ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: AUTOMATYKA z. 74 Nr kol. 810

Karol Wołkowiński
Politechnika Wrocławska

PEWNE PRZYPADKI POŁĄCZENIA PROBLEMU ALOKACJI I OBSŁUGI W STEROWANIU KOMPLEKSAMI OPERACJI

Streszczenie. W pracy omówiono powiązanie zagadnień rozdziału zasobów i zadań w kompleksach operacji niezależnych przy uwzględnieniu wymagań jakości obsługi i alokacji czasowo-optymalnej w warunkach probabilistycznych. Prezentowane zagadnienia zilustrowano na przykładzie prostych kompleksów dwóch operacji

1. Wstęp

Złożone systemy w zależność od sposobu powiązania poszczególnych elementów składowych można podzielić na systemy wejściowo-wyjściowe i kompleksy operacji. W drugim przypadku elementami są operacje, czyli określone czynności wykonywane w określonym czasie. Powiązania między operacjami, czyli struktura kompleksu, wynikają z uwarunkowań czasowo-logicznych między operacjami /np. niektóre operacje mogą rozpocząć się po zakończeniu innych/.

W procesach produkcyjnych operacjami są określone czynności technologiczne; mogą to być czynności związane z obróbką detali w tzw. dyskretnych procesach produkcyjnych lub realizowane w określonym czasie procesy ciągłe, traktowane z wyższego poziomu jak operacje. Sterowanie kompleksem operacji oznacza w tych przypadkach sterowane określonym typem dyskretnego lub ciągło-dyskretnego procesu produkcyjnego. W procesach obliczeniowo-decyzyjnych operacjami są realizacje określonych procedur. Sterowanie kompleksem operacji oznacza tutaj sterowanie przebiegiem procesu obliczeniowego, stąd też znaczenie teorii sterowania kompleksami operacji dla projektowania komputerowych systemów operacyjnych.

Wyróżnia się następujące podstawowe funkcje systemu sterującego kompleksem operacji i związaną z nimi problematykę [1] :
- sterowanie rozdziałem zadań i zasobów /problemy alokacji/,
- sterowanie kolejnością wykonywania operacji /problemy sekwencyjne/,
- sterowanie obsługą zadań pojawiających się w czasie rzeczywistym /problemy teorii kolejek i masowej obsługi/.

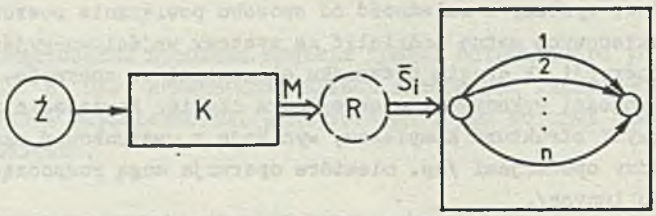
Pojęcie sterowania jest przy tym rozumiane szeroko; może ono oznaczać bieżącą zmianę decyzji podczas realizacji jednego kompleksu operacji oraz wyznaczenie decyzji stałej dla jednego kompleksu lub zmieniających się decyzji podczas realizacji ciągu kompleksów.

W realnych złożonych systemach mogą występować łącznie wymienione trzy funkcje i związana z nimi problematyka. Ze względu jednak na skomplikowany

matematyczny model takich procesów celowym wydaje się uproszczenie badań, polegające na łączeniu wymienionych trzech problemów parami. Praca niniejsza dotyczy właśnie połączenia problematyki alokacji i obsługi w kompleksie operacji z ograniczeniem do pewnego ustalonego zakresu. Rozważania dotyczą zagadnienia rozdziału zadań w kompleksie statycznych niezależnych operacji z parametrami losowymi i określonej sytuacji z punktu widzenia obsługi: rozkładów wykładniczych, naturalnych regulaminów obsługi, średniej długości kolejki jako kryterium.

2. Powiązanie zadań alokacji i obsługi

Rozważana w pracy problematyka dotyczy następującej sytuacji. Kompleksy operacji pojawiają się w sposób losowy i czekają w kolejce na obsługę /rys.1/. Dla każdego kompleksu następuje rozdział zadań.



Rys.1. Rozdział zadań w kompleksie operacji niezależnych
Z - źródło zadań, K - kolejka, R - realizacja rozdziału,
M - globalny rozmiar zadania, n - ilość operacji w kompleksie.

Można w takim przypadku rozważać dwa zadania optymalizacyjne:
- rozdział zadań optymalny ze względu na kryterium charakteryzujące proces obsługi /np. średnia długość kolejki/,
- czasowo-optymalny rozdział zadań w kompleksie operacji.

Dla kompleksu operacji niezależnych przyjmujemy, że

$$T = \max(T_1, T_2, \ldots, T_n), \qquad /1/$$

gdzie: T_i - oznacza czas realizacji i-tej operacji,
T - czas trwania kompleksu.

Niech s_i oznacza rozmiar zadania przeznaczonego do realizacji w i-tej operacji kompleksu. Zadanie optymalnego rozdziału, uwzględniającego jakość obsługi, polega na wyznaczeniu wartości $s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*$ minimalizujących wskaźnik jakości obsługi

$$Q_1 \triangleq \Phi_1(s_1, s_2, \ldots, s_n) \qquad /2/$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = M, \quad s_i \geqslant 0 \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad /3/$$

$$\lambda E(T) < 1 \qquad /4/$$

gdzie: λ jest średnią intensywnością zadań przebywających w jednostce czasu. Wyrażenie /4/ jest warunkiem stacjonarności procesu obsługi. Zadanie czasowo-optymalnego rozdziału polega, natomiast na znalezieniu wartości $s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*$ minimalizujących wartość oczekiwaną czasu trwania kompleksu

$$Q_2 = E(T) = \Phi_2(s_1, s_2, \ldots, s_n) \qquad /5/$$

przy ograniczeniu /3/.

Można również rozważać [2] zadania wyznaczenia /przy rozdziale optymalnym/:

- granicznej wartości globalnego rozmiaru zadań M_s, zapewniającej stacjonarność procesu obsługi przy spełnieniu warunku $M < M_s$,
- granicznej wartości globalnego rozmiaru zadań M_k, przy której wskaźnik jakości obsługi przyjmuje zadaną wartość m_k, zapewniającej wartość tego wskaźnika $Q_1 < m_k$ dla wszystkich $M < M_k$.

W dalszych rozważaniach założono, że strumień przybywających zadań jest strumieniem Poissona, system ma nieskończenie wymiarowe źródło zadań, długość kolejki jest nieograniczona oraz zadania są obsługiwane w kolejności przybywania do systemu /regulamin naturalny/.

3. Stosowanie dwóch kryteriów w zagadnieniach alokacji

Zakłada się, że modele operacji mają postać

$$T_i = z_i \varphi_i(s_i), \quad i=1,2,\ldots,n \qquad /6/$$

O funkcjach φ_i zakładamy, że są nieujemne, ciągłe, rosnące i wypukłe względem s_i dla każdego z_i.

Niezależne zmienne losowe Z_i mają rozkład wykładniczy o dystrybuancie

$$F_{i,z}(z_i) = \begin{cases} 0 & z_i \leqslant 0 \\ 1 - \exp(-b\, z_i) & z_i > 0, \end{cases} \qquad /7/$$

wobec tego dystrybuanta czasu realizacji operacji wyraża się wzorem

$$F_i(\tau, s_i) = 1 - \exp\left(-\frac{\tau b}{\varphi_i(s_i)}\right) = 1 - \exp(-\mu_i \tau), \qquad /8/$$

w którym

$$\mu_i = \frac{b}{\varphi_i(s_i)}. \qquad /9/$$

Dystrybuanta czasu realizacji kompleksu /1/ ma postać

$$F(\tau; s_1, s_2, \ldots, s_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \exp(-\mu_i \tau)\right) \qquad /10/$$

Kryterium /2/ przyjmuje wówczas postać [3]

$$Q_1 = \lambda E(T) + \frac{\lambda^2 E(T^2)}{2[1 - \lambda E(T)]}, \qquad /11/$$

gdzie momenty zmiennej losowej /1/ wyrażają się zależnościami

$$Q_2 = E(T) = \int_0^\infty \tau \, dF(\tau; s_1, s_2, \ldots, s_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{x_1, x_2, \ldots, x_n \\ \sum_{j=1}^{n} x_j = i \\ x_j \in \{0,1\}}} \frac{(-1)^{i-1}}{\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j} , \quad /12/$$

$$E(T^2) = \int_0^\infty \tau^2 \, dF(\tau; s_1, s_2, \ldots, s_n) = 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{x_1, x_2, \ldots, x_n \\ \sum_{j=1}^{n} x_j = i \\ x_j \in \{0,1\}}} \frac{(-1)^{i-1}}{\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j\right)^2} . \quad /13/$$

Rozwiązanie przedstawionych w punkcie 2 zadań optymalnych rozdziałów napotyka duże trudności obliczeniowe i jest możliwe tylko przy użyciu metod numerycznych. Najczęściej efektywne rezultaty analityczne uzyskać można tylko dla kompleksu zawierającego dwie operacje i szczególną postać funkcji φ_1 /9/. Optymalne alokacje według wymienionych /p.2/ dwóch kryteriów dają naogół różne wyniki tylko w szczególnych przypadkach są identyczne. Można na przykład wykazać słuszność następującej własności.

Dla kompleksu zawierającego dwie operacje o modelach, w których

$$\mu_i = \frac{1}{a\, s_i} \qquad i = 1,2$$

przy globalnym rozmiarze zadań

$$M < \frac{4}{3\lambda a}$$

Sterowanie uwzględniające jakość obsługi i sterowanie czasowo-optymalne dają jednakowy rozdział

$$s_1^* = s_2^* = s_1^{**} = s_2^{**} = \frac{M}{2}$$

Dla kompleksów dwóch operacji ustalono [4] warunki konieczne identyczności obu alokacji oraz przedstawiono wyniki numerycznej metody ich porównania, w przypadku rozdziału zasobów. Ze względu na analogię podstawowych zależności dla rozdziału zasobów i zadań ustalone prawidłowości występują również w przypadku omawianego w pracy rozdziału zadań.

4. Wyznaczenie granicznych wartości globalnych rozmiarów zadań

Wyznaczymy tu graniczne wartości globalnych rozmiarów zadań, ze względu na stacjonarność procesu obsługi(M_s) i ze względu na zadaną długość kolejki(M_k) dla dwuoperacyjnego kompleksu operacji niezależnych, w których

$$\mu_i = \frac{1}{a_i s_i} \quad i = 1,2 , \qquad a_1 > a_2$$

Z zależności /12/ uwzględniając ograniczenie /3/ otrzymuje się

$$Q_2 = E(T) = a_1\left[\frac{(k-1)s_1 + m}{k} - \frac{(M - s_1)s_1}{(k-1)s_1 + M}\right], \qquad /14/$$

gdzie

$$k = \frac{a_1}{a_2},$$

Z warunku $\frac{dQ_2}{ds_1} = 0$ po uporządkowaniu otrzymujemy równanie

$$(k^2 - k + 1)(k-1)s_1^2 + (k^2 - k + 1)2Ms_1 - M^2 = 0.$$

Jedynym pierwiastkiem tego równania, zawierającym się w przedziale $0 < s_1 < M$ jest

$$s_1^{**} = M\frac{1}{k-1}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2 - k + 1}} - 1\right) = pM,$$

wobec tego

$$s_2^{**} = (1-p)M.$$

We wzorach ostatnich

$$p = \frac{1}{k-1}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2 - k + 1}} - 1\right).$$

Wartość funkcji /14/ przy rozdziale optymalnym wynosi więc

$$Q_2^{**} = \frac{p^2(k^2 + k + 1) + p(k-2) + 1}{k[p(k-1) + 1]}Ma_1 = \alpha a_1 M, \qquad /15/$$

gdzie

$$\alpha = \frac{p^2(k^2 + k + 1) + p(k-2) + 1}{k[p(k-1) + 1]}. \qquad /16/$$

Uwzględniając warunek stacjonarności procesu obsługi /4/ otrzymujemy

$$M_s = \frac{\rho}{\alpha}, \qquad \rho = \frac{1}{\lambda a_1}. \qquad /17/$$

Dalej z zależności /13/ po wstawieniu uzyskanych wartości s_1^{**}, s_2^{**} i po uwzględnieniu wprowadzonych oznaczeń obliczamy

$$E(T^2)^{**} = 2Ma_1^2\left[p^2 - \frac{(1-p)^2}{k^2} - \frac{p(1-p)^2}{[p(k-1)+1]^2}\right]. \qquad /18/$$

Wstawiając /15/ i /18/ do 11 przy przyjętych oznaczeniach mamy

$$Q_1^{**} = \frac{\lambda a_1 \alpha M - 2\lambda^2 p(1-p)a_1^2 \beta M^2}{1 - \lambda M a_1 \alpha} = m_k, \qquad /19/$$

gdzie

$$\beta = \frac{p(1-p)}{[p(k-1) + 1]^2}.$$

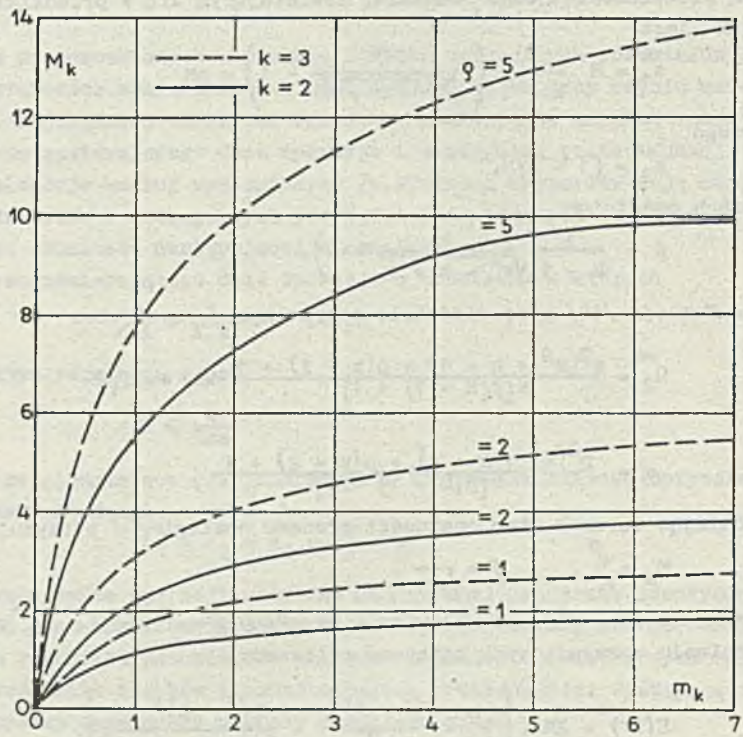
Rozwiązując równanie /19/ otrzymujemy równanie

$$2\lambda^2 p(1-p)\, a_1^2 \beta M^2 - \lambda a_1 \alpha (1+m_k) M_k + m_k = 0,$$

którego jedynym rozwiązaniem spełniającym warunek $M_k < M_s$ jest

$$M_k = \rho \frac{(1+m_k)\alpha - \sqrt{(1+m_k)^2\alpha^2 - 8m_k\, p(1-p)\beta}}{4p(1-p)\beta} \qquad /20/$$

Widzimy, że graniczne rozmiary zadań ze względu na stacjonarność procesu /16/ oraz ze względu na zadaną długość kolejki /rys. 2/ są funkcjami rosnącymi parametru charakterystycznego ρ.



Rys. 2. Graniczne wartości globalnych rozmiarów zadań (M_k) w funkcji długości kolejki (m_k) dla kompleksu dwóch operacji niezależnych, dla $\mu_i = \frac{1}{a_i s_i}$, $a_1 > a_2$

5. Rozdział rudy w procesie jej mielenia /przykład/

Jako przykład rozdziału zadań rozpatrzmy zakład wzbogacania rudy, w którym zainstalowane są trzy młyny o różnej wydajności pracujące równolegle. Czas trwania procesu mielenia w i-tym młynie zależy od ilości po-

danej do niego rudy oraz jej cech fizycznych /głównie twardości i wilgotności/ i wyraża się zależnością

$$T_i = a_i s_i z_i, \quad i = 1,2,3, \qquad /21/$$

gdzie:

z_i - ma rozkład wykładniczy opisany wzorem /7/, w którym $b = 1$,
a_i - parametr o wartości zależnej od konstrukcji młyna,
s_i - masa /ilość/ dostarczonej rudy.

Transporty rudy w ilości M przybywają do zakładu losowo i podawane są do przemiału w kolejności dostawy. Średni odstęp między kolejnymi dostawami jest krótszy od średniego czasu pracy młynów, niezbędnego do zmielenia jednej dostawy rudy.

Zadanie sterowania procesem polega na takim rozdziale każdego transportu rudy na poszczególne młyny, aby średnia długość kolejki lub średni czas realizacji kompleksu były najmniejsze, a ponadto na wyznaczeniu największej ilości rudy w transporcie ze względu na stacjonarność procesu /M_s/ oraz ilości rudy w transporcie /M_k/ przy założonej wartości średniej długości kolejki /m_k/.

Założone parametry procesu

$$a_1 = 0{,}4.10^3 \text{ min. kg}^{-1}, \quad a_2 = 0{,}2.10^3 \text{ min.kg}^{-1}, \quad a_3 = 0{,}15.10^3 \text{ min.kg}^{-1}$$

$$M = 15.10^3 \text{ kg}, \quad \lambda = 0{,}5 \text{ min}^{-1}, \quad m_k = 10.$$

Przy przyjętych wartościach obliczenia przeprowadzone na maszynie cyfrowej dały następujące wyniki:

$$s_1^* \approx 1{,}29.10^3 \text{ kg}, \quad s_2^* \approx 4{,}79.10^3 \text{ kg}, \quad s_3^* \approx 8{,}92.10^3 \text{ kg}$$

$$Q_1^* = 7{,}58715;$$

oraz

$$s_1^{**} \approx 1{,}30.10^3 \text{ kg}, \quad s_2^{**} \approx 4{,}64.10^3 \text{ kg}, \quad s_3^{**} \approx 9{,}16.10^3 \text{ kg}$$

$$Q_1^{**} = 7{,}63193;$$

i dalej

$$M_s \approx 16{,}5.10^3 \text{ kg}, \quad M_k \approx 15{,}3.10^3 \text{ kg}.$$

6. Wnioski

Łączne rozpatrywanie problemów alokacji i obsługi w sterowaniu kompleksami operacji niezależnych wymaga - ogólnie biorąc - opracowywania skomplikowanych matematycznych modeli dających się rozwiązać tylko metodami numerycznymi. Rozwiązania analityczne są możliwe tylko w szczególnie prostych przypadkach.

Celowym wydaje się poszukiwać możliwie prostych rozwiązań, które mogą znaleźć praktyczne zastosowanie.

LITERATURA

[1] Bubnicki Z.: Optymalizacja kompleksów operacji w sterowaniu dyskretnymi procesami produkcyjnymi, VII Krajowa Konferencja Automatyki, tom III, Rzeszów 1977, pp.37-49.

[2] Bubnicki Z.: O optymalizacji zmodyfikowanego kompleksu operacji równoległych w warunkach probabilistycznych, Podstawy Sterowania, t 3, z 3, 1973 pp. 181-190.

[3] Goddard L.S., Metody matematyczne w badaniach operacyjnych PWN, Warszawa 1966.

[4] Wołkowiński K. Allocation and service in the complex of independent operations in probabilistic conditions. IFAC-IFORS symposium on optimization methods - applied aspects, Varna 1979, pp 302-308.

Recenzent: Doc.dr hab.inż.Konrad Wala
Wpłynęło do Redakcji do 30.03.1984r.

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ОБЪЕДИНЕНИЯ ПРОБЛЕМ АЛЛОКАЦИИ И ОБСЛУЖИВАНИЯ В УПРАВЛЕНИИ КОМПЛЕКСАМИ ОПЕРАЦИЙ

Р е з ю м е

В работе представлены связи проблем распределения задач в комплексах независимых операций с учётом требований качества обслуживания (длина очереди) и временно - оптимальной аллокации в вероятностных условиях. Исследована также зависимость предельных значений общих размеров задач от разных параметров систем с учётом требований стационарности процесса обслуживания и длины очереди. Рассмотренные проблемы иллюстрируются примером простых комплексов двух операций.

SOME CASES OF CONNEXION BETWEEN THE PROBLEM OF ALLOCATION AND SERVICE IN THE CONTROL OF COMPLEX OF OPERATIONS

S u m m a r y

The paper is concerned with the problems of allocation of tasks in the complex of independent operations taking into account a quality of service /an average queue lenght/ or time-optimal allocation in probabilistic case. The dependence of total size of tasks on different parameters of the system is also examined as to keep the servicing process stationary and to preserve the assumed average queue lenght. The presented problems are ilustrated by some simple examples.