ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: AUTOMATYKA z. 74 Nr kol. 810

Ewa Skubalska

Politechnika Wrocławska
Instytut Cybernetyki Technicznej

O PEWNYM PROBLEMIE MINIMALNO-KOSZTOWEGO SZEREGOWANIA OPERACJI NIEPODZIELNYCH NA IDENTYCZNYCH MASZYNACH

Streszczenie. Rozważany jest problem ustalania harmonogramu realizacji n niezależnych operacji wykonywanych na M równoległych maszynach przy kryterium minimalizacji sumarycznych kosztów realizacji operacji. Sformułowano model matematyczny zagadnienia jako problem całkowitoliczbowego przepływu z mnożnikami oraz algorytm rozwiązania oparty na schemacie metody podziału i ograniczeń.

1. Sformułowanie problemu

Dany jest zbiór n niezależnych operacji $J = \{1,...,n\}$, które mogą być wykonywane na M identycznych, równoległych maszynach. Wszystkie operacje podzielone są na K podzbiorów identycznych operacji /typów operacji/. Niech q_i; $i = 1,...,k$; oznacza liczbę operacji i-tego typu, natomiast p_i, $i = 1,...,k$; oznacza czas wykonywania operacji i-tego typu na dowolnej maszynie. Każda maszyna może w danym momencie czasowym wykonywać dokładnie jedną operację. Przyjmuje się, że wszystkie operacje muszą zostać zrealizowane w przedziale czasowym $[0,T]$.

Dla każdego typu operacji $i = 1,...,k$ zdefiniowana jest dyskretna funkcja $k_i(t) \in R_+ \cup \{0\}$, $t = 1,...,T$, określająca koszt realizacji operacji typu i, jeśli jej wykonywanie rozpoczęto w momencie czasowym t, a zakończono w momencie $t+p_i$. Na postać funkcji $k_i(t)$ nie zostały nałożone żadne dodatkowe warunki.

Zagadnienie optymalizacji polega na ustaleniu kolejności wykonywania operacji na poszczególnych maszynach oraz określeniu czasów rozpoczęcia /a tym samym zakończenia/ realizacji operacji, tak by minimalizować sumaryczne koszty wykonywania wszystkich operacji.

W pracy przedstawiono model matematyczny zagadnienia, który jest problemem całkowitoliczbowego przepływu z mnożnikami w sieci dynamicznej o specjalnej strukturze oraz algorytm rozwiązania oparty na schemacie metody podziału i ograniczeń. Działanie algorytmu zilustrowano przykładem.

Ponadto w pracy pokazano sposób uogólnienia proponowanego modelu przepływowego na przypadek zagadnienia z dedykowanymi maszynami.

Istnieje szereg algorytmów optymalizacji kolejności operacji z kryterium minimalizacji kosztów [3], dotyczą one jednak zagadnień, w których nakłada się bardzo ścisłe ograniczenia na postać funkcji kosztów. W proponowanym w pracy podejściu ograniczenia te nie występują. Jednakże należy stwierdzić, że ocena praktycznej efektywności zaproponowanych modeli i zakresu ich zastosowania wymaga dalszych badań eksperymentalnych.

2. Model matematyczny

Wprowadźmy następujące zmienne decyzyjne:

$b(t)$-liczba maszyn nie wykorzystywanych w przedziale czasowym $[t,t+1]$, przy czym zakładamy, że $b(0) = b(T) = M$,

oraz zmienne binarne

$$r_{il}(t) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli rozpoczęcie wykonywania operacji i-tego typu przez l-tą maszynę następuje w momencie } t, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku;} \end{cases}$$

$$\bar{r}_{il}(t) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli maszyna l-ta zostanie zwolniona w momencie czasowym } t+p_i, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku;} \end{cases}$$

$$d_{il}(t) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli pewna operacja i-tego typu została wykonana przez maszynę l-tą w przedziale czasowym } [t,t+p_i], \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Ze względu na równoległość maszyn, ich numeracja jest sprawą czysto umowną i może ulegać zmianie w każdym z momentów czasowych $t = 1,\dots,T$.

Model matematyczny zagadnienia możemy sformułować w następującej postaci:

$$\sum_{i=1}^{K} \sum_{t=1}^{T-p_i} k_i(t) \left(\sum_{l=1}^{M} d_{il}(t) \right) \longrightarrow \min \qquad /1/$$

przy ograniczeniach

$$b(t) + \sum_{i=1}^{K} \sum_{l=1}^{M} r_{il}(t) = b(t-1) + \sum_{i=1}^{K} \sum_{l=1}^{M} \bar{r}_{il}(t-p_i), \quad t=1,\dots,T; \qquad /2/$$

$$b(0) = b(T) = M;$$

$$r_{il}(t) = \bar{r}_{il}(t), \quad l=1,\dots,M; \ t=1,\dots,T-p_i; \ i=1,\dots,K; \qquad /3/$$

$$d_{il}(t) = r_{il}(t), \quad l=1,\dots,M; \ t=1,\dots,T-p_i; \ i=1,\dots,K; \qquad /4/$$

$$0 \leqslant b(t) \leqslant M, \quad t=1,\dots,T-1 \qquad /5/$$

$$0 \leqslant r_{il}(t) \leqslant 1; \ l=1,\dots,M; \ t=1,\dots,T-p_i; \ i=1,\dots,K; \qquad /6/$$

$$0 \leqslant \bar{r}_{il}(t) \leqslant 1; \ l=1,\dots,M; \ t=1,\dots,T-p_i; \ i=1,\dots,K; \qquad /7/$$

$$0 \leqslant d_{il}(t) \leqslant 1,\ l=1,\ldots,M;\ t=1,\ldots,T-p_i;\ i=1,\ldots,K; \qquad /8/$$

$$\sum_{t=1}^{T-p_i} \sum_{l=1}^{M} d_{il}(t) = q_i;\ i=1,\ldots,K \qquad /9/$$

$r_{il}(t),\ \bar{r}_{il}(t),\ d_{il}(t),\ b(t)$ - całkowitoliczbowe.

W celu uproszczenia zapisu zakłada się, że wszystkie zmienne przyjmują w modelu wartość równą zeru dla $t \leqslant 0$. Ograniczenia postaci /2/ oznaczają, że suma liczby maszyn niewykorzystanych w przedziale czasowym $[t,t+1]$ oraz liczby maszyn, które rozpoczęły realizację operacji w momencie t, musi być równa sumie liczby maszyn niewykorzystywanych w poprzednim przedziale czasowym $[t-1,t]$ oraz liczby maszyn, które zostały zwolnione /zakończyły realizację operacji/ w momencie t.

Wprowadzenie dodatkowych zmiennych $r_{il}(t)$ oraz $\bar{r}_{il}(t)$, ściśle związanych z wartością zmiennej $d_{il}(t)$, pozwala na uzyskanie, po pewnych przekształceniach, specjalnej, "przepływowej" struktury ograniczeń.

Ponieważ zmienne $d_{il}(t)$, $r_{il}(t)$ oraz $\bar{r}_{il}(t)$ są zmiennymi binarnymi, stąd ograniczenia /3/ i /4/ można zastąpić jednym ograniczeniem postaci:

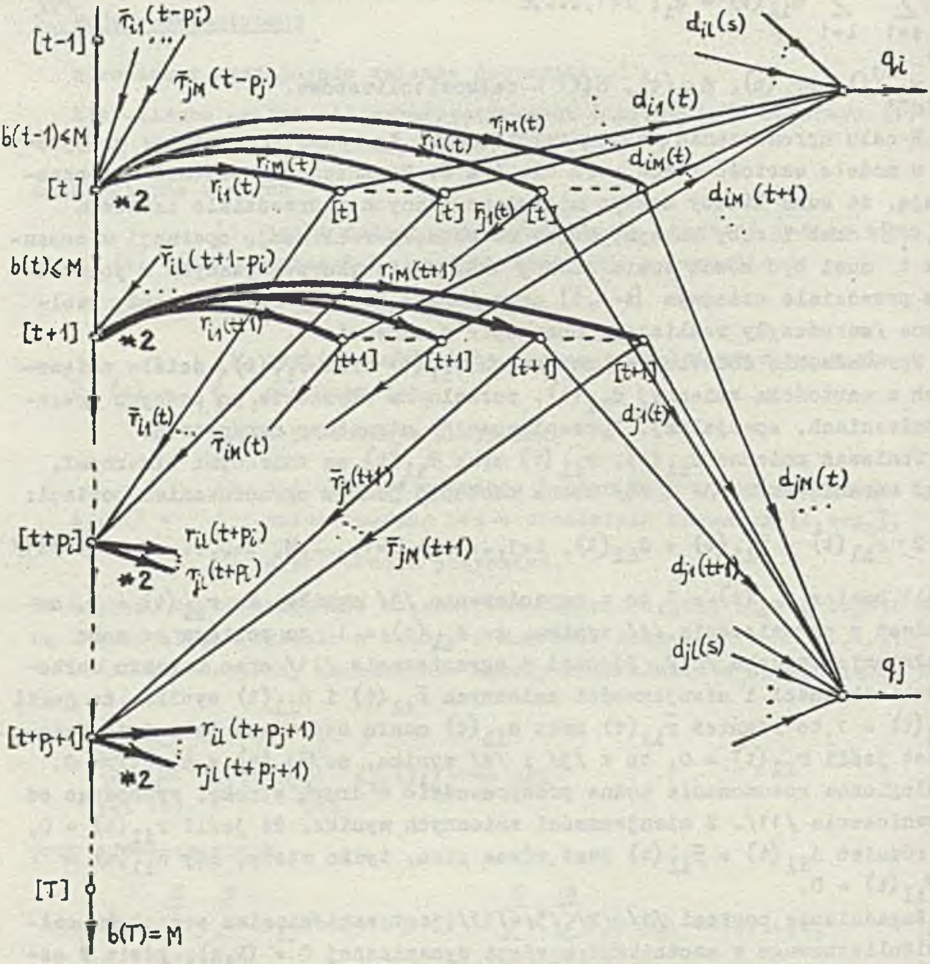
$$2 \cdot r_{il}(t) = \bar{r}_{il}(t) + d_{il}(t),\ i=1,\ldots,K;\ l=1,\ldots,M,\ t=0,\ldots,T \qquad /11/$$

Jeśli bowiem $r_{il}(t) = 1$, to z ograniczenia /3/ wynika, że $\bar{r}_{il}(t) = 1$, natomiast z ograniczenia /4/ wynika, że $d_{il}(t) = 1$, co pociąga za sobą spełnienie warunku /11/. Również z ograniczenia /11/ oraz warunku całkowitoliczbowości i nieujemności zmiennych $\bar{r}_{il}(t)$ i $d_{il}(t)$ wynika, że jeśli $r_{il}(t) = 1$, to również $\bar{r}_{il}(t)$ oraz $d_{il}(t)$ muszą być równe jedności. Natomiast jeśli $r_{il}(t) = 0$, to z /3/ i /4/ wynika, że $\bar{r}_{il}(t) = d_{il}(t) = 0$. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić w drugą stronę, wychodząc od ograniczenia /11/. Z nieujemności zmiennych wynika, że jeśli $r_{il}(t) = 0$, to również $d_{il}(t) + \bar{r}_{il}(t)$ jest równe zeru, tylko wtedy, gdy $d_{il}(t) = \bar{r}_{il}(t) = 0$.

Zagadnienie postaci /1/,/2/,/5/-/11/ jest zagadnieniem przepływu całkowitoliczbowego z mnożnikami w sieci dynamicznej G = (N,A), gdzie N oznacza zbiór wierzchołków sieci, a A zbiór łuków. Strukturę sieci G = (N,A) przedstawiono na rysunku 1.

Każdemu łukowi sieci G = (N,A) przyporządkowana jest jednoznacznie jedna ze zmiennych decyzyjnych $b(t)$, $d_{il}(t)$, $r_{il}(t)$ $\bar{r}_{il}(t)$. Natomiast wierzchołki sieci odpowiadają ograniczeniom /2/,/9/,/11/. Koszt przepływu przez łuki odpowiadające zmiennym $b(t)$, $r_{il}(t)$ oraz $\bar{r}_{il}(t)$ jest równy zeru, natomiast koszt przepływu w łukach odpowiadających zmiennym $d_{il}(t)$ jest równy $k_i(t)$, $i=1,\ldots,K$. Przepustowości łuków opisują ograniczenia /5/-/8/. Łuki zaznaczone na rysunku 1 grubszą linią odpowiadają zmiennym $r_{il}(t)$ i przepływ w tych łukach ulega podwojeniu /porównaj ograniczenia /11//.

Momenty czasowe związane z poszczególnymi wierzchołkami sieci $G = (N,A)$ umieszczono na rysunku w nawiasach klamrowych.



Rys. 1. Fragment sieci dynamicznej $G = (N,A)$.

Istnieje szereg algorytmów rozwiązywania zagadnień przepływów z mnożnikami [1,2,4,5]. Algorytmy te nie gwarantują jednak całkowitoliczbowości rozwiązań.

3. Zagadnienie z różnymi maszynami

Rozważmy analogiczny problem kolejnościowy z różnymi /nierównoległymi/ maszynami. Niech p_{il} oznacza czas wykonywania operacji i-tego typu na l-tej maszynie, natomiast $k_{il}(t)$ niech oznacza koszt realizacji operacji i-tego typu na l-tej maszynie, jeśli rozpoczęto jej wykonywanie w momencie t.

Zamiast zmiennej decyzyjnej $b(t)$, $t=0,\dots,T$; wprowadźmy binarne zmienne decyzyjne:

$$b_l(t) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli maszyna l-ta nie jest wykorzystywana w przedziale czasowym } [t,t+1], \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku;} \end{cases}$$

pozostałe zmienne decyzyjne nie ulegają zmianie.

Model matematyczny zagadnienia z różnymi maszynami ma wtedy postać:

$$\sum_{i=1}^{K} \sum_{l=1}^{M} \sum_{t=1}^{T-p_{il}} d_{il}(t) \cdot k_{il}(t) \longrightarrow \min \qquad /12/$$

przy ograniczeniach

$$b_l(t) + \sum_{i=1}^{K} r_{il}(t) = b_l(t-1) + \sum_{i=1}^{K} \bar{r}_{il}(t-p_{il}) \qquad /13/$$

$$b_l(0) = b_l(T) = 1, \quad l=1,\dots,M; \quad t=1,\dots,T$$

$$2r_{il}(t) = \bar{r}_{il}(t) + d_{il}(t), \quad t=1,\dots,T-p_i; \quad l=1,\dots,M; \quad i=1,\dots,K; \qquad /14/$$

$$0 \leqslant b_l(t) \leqslant 1, \quad l=1,\dots,M; \quad t=1,\dots,T-1 \qquad /15/$$

$$0 \leqslant \begin{Bmatrix} r_{il}(t) \\ \bar{r}_{il}(t) \\ d_{il}(t) \end{Bmatrix} \leqslant 1, \quad t=1,\dots,T-p_{il}; \quad l=1,\dots,M; \quad i=1,\dots,K \qquad /16/$$

$$r_{il}(t),\ \bar{r}_{il}(t),\ d_{il}(t),\ b_l(t); \ \text{całkowitoliczbowe} \qquad /17/$$

Zagadnienie z maszynami nierównoległymi wymaga dalszej rozbudowy sieci dynamicznej przedstawiającej strukturę jego ograniczeń w modelu "przepływowym".

Wszystkie prowadzone dalej w pracy rozważania będą dotyczyły zagadnienia /1/-/10/ z maszynami równoległymi. Bez większego trudu mogą być one jednak uogólnione na przypadek z różnymi maszynami.

4. Dolne oszacowanie

Jeśli w modelu /1/,/2/,/5/-/11/ pominiemy warunki całkowitoliczbowe zmiennych /10/ oraz jeśli ograniczenie postaci $b(0) = M$, zastąpimy warunkiem $b(0) \leqslant M$, wówczas otrzymamy zagadnienie wyznaczania przepływu minimalnokosztowego o wartości $M + \sum q_i$ /w odpływie/ w sieci z mnożnikami. Zagadnienie to będzie dalej oznaczane jako problem PM.

Zagadnienie PM jest naturalnie zagadnieniem programowania liniowego, jednakże jego specyficzna /"sieciowa"/ struktura ograniczeń pozwala na zastosowanie wyspecjalizowanych algorytmów przepływowych, które wymagają mniejszego obszaru pamięci m.c. niż ogólne algorytmy programowania liniowego [6].

Wartość funkcji celu rozwiązania optymalnego problemu PM /który jest relaksacją problemu wyjściowego/ jest dolnym oszacowaniem wartości funkcji celu problemu /1/-/10/.

5. Algorytm

Algorytm rozwiązania zagadnienia /1/-/10/ oparty jest na schemacie metody podziału i ograniczeń ze strategią podziału z kolejnego węzła [6].

Załóżmy, że mamy dane rozwiązanie optymalne zagadnienia przepływu z mnożnikami PM. Jeśli jest to rozwiązanie spełniające warunki całkowitoliczbowości /10/, jest ono również rozwiązaniem optymalnym badanego problemu. Zazwyczaj jednak pewne zmienne $d_{il}(t)$, $r_{il}(t)$, $\bar{r}_{il}(t)$, $b(t)$ w rozwiązaniu optymalnym zagadnienia PM nie przyjmują wartości całkowitych. Niech $d^{*}_{il}(t)$ /$t=1,\dots,T-p_i$; $l=1,\dots,M$; $i=1,\dots,K$/ oznaczają wartości zmiennych $d_{il}(t)$ otrzymane w rozwiązaniu optymalnym problemu PM. Mogą przy tym zachodzić dwa różne przypadki:

A. Niektóre wartości $d^{*}_{il}(t)$ są niecałkowitoliczbowe.

B. Wszystkie wartości $d^{*}_{il}(t)$ są równe zeru bądź jedności, jednakże wartości pewnych zmiennych $r_{il}(t)$, $\bar{r}_{il}(t)$, $b(t)$ nie są całkowitoliczbowe.

Przypadek B wymaga odrębnego rozważenia, gdyż w pewnych sytuacjach całkowitoliczbowe wartości $d^{*}_{il}(t)$ wyznaczają rozwiązanie dopuszczalne problemu /1/-/10/, o takiej samej wartości funkcji celu, jak w rozwiązaniu problemu PM.

Utwórzmy rozwiązanie:

$$r_{il}(t) = \bar{r}_{il}(t) = d^{*}_{il}(t);\; t=1,\dots,T-p_i;\; l=1,\dots,M;\; i=1,\dots,K; \qquad /18/$$

$$b(0) = M;$$
$$b(t) = b(t-1) + \sum_{i=1}^{K}\sum_{l=1}^{M}\bar{r}_{il}(t-p_i) - \sum_{i=1}^{K}\sum_{l=1}^{M} r_{il}(t);\; t=1,\dots,T; \qquad /19/$$

Otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem optymalnym zagadnienia /1/-/10/, jeśli wyznaczone według reguły /19/ wartości zmiennych $b(t)$ spełniają ograniczenia $0 \leqslant b(t) \leqslant M$, $t=1,\dots,T-1$ oraz $b(T) = M$.

W przypadku, gdy nie uzyskaliśmy rozwiązania całkowitoliczbowego problemu PM dokonywany jest podział zagadnienia na dwa dopełniające podproblemy. Jako podstawę tworzenia podziału przyjęto wartości zmiennych $d^{*}_{il}(t)$. A mianowicie, wybieramy dowolną zmienną $d^{*}_{vp}(s) \neq 0$ i zagadnienie /1/-/10/

rozbijamy na dwa podproblemy:

1. Podproblem P_x, w którym $d_{vp}(s) = 0$;
2. Podproblem P_y, w którym $d_{vp}(s) = 1$.

W przypadku podproblemu P_x ustalenie, że $d_{vp}(s) = 0$, pociąga za sobą: usunięcie z sieci $G = (N,A)$ łuków odpowiadających zmiennym $d_{vp}(s)$, $r_{vp}(s)$, $\bar{r}_{vp}(s)$, bądź /co nie jest całkiem równoważne/ przydzielenie bardzo dużego kosztu przepływu w łuku odpowiadającym zmiennej $d_{vp}(s)$.

W przypadku 2. ustalenie $d_{vp}(s) = 1$ oznacza, że żadne z operacji wykonywanych przez p-tą maszynę nie może być rozpoczęta wcześniej niż w momencie zakończenia wykonywania operacji typu v, to znaczy w momencie $s+p_v$. Ponadto żadna z operacji typu i; $i=1,\ldots,K$; jeśli ma być realizowana przez maszynę p-tą, nie może zostać rozpoczęta w momencie późniejszym niż $s-p_i$, gdyż w przeciwnym przypadku maszyna ta nie mogłaby być zwolniona w momencie s.

Tak więc przyjęcie, że $d_{vp}(s) = 1$ pociąga za sobą ustalenie $d_{ip}(t) = \emptyset$, $r_{ip}(t) = \emptyset$, $\bar{r}_{ip}(t) = \emptyset$, $t = s-p_i+1,\ldots,s+p_v-1$; $i=1,\ldots,K$ oraz usunięcie operacji typu v ze zbioru operacji przeznaczonych do wykonania. Zamykanie podzbioru rozwiązań następuje w sytuacji, gdy:

- otrzymano rozwiązanie całkowitoliczbowe zagadnienia PM odpowiadającego rozpatrywanemu podproblemowi;
- nie istnieje rozwiązanie dopuszczalne rozpatrywanego podproblemu;
- dolne oszacowanie wartości rozwiązania optymalnego podproblemu jest większe /równe/ wartości najlepszego uzyskanego do tej pory rozwiązania dopuszczalnego problemu wyjściowego.

Niech P_i oznacza kolejny i-ty rozpatrywany podproblem zagadnienia /1/-/10/, natomiast PM_i niech oznacza zagadnienie wyznaczania przepływu z mnożnikami odpowiadające podproblemowi P_i. Kolejno generowane podproblemy P_i zapamiętywane są w postaci drzewa podproblemów H.

Algorytm

Niech UB oznacza wartość najlepszego do tej pory wyznaczonego rozwiązania dopuszczalnego zagadnienia /1/-/10/. Początkowo przyjmujemy $UB = \infty$. Ponadto niech P_1 oznacza rozpatrywany problem /1/-/10/. P_1 jest korzeniem drzewa H. Kolejna, i-ta iteracja algorytmu ma postać:

Krok 1. Wyznaczyć dolne oszacowanie LB_i poprzez rozwiązanie problemu PM_i. Jeśli rozwiązanie dopuszczalne PM_i nie istnieje, przejść do kroku 5, w przeciwnym przypadku zapamiętać wartość funkcji celu rozwiązania optymalnego PM_i jako LB_i. Przejść do kroku 2.

Krok 2. Sprawdzić, czy $LB_i < UB$. Jeśli nie, przejść do kroku 5. W przeciwnym przypadku przejść do kroku 3.

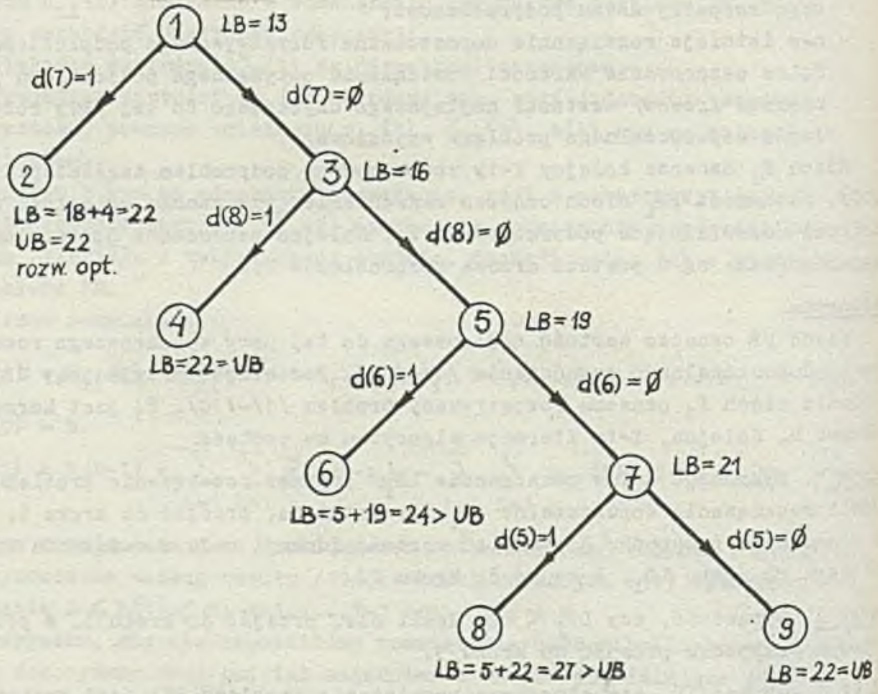
Krok 3. Sprawdzić, czy otrzymane rozwiązanie problemu PM_i jest rozwiązaniem dopuszczalnym podproblemu P_i. Jeśli nie, przejść do kroku 4. W przeciwnym przypadku dokonać podstawienia $UB = LB_i$ i zapamiętać wygenerowane rozwiązanie. Przejść do kroku 5.

Krok 4. Dokonać podziału podproblemu P_i na podproblemy P_x oraz P_y. Uzupełnić drzewo podproblemów H węzłami P_x i P_y oraz łukami (P_i, P_x) i (P_i, P_y). Przejść do kroku 5.

Krok 5. Zamknąć podproblem P_i. Wybrać z drzewa H najpóźniej wygenerowany, niezamknięty podproblem P_z. Podstawić $P_{i+1} = P_z$ i przejść do kroku 1. Jeśli wszystkie podproblemy w drzewie H są zamknięte, to zakończyć działanie algorytmu. Ostatnio zapamiętane rozwiązanie dopuszczalne o wartości funkcji celu UB jest rozwiązaniem optymalnym zagadnienia /1/-/10/.

6. Przykład ilustracyjny

Dany jest problem jednomaszynowy z trzema operacjami tego samego typu /q = 3/, których czas wykonywania jest równy p=5. Wartość horyzontu czasowego T = 30. Koszt realizacji operacji w zależności od momentu rozpoczęcia przedstawia ciąg k(t) = (10,9,8,7,6,5,4,4,7,7,8,9,10,12,15,20,20,20,...,20) t = 1,...,30. Drzewo podproblemów H wygenerowano podczas działania algorytmu przedstawione jest na rysunku 2. Rozwiązanie optymalne zagadnienia otrzymano w 2 iteracjach algorytmu.



Rys. 2. Drzewo podproblemów H.

LITERATURA

[1] Hultz J., Klingman D.: An advanced dual basic feasible solution for a class of capacited generalized networks, Operations Research 24, 1976, nr 2, s. 301-313.

[2] Shapiro J.F.: A note on the primal-dual and a out-of-kilter algorithms for network optimization problems, Networks 7, 1977, s. 81-89.

[3] Smutnicki C., Grabowski J.: Metody i algorytmy optymalizacji kolejności operacji z kryterium minimalizacji kosztów. Zesz. Nauk. Pol. Śl., Automatyka, zesz. 55, Gliwice 1980.

[4] Truemper K.: On max flows with gains and pure min-cost flows., SIAM J. Appl. Math. 32, 1977, s. 301-313.

[5] Truemper K.: Optimal flows in nonlinear gain networks, Networks 8, 1978, s. 17-36.

[6] Zorychta K., Ogryczak W.: Programowanie liniowe i całkowitoliczbowe, WNT, Warszawa 1981.

Recenzent: Prof.dr hab.inż.Jan Węglarz

Wpłynęło do Redakcji do 30.03.1984r.

ПРИМЕНЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОТОКА С МНОЖИТЕЛЯМИ К МОДЕЛИРОВАНИЮ И ОПТИМИЗАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ

Р е з ю м е

В работе представлена задача определения последовательности выполнения n независимых операций на M параллельных машинах с критерием минимизации суммы стоимостей выполнения операций. Сформулирована математическая модель задачи как проблема целочисленного потока с множителями и алгоритм решения задачи, использующий метод ветвей и ограничений.

AN APPLICATION OF THE FLOW WITH GAINS PROBLEM TO MODELING AND OPTIMIZATION OF DISCRETE PROCESSES

S u m m a r y

This paper deals with the scheduling of n independent operations on M parallel machines with a criterion to minimize total costs. The mathematical model of the problem is formulated as an integer flow with gains problem and the solution algorithm of branch-and-bound type is given.