) = -\infty$, co oznacza, że zadanie /P/ z dodatkowym warunkiem $x_j = k$ jest sprzeczne, a zatem k może być w /2/ pominięte,

2° $v(P|x_j = \widetilde{k}) > -\infty$. W tym przypadku musi istnieć $\bar{k} \in K_j$ takie, że

/i/ $v(P|x_j = \bar{k}) = v(P|x_j \geq \bar{k})$

/ii/ $v(P|x_j = \bar{k}) \geq v(P|x_j = \widetilde{k})$

/iii/ $\bar{k} > \widetilde{k}$

Istotnie, z warunku $v(P|x_j = \widetilde{k}) > -\infty$ i z /5/ wynika, że $v(P|x_j \geq \widetilde{k}) > -\infty$. Ciąg $v(P|x_j \geq k)$, k całkowite, jest nierosnący, a x_j jest ograniczone z góry przez u_j. Musi więc istnieć $\bar{k} \in Z_+$, $\bar{k} \geq \widetilde{k}$ takie, że $v(P|x_j \geq \bar{k}) \geq v(P|x_j = \widetilde{k})$ oraz $v(P|x_j \geq \bar{k}) > v(P|x_j \geq \bar{k} + 1)$. Oznacza to, że $\bar{k} \in K_j$, a stąd na podstawie /6/ $v(P|x_j = \bar{k}) = v(P|x_j \geq \bar{k})$. Ponieważ z założenia $\widetilde{k} \notin K_j$, zatem musi być $\bar{k} > \widetilde{k}$. Z warunków /ii/ i /iii/ wynika teraz, że $\widetilde{k}$ można pominąć w /2/, bowiem dla $\vartheta \geq 0$

$$v(P|x_j = \widetilde{k}) + \widetilde{k}\vartheta \leq v(P|x_j = \bar{k}) + \bar{k}\vartheta \qquad \text{c.n.d.}$$

Znając K_j i korzystając z /8/ można przedstawić informację o przebiegu odcinkowo liniowej funkcji H_j w postaci ciągu par (ϑ_i, ξ_i), $i=1,\ldots,I$, gdzie I jest liczbą odcinków wykresu H_j w przedziale $(0, \bar{\vartheta})$, ϑ_i jest prawym krańcem i-tego odcinka /odpowiadającym i-temu punktowi załamania wykresu H_j/, natomiast ξ_i jest optymalną wartością x_j w przedziale $[\vartheta_{i-1}, \vartheta_i]$ /odpowiadającą nachyleniu wykresu H_j/. Przyjmujemy, że $\vartheta_0 = 0$. Rozwiązaniem optymalnym w punkcie ϑ_0 jest x. Poniższy algorytm generuje ciąg par (ϑ_i, ξ_i) korzystając z wartości $G(b)$ oraz K_j jako danych wejściowych.

Algorytm

1° /Inicjalizacja/ $i:=1$;

$s:=\min\{k:\ k\in K_j\}$; $S:=K_j\setminus\{s\}$; $\varrho_1:=s$;

Jeśli $S=\emptyset$, to $\tau_1:=\bar{\tau}$, STOP ;

2° /Obliczanie τ_i/ Dla $k\in S$ oblicz

$$q(k)=\frac{c_j(s-k)+G(b-f_j(s))-G(b-f_j(k))}{k-s};$$

$\tau_i:=\min\limits_{k\in S} q(k)$;

Jeśli $\tau_i\geqslant\bar{\tau}$, to STOP ;

$i:=i+1$;

3° /Obliczanie ϱ_i i redukcja S/

$s:=\max\{k\in S:\ q(k)=\tau_{i-1}\}$;

Usuń z S wszystkie k takie, że $k\leqslant s$;

Usuń z S wszystkie k, dla których istnieje $j>k$ takie, że $q(j)\leqslant q(k)$; $\varrho_i:=s$;

Jeśli $S=\emptyset$ wówczas $\tau_i:=\bar{\tau}$, STOP;

Idź do 2°

Omówione podejście zilustrujemy na przykładzie całkowitoliczbowego liniowego zadania załadunku:

$$\max\{11x_1+7x_2+5x_3+x_4\}$$
$$6x_1+4x_2+3x_3+x_4\leqslant 25$$
$$x_1,\dots,x_4\geqslant 0 \text{ całkowite.}$$

Zauważmy, że ograniczenia zadania implikuje następujące ograniczenia na zmienne: $x_1\leqslant 4$, $x_2\leqslant 6$, $x_3\leqslant 8$, $x_4\leqslant 25$. Funkcje f_i są liniowe; mamy: $f_1(x_1)=6x_1$, $f_2(x_2)=4x_2$, $f_3(x_3)=3x_3$, $f_4(x_4)=x_4$.

Zadanie załadunku jest typowym problemem, który może być rozwiązywany metodą programowania dynamicznego /patrz [3]/. Równocześnie z wyznaczeniem rozwiązania optymalnego otrzymujemy wartości funkcji zaburzeń G. Dla podanego wyżej przykładu rozwiązaniem optymalnym jest wektor $x^*=(3,1,1,0)$. Wartości funkcji G(b) podane są w tabeli 1.

Tabela 1

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
G(b)	0	1	2	5	7	8	11	12	14	16	18	19	22	23	25	27	29	30	33

b	19	20	21	22	23	24	25
G(b)	34	36	38	40	41	44	45

Załóżmy, że parametryzacji podlega współczynnik c_3 w funkcji celu i należy wyznaczyć przebieg $H_3(\gamma)$ dla $0 \leq \gamma \leq \bar{\gamma} = 2$. Wymaga to znalezienia zbioru K_3 na podstawie ciągu $v(P|x_3 \geq k)$; tabela 2 podaje obliczane zgodnie z /3/ wartości $v(P|x_3 \geq k)$ dla $k=0,\dots,9$.

Tabela 2

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$v(P\|x_3 \geq k)$	45	45	44	44	43	43	42	42	41	$-\infty$

Zgodnie z /4/ otrzymujemy $K_3 = \{1,3,5,7,8\}$, a zatem

$$H_j(\gamma) = \max_{k \in K_j} \{(5 + \gamma)k + G(25 - 3k)\}$$

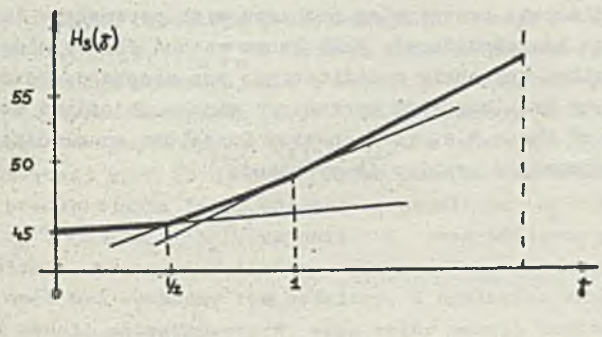
Stosując podany wyżej algorytm otrzymujemy następujący ciąg par (γ_i, ϱ_i): $(\gamma_1, \varrho_1) = (1/2, 1)$, $(\gamma_2, \varrho_2) = (1,7)$, $(\gamma_3, \varrho_3) = (2,8)$.

Pozwala to odczytać wartość j-tej składowej rozwiązania optymalnego dla każdej wartości $0 \leq \gamma \leq \bar{\gamma}$. Mając te wartości optymalne oraz wyniki pośrednie z rozwiązania zadania metodą programowania dynamicznego, można w prosty sposób odtworzyć pozostałe elementy wektora rozwiązań optymalnych odpowiadających poszczególnym wartościom ϱ_i /patrz [3] rozdz.6/. Pominiemy tu szczegóły tych obliczeń. Pełne rozwiązanie zadania parametrycznego przedstawia tabela 3.

Tabela 3

przedział	rozwiązanie optymalne	$H_3(\gamma)$
$0 \leq \gamma \leq 1/2$	(3,1,1,0)	$45 + \gamma$
$1/2 \leq \gamma \leq 1$	(0,1,7,0)	$42 + 7\gamma$
$1 \leq \gamma \leq 2 = \bar{\gamma}$	(0,0,8,1)	$41 + 8\gamma$

Przebieg funkcji $H_3(\gamma)$ pokazano na rysunku 5.



Rys.5. Wykres funkcji H_3

LITERATURA

[1] Eisner M.J., Severence D.G.: Mathematical techniques for efficient record segmentation in large shared databases. J. ACM 23 1976 , pp. 619-635

[2] Jenkins L.: Parametric mixed integer programming: An application to solid waste management. Manag. Sci. 28 1982 1270-1284

[3] Garfinkel R.S., Nemhauser G.L.; Programowanie całkowitoliczbowe. PWN, Warszawa 1978

[4] Geoffrion A.M., Nauss R.: Parametric and postoptimality analysis in integer programming. Manag. Sci. 23 1977 , pp. 453-466

Recenzent: Prof.dr hab.inż.Antoni Niederliński

Wpłynęło do Redakcji do 30.03.1984r.

ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Р е з ю м е

В работе рассматриваются задачи дискретного программирования с линейной параметрической целевой функцией. Представлен общий метод решения таких задач и его модиффикации. Для задач целочисленного линейного программирования с одним параметризованным целевым коэффициентом, предложен алгоритм решения параметрической задачи в случае, когда известны решения исходной проблемы при возмущениях правых сторон ограничений.

DISCRETE PROGRAMMING PROBLEMS WITH PARAMETRIC OBJECTIVE FUNCTION

S u m m a r y

In the paper discrete programming problems with parametric linear objective function are considered. Well known method for solving such problems is described and their modifications are proposed. Moreover for integer programming problems with parametric single objective coefficients and known values of the r.h.s. perturbation functions an algorithm to solve parametric programming problem is proposed.