ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: AUTOMATYKA z. 74 Nr kol. 810

Stanisław Zdrzałka
Politechnika Wrocławska
Instytut Cybernetyki Technicznej

STOCHASTYCZNE ZAGADNIENIA SZEREGOWANIA ZADAŃ NA MASZYNACH - PRZEGLĄD

Streszczenie. W pracy dokonuje się przeglądu dotychczasowych wyników z zakresu stochastycznych zagadnień szeregowania zadań na maszynach. Przedstawiono algorytmy szeregowania dla zagadnień: jednomaszynowych, z wieloma równoległymi maszynami, oraz wielomaszynowych typu O,F,J. Przedstawiono obszerną bibliografię.

1. Wstęp

W końcu lat 70 i na początku 80 nastąpił gwałtowny wzrost zainteresowania stochastycznymi zagadnieniami szeregowania zadań na maszynach. Zagadnienia te są uogólnieniem stosunkowo dobrze już zbadanych problemów deterministycznych szeregowania /patrz prace przeglądowe [21] i [35]/ polegającym na zastąpieniu liczbowych danych wejściowych /czasów wykonywania zadań, czasów gotowości, pożądanych terminów wykonania zadań itp./ przez ich rozkłady prawdopodobieństwa. Chociaż modele stochastyczne są bardziej adekwatnym opisem rzeczywistych procesów decyzyjnych, w których występuje szeregowanie, to jednak trudności natury teoretycznej i obliczeniowej powodowały, że tematyka ta była przez długi okres czasu pomijana. W latach 60 i na początku 70 ukazało się zaledwie kilka prac z tego zakresu.

Niniejsza praca stanowi próbę uporządkowania dotychczasowych wyników /do roku 1983 włącznie/ z zakresu stochastycznych zagadnień szeregowania. Zwraca się w niej uwagę na metodykę rozwiązywania zagadnień stochastycznych i przedstawia obszerną bibliografię. Praca ta poszerza dotychczasowe prace przeglądowe [33] i [24] o obszerną i najlepiej dotąd opracowaną problematykę szeregowania na jednej maszynie.

W pracy stosujemy oznaczenia oraz notację symboliczną problemów szeregowania używane powszechnie w deterministycznych zagadnieniach szeregowania [21]. Ponieważ w przypadku zagadnień stochastycznych notacja ta nie opisuje w sposób jednoznaczny problemu, przy opisie każdego zadania podawane będą oddzielnie wszystkie założenia dotyczące rozkładów prawdopodobieństwa wielkości losowych występujących w zadaniu.

Ogólnie, zagadnienie szeregowania zadań na maszynach można sformułować następująco. Zadania J_j, $j = 1,\dots,n$, mają być wykonane na m maszynach. W każdej chwili czasu maszyna może wykonywać co najwyżej jedno zadanie i każde zadanie może być wykonywane na co najwyżej jednej maszynie. Zadania opisywane są przez następujące wielkości: p_j - czas wykonywania zadania J_j /p_{ij} - czas wykonywania zadania j-tego na i-tej maszynie/, r_j - termin gotowości zadania J_j /najwcześniejszy możliwy termin rozpoczęcia wykonywania zadania/, d_j - pożądany termin zakończenia zadania J_j. W pracy zajmujemy się zagadnieniami, w których p_j, p_{ij}, r_j, d_j są zmiennymi losowymi dyskretnymi lub ciągłymi o znanych rozkładach prawdopodobieństwa.

Z uwagi na sposób wykonywania zadań na maszynach rozróżniamy następujące klasy problemów: 1/ zagadnienia jednomaszynowe; 2/ zagadnienia wielomaszynowe, w których występuje m równolegle pracujących maszyn a każde zadanie wymaga dla jego wykonania tylko jednej maszyny; w zależności od czasów wykonywania zadań na poszczególnych maszynach rozróżniamy tu następujące problemy: P - identyczne maszyny, $p_{ij} = p_j$, $i=1,\dots,m$, Q - zunifikowane maszyny, $p_{ij} = p_j/q_i$, R - pozostałe przypadki; 3/ zagadnienia wielomaszynowe, w których każde zadanie ma określony zbiór maszyn, na których będzie ono wykonywane oraz określoną marszrutę; rozróżniamy tu następujące problemy:

O - /open shop/ każde zadanie wymaga wykonywania go na każdej maszynie - kolejność wykonywania na poszczególnych maszynach nie jest istotna;

F - /flow shop/ zagadnienie taśmowe: każde zadanie wykonywane jest kolejno na wszystkich maszynach, przy czym kolejność ta jest ustalona i taka sama dla wszystkich zadań; jeżeli dodatkowo wymaga się ażeby kolejność wykonywania zadań na poszczególnych maszynach była taka sama, problem nazywa się zagadnieniem taśmowym permutacyjnym;

J - /job shop/ zagadnienie gniazdowe: każde zadanie ma określony zbiór maszyn oraz określoną marszrutę przechodzenia od maszyny do maszyny.

Niech C_j oznacza termin /moment czasu/ wykonania zadania J_j. Oznaczamy: $L_j = C_j - d_j$, $T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$, $U_j = 0$ jeżeli $C_j \le d_j$, $U_j = 1$, w przeciwnym przypadku. Wielkości L_j i T_j nazywane są odpowiednio nieterminowością i opóźnieniem zadania J_j, zaś U_j jest karą za niewykonanie zadania J_j w pożądanym terminie.

Powszechnie przyjętymi wskaźnikami jakości uszeregowania są:

$E\sum_{j=1}^{n} w_j C_j$, $E\sum_{j=1}^{n} w_j L_j$, $E\sum_{j=1}^{n} w_j T_j$, $E\sum_{j=1}^{n} w_j U_j$, gdzie $w_j > 0$ jest odpowiednio dobraną wagą, oraz $E\max_j C_j$, $E\max_j L_j$, $E\max_j T_j$ /zapis symboliczny: EC_{max}, EL_{max}, ET_{max}/.

Stosowane są również kryteria optymalności bazujące na pojęciu dominacji stochastycznej. Niech będą dwie zmienne losowe X i Y posiadające dystrybuanty F_X i F_Y. Mówimy, że Y dominuje stochastycznie X, $X <_{st} Y$, jeżeli $\bar{F}_X(x) \le \bar{F}_Y(x)$ dla każdego x, gdzie $\bar{F}(x) = 1-F(x)$. Zachodzi przy tym: $X <_{st} Y \Rightarrow EX \le EY$ /patrz, między innymi, [3]/. Oznaczając zatem przez

F_{maxC_j} dystrybuantę zmiennej losowej $maxC_j$, możemy postawić zadanie znalezienia strategii przydziału zadań do maszyn, która minimalizuje $\bar{F}_{maxC_j}(x)$ dla każdego x. W podobny sposób można określić kryterium optymalności dla pozostałych wskaźników jakości. Oczywiście, zadanie z tak określoną funkcją celu może nie posiadać rozwiązania. Stosowane są również inne funkcje celu, charakterystyczne dla zagadnień stochastycznych, na przykład: $\max P(L_j \geq 0)$.

Istotne dla naszych potrzeb będą jeszcze dwie charakterystyki wykonywania zadań. Pierwsza z nich mówi czy wykonywanie zadania może być przerywane, czy też nie, druga zaś określa relację częściowego porządku $\prec$ na zbiorze zadań. Jeżeli $J_i \prec J_j$, wtedy zadanie J_j może być wykonywane dopiero po zakończeniu zadania J_i.

Ogólnie, zagadnienie stochastyczne szeregowania zadań na maszynach polega na znalezieniu strategii przydziału zadań do maszyn, która spełnia ograniczenia kolejnościowe, ograniczenia związane z przerywalnością zadań oraz minimalizuje wybrany wskaźnik jakości. Na ogół trudno jest znaleźć strategię najlepszą w zbiorze "wszystkich strategii" i w związku z tym ogranicza się zakres poszukiwań do wybranych klas strategii.

Dla skróconego zapisu poszczególnych problemów szeregowania stosować będziemy podobny zapis symboliczny, jak w zagadnieniach deterministycznych [21], [34]. Mianowicie, $1||EL_{max}$ oznacza jednomaszynowy problem bez przerwań, w którym $r_j = 0$, $\prec = \emptyset$, oraz funkcją celu jest wartość oczekiwana maksymalnego opóźnienia; $2P|przer.|\bar{F}_{Cmax}$ oznacza problem szeregowania na dwóch identycznych maszynach, w którym każde zadanie wykonywane jest na tylko jednej maszynie, wykonywanie zadań może być przerywane, $r_j = 0$, $\prec = \emptyset$; w tym ostatnim przypadku problem polega na znalezieniu strategii, która minimalizuje $\bar{F}_{Cmax}(x)$ dla każdego x.

2. Strategia przydziału zadań do maszyn

Rozważane są dwie klasy strategii przydziału zadań do maszyn: klasa list statycznych i klasa list dynamicznych.

Strategia z pierwszej klasy sprowadza się do określenia w chwili zerowej listy zadań, nie zmienianej w dalszych chwilach czasu. Przydział zadań do maszyn przebiega w następujący sposób. Jeżeli dopuszczalne jest przerywanie zadań, wówczas w każdej chwili t należy określić zbiór zadań gotowych do wykonywania /np. dla których $r_j \leq t$/ i nie wykonanych do chwili t i następnie przydzielić zadania z tego zbioru do maszyn w kolejności, w jakiej te zadania występują na liście. Zadania, dla których brakuje maszyn nie są wykonywane. Jeżeli przerywanie zadań nie jest dopuszczalne, wówczas decyzje podejmowane są tylko w momentach zakończenia wykonywania poszczególnych zadań, przy czym na zwolnioną w danym momencie decyzyjnym maszynę podaje się zadanie, które spośród dotąd nie wykonywanych i gotowych do wykonywania zajmuje na liście najwyższą pozycję.

Strategia z klasy list dynamicznych wykorzystuje w każdej chwili czasu t informację o stanie wykonania zadań, np. o czasach wykonywania poszczególnych zadań do chwili t. Na podstawie tej informacji w każdej chwili czasu określana jest nowa lista i według niej następuje przydział zadań do maszyn - w taki sam sposób, jak w przypadku strategii z poprzedniej klasy.

Sformułowane wyżej klasy strategii odpowiadają zagadnieniu szeregowania typu P /m identycznych, równoległych maszyn/. Dla innych zagadnień klasy strategii definiowane są podobnie, przy czym zasadnicza idea list statycznych i dynamicznych pozostaje taka sama. W tym miejscu należy zwrócić uwagę na to, że w rozważanych problemach bardzo często strategia optymalna w klasie list statycznych lub dynamicznych pozostaje optymalną w klasie wszystkich strategii. Jest to konsekwencją faktu, że problemy te można przedstawić jako markowski proces decyzyjny o skończonej liczbie stanów, skończonym zbiorze akcji oraz jednym stanie absorbującym. Dla procesu tego istnieje optymalna markowska czysta strategia stacjonarna [35], a więc strategia z klasy list statycznych lub dynamicznych.

Większość rezultatów z zakresu stochastycznych zagadnień szeregowania otrzymano, jak do tej pory, przy założeniu, że rozkłady prawdopodobieństwa czasów wykonywania zadań są wykładnicze lub należą do pewnych specjalnych klas. Przedstawimy teraz kilka pojęć niezbędnych do zdefiniowania tych klas. Oznaczmy przez F dystrybuantę a przez f gęstość prawdopodobieństwa czasu wykonywania zadania p. Niech dla x takich, że $F(x) < 1$, $\rho(x) = f(x)/\bar{F}(x)$, jeżeli F jest absolutnie ciągła; $\rho(x) = f(x+1)/\bar{F}(x)$, jeżeli p jest zmienną losową dyskretną. Funkcję ρ nazywany *intensywnością hazardu* /hazard rate/. Załóżmy, że zadanie jest wykonywane bez przerw począwszy od chwili zerowej. Wówczas, jeżeli p jest zm. los. dyskretną, to $\rho(x)$ jest prawdopodobieństwem wykonania zadania w chwili t+1 przy warunku, że nie zostało ono wykonane do chwili t. Podobnie, dla zm. los. ciągłej, $\delta\rho(x) + O(\delta)$ jest prawdopodobieństwem wykonania zadania w chwili $t+\delta$ przy warunku, że nie zostało ono wykonane do chwili t. Niech $_sp$ oznacza czas niezbędny do zakończenia zadania przy warunku, że zadanie było już wykonywane przez czas s. Dystrybuantą zm. los. $_sp$ jest $(F(x+s) - F(s))/(1-F(s))$, zaś intensywność hazardu równa się $\rho(x+s)$. Mówimy, że *rozkład zmiennej losowej p jest typu IHR /DHR/* jeżeli intensywność hazardu ρ jest funkcją niemalejącą /nierosnącą/. Do klasy IHR lub DHR należą rozkłady: wykładniczy, gamma, Weibulla, hiperwykładniczy, normalny obcięty. Mówimy, że zmienne losowe $p_1,\ldots,p_n$ mają *rozkłady podobne z klasy IHR /DHR/* jeżeli istnieje zmienna losowa z oraz liczby nieujemne $s_1,\ldots,s_n$ takie, że p_j ma taki sam rozkład, jak

s_j^z oraz z należy do klasy IHR /DHR/. Zauważmy, że jeżeli wszystkie czasy wykonywania zadań mają ten sam rozkład z klasy IHR /DHR/ lecz do chwili zerowej były wykonywane przez czas odpowiednio $s_1,\ldots,s_n$, to w chwili zerowej czasy wykonywania zadań mają rozkłady podobne z klasy IHR /DHR/. Zauważmy jeszcze, że jeżeli intensywnością hazardu zm. los. z jest ρ, to intensywności hazardu zm. los. $p_1,\ldots,p_n$ dla $x \geqslant 0$ są równe $\rho(s_1+x),\ldots,\rho(s_n+x)$. Widać stąd, że znając w danej chwili czasu dotychczasowe czasy wykonywania zadań, możemy zadania uporządkować zgodnie z malejącymi lub rosnącymi intensywnościami hazardu. Własność ta leży u podstaw większości dotychczasowych rezultatów z zakresu stochastycznych zagadnień szeregowania. Dla zm. los. absolutnie ciągłych mówimy, że p ma rozkład typu ILR /DLR/ jeżeli log f(x) jest funkcją wypukłą /wklęsłą/. Dla zm. los. dyskretnych p ma rozkład typu ILR /DLR/ jeżeli $\rho(x+1)(1-\rho(x))/\rho(x)$ jest funkcją nierosnącą /niemalejącą/. Własności zmiennych losowych z klas IHR, DHR, ILR, DLR badane były w teorii niezawodności i pełen ich wybór można znaleźć między innymi w pracach [3] i [4]. Wspominamy tu tylko, że zachodzi $p \in$ ILR $\Rightarrow$ $p \in$ IHR; $p \in$ DLR $\Rightarrow$ $p \in$ DHR. Rozkłady: Polya, jednostajny, wykładniczy, hiperwykładniczy, gamma, normalny obcięty należą do klasy ILR lub DLR /Increasing Likelihood Ratio, Decreasing Likelihood Ratio/. Rozkłady te noszą również nazwę logarytmiczno-wypukłych /wklęsłych/. Mówimy, że zmienne losowe $p_1,\ldots,p_n$ mają rozkłady podobne z klasy ILR /DLR/ jeżeli istnieje zmienna losowa z z klasy ILR /DLR/ oraz liczby $s_1,\ldots,s_n$ takie, że p_j ma rozkład taki sam jak s_j^z, $j = 1,\ldots,n$.

3. Zagadnienia jednomaszynowe

Zestaw wyników dotyczących klasycznych zagadnień szeregowania na jednej maszynie ze stochastycznymi danymi zawiera Tab. 1. Jako zagadnienie jednomaszynowe możemy potraktować też zagadnienie z wieloma równoległymi identycznymi maszynami /P/ przyjmując m=1. Stąd też wyniki dla tych zagadnień, podane w Tab. 2, są w szczególności ważne dla zagadnień jednomaszynowych. W kolumnie drugiej podane są założenia odnośnie rozkładów prawdopodobieństwa, przy których otrzymano rozwiązanie, natomiast w kolumnie trzeciej podane jest rozwiązanie, czyli optymalna strategia przydziału zadań do maszyn. W przypadku jednomaszynowym lista statyczna /dynamiczna/ mówi nam, że w każdej chwili czasu należy spośród zadań nie wykonanych i gotowych do realizacji przydzielić do maszyny to, które zajmuje na liście najwyższą pozycję. Należy zwrócić uwagę na to, że nakłady obliczeniowe związane z przygotowaniem podanych w Tab. 1 list statycznych i dynamicznych są ograniczone wielomianowo. Gwiazdki w kolumnie pierwszej oznaczają, że deterministyczny odpowiednik problemu jest NP-zupełny lub

NP-trudny. Widać więc z Tab. 1, że pewne deterministyczne problemy NP-zupełne lub NP-trudne stają się w wersji stochastycznej /przy pewnych rozkładach/ problemami o wielomianowej złożoności obliczeniowej. Wyjaśnień wymagają dwa ostatnie problemy przedstawione w Tab. 1. Glazebrook [13,14], [17] przedstawił serię prac, w których zajmuje się kwestią istnienia w zbiorze wszystkich strategii, strategii optymalnej w postaci listy statycznej bez przerwań dla problemów jednomaszynowych z ogólnymi funkcjami kosztów. Glazebrook rozważa dwa typy kosztów: dyskontowanych /KD/ i liniowych /KL/, przy czym konstruuje je w następujący sposób: /KD/ - na koszt ogólny wykonywania zadań składają się: - $K(i)a^t$ /$K(i) \geqslant 0$/ - nagroda za wykonanie zadania w chwili t; $B(i,j)a^t$ /$B(i) \geqslant 0$/ - koszt przełączenia maszyny z zadania i na zadanie j w chwili t; $T(i)a^t$ /$T(i) \geqslant 0$/ - koszt zamknięcia maszyny po wykonaniu jako ostatniego, zadania i w chwili t; S(i) - koszt rozruchu maszyny, jeżeli na początku wykonuje ona zadanie i, $0 \leqslant a < 1$; /KL/ - na koszt ogólny składają się: K(i)t - koszt zakończenia wykonywania zadania w chwili t; oraz B(i,j)t, T(i)t, S(i). Glazebrook wykazał, że przy założeniach podanych w Tab. 1 istnieje lista statyczna bez przerwań, która jest strategią optymalną w klasie wszystkich strategii, przy czym okazuje się, że przerywanie zadań nie zmniejsza wartości funkcji celu. W pracy [17] sformułowany został ogólny algorytm, który znajduje listę statyczną dla problemów bez kosztów przełączeń. W [18] pokazano, że algorytm ten można zastosować do problemu z kosztami przełączeń, jednakże dla specjalnej ich struktury. Ogólnie, jest to algorytm o dużej złożoności obliczeniowej i tylko dla specjalnych typów ograniczeń kolejnościowych /$\prec$/ istnieją jego efektywne wersje [17]. Dla wykazania tego, że lista statyczna jest strategią optymalną w klasie wszystkich strategii, Glazebrook wykorzystuje fakt, iż sformułowany przez niego proces decyzyjny jest markowskim procesem decyzyjnym, dla którego istnieje czysta, markowska i stacjonarna strategia optymalna w klasie wszystkich strategii.

Tab. 1

Zadanie	Założenia	Rozwiązanie	Literatura
$1\|\|E\sum w_jC_j$	p_j - dowolny rozkład	Lista statyczna wg niemalejących Ep_j/w_j	Rothkopf /1966/ [27]
$1\|\|E\sum w_jL_j$	p_j-dowolny rozkład d_j-deterministyczne	Lista statyczna wg niemalejących Ep_j/w_j	Na podstawie [27]
	p_j-deterministyczne d_j-dowolny rozkład	Lista statyczna wg niemalejących Ed_j	
$1\|przer.r_j \geqslant 0\|_{*}$ $E\sum w_jC_j^J$	p_j-rozkład wykładniczy z paramet-	Lista statyczna wg nierosnących	Pinedo /1983/

Zadanie	Założenia	Rozwiązanie	Literatura
	rem λ_j r_j-dowolny łączny rozkład	$\lambda_j w_j$ /lista statyczna jest optymalna w klasie list dynamicznych/	
$1\|\|E\sum w_j T_j^{*}$	p_j-rozkład wykładniczy z parametrem λ_j d_j-dowolny rozkład F_j spełniający $\lambda_k w_k \geq \lambda_l w_l \Rightarrow d_k <_{st} d_l$	Lista statyczna wg nierosnących $\lambda_j w_j$	
	p_j-rozkład wykładniczy z parametrem λ_j d_j-dowolny rozkład F_j spełniający $\lambda_k w_k \geq \lambda_l w_l \Rightarrow P(d_k \leq d_l) = 1$	Lista dynamiczna wg nierosnących $\lambda_j w_j$. Jest to również rozwiązanie zadania $1\|przer.\|E\sum w_j T_j$	
$1\|\|E\sum w_j U_j^{*}$	p_j-rozkład wykładniczy z parametrem λ_j d_j-$(d_{j_1},\ldots,d_{j_n})$ mają ten sam łączny rozkład dla każdej permutacji $j_1,\ldots,j_n$ liczb $1,\ldots,n$	Lista statyczna wg nierosnących $\lambda_j w_j$	
	p_j-rozkład wykładniczy z parametrem λ_j $d_j=d, j=1,\ldots,n$ gdzie d ma dowolny rozkład	Lista statyczna wg nierosnących $\lambda_j w_j$. Jest to również rozwiązanie zadania $1\|przer.\|E\sum w_j U_j$	Derman, Lieberman, Ross/1978/
$1\|\|\max_j P(L_j > 0)$	p_j-dowolny rozkład d_j-deterministyczne	Lista statyczna wg niemalejących d_j	Benerjee /1965/
	p_j-dowolny rozkład d_j-zm.los.niezależna od p_j uporządkowane stochastycznie	Lista statyczna π wg $d_{\pi(1)} <_{st} d_{\pi(2)} <_{st} \ldots$ $\ldots <_{st} d_{\pi(n)}$	Grabill, Maxwell /1969/ [7]
$1\|\|EL_{max}$	p_j-dowolny rozkład d_j-deterministyczne	Lista statyczne wg niemalejących d_j	
$1\|\|\bar{F}_{L_{max}}$	p_j-dowolny rozkład d_j-istnieje permutacja π taka, że $P(d_{\pi(1)} \leq d_{\pi(2)} \leq \ldots$ $\ldots \leq d_{\pi(n)}) = 1$	Lista statyczna π	Grabill, Maxwell /1969/
$1\|r_i \geq 0\|EC_{max}$	p_j-dowolny rozkład r_j-deterministyczna	Lista statyczna wg niemalejących r_j	
$1\|r_i \geq 0\|\bar{F}_{C_{max}}$	p_j-dowolny rozkład r_j-istnieje permutacja π taka, że $P(r_{\pi(1)} \leq r_{\pi(2)} \leq \ldots$ $\ldots \leq r_{\pi(n)}) = 1$	Lista statyczna π	Na podstawie tych samych argumentów co w [7]

Zadanie	Założenia	Rozwiązanie	Literatura
$1\mid$przer.$,\prec\mid$EKD	p_j-niezależne zm. los.dyskretne /ciągłe/spełniające: $E(a^{p_j-x}/p_j \geq x+1)$ $/E(a^{p_j-x}/p_j > x)/$ jest funkcją niemalejącą względem x	Istnieje lista statyczna, która jest strategią optymalną w klasie wszystkich strategii. Jest ona również rozwiązaniem zadania $1\mid\prec\mid$EKD	Glazebrook /1980/ [13], /1981/ [14] Glazebrook, Gittins /1981/ [17]
$1\mid$przer.$,\prec\mid$EKL	p_j-niezależne zm. los.dyskretne /ciągłe/spełniające: $E(p_j-x/p_j \geq x+1)$ $/E(p_j-x/p_j > x)/$ jest funkcją nierosnącą względem x.	Istnieje lista statyczna, która jest strategią optymalną w klasie wszystkich strategii. Jest ona również rozwiązaniem zadania $1\mid\prec\mid$EKL	

4. Zagadnienie z m równoległymi maszynami

Wyniki otrzymane dla zagadnień z m równoległymi maszynami przedstawiono w Tab. 2. Podobnie jak poprzednio gwiazdki w pierwszej kolumnie oznaczają problem, którego deterministyczny odpowiednik jest NP-zupełny lub NP-trudny. Komentarzy wymaga strategia przydziału zadań dla problemów typu Q. W tym przypadku w każdej chwili czasu zadania niewykonane do tej chwili należy przydzielać kolejno do maszyn od 1 do m, według kolejności jaką zajmują one na liście; zakłada się przy tym, że maszyny są uporządkowane wg malejących prędkości s_i. Oznacza to, że zadania są przerywane i przydzielane do maszyn szybszych w przypadku, gdy maszyny te kończą wykonywanie przydzielonych im zadań. Komentarzy wymaga również stosowanie w problemach P|przer.|$\bar{F}_{Cmax}$ i P|przer.|EC_{max} listy dynamicznej wg niemalejących ρ_j dla przypadku, gdy rozkłady zm. los. p_j są z klasy ILR lub IHR a p_j jest zm. los. ciągłą. Załóżmy, że do chwili t zadania j i j+1 nie zostały wykonane, w chwili t ich intensywności hazardu są równe $\rho(x_j) = \rho(x_{j+1})$ oraz zgodnie z listą dynamiczną zadanie j jest wykonywane, natomiast dla zadania j+1 brakło maszyny. W chwili $t+\delta$ zachodzi $\rho(x_j+\delta) > \rho(x_{j+1})$ i na nowej liście, w chwili $t+\delta$, zadanie j+1 znajduje się przed zadaniem j. W tej sytuacji, jeżeli żadne z pozostałych zadań przydzielonych do maszyn nie zostało wykonane, należy przerwać wykonywanie zadania j i rozpocząć zadanie j+1. W następnej chwili sytuacja się odwróci, należy przerwać zadanie j+1 i wrócić do zadania j. Widać stąd, że w omawianym przypadku lista dynamiczna jest strategią nierealizowalną fizycznie. Można obejść tą niedogodność przyjmując jako momenty decyzyjne dyskretne chwile czasu. Podobna sytuacja zachodzi dla problemów P|przer.|$E\Sigma C_j$, P|przer.|$\bar{F}_{\Sigma C_j}$ przy rozkładach czasów wykonywania z klasy DHR i DLR.

Tab. 2

Zadanie	Założenia	Rozwiązanie	Literatura
P|| $E\Sigma C_j$	p_j-rozkład wykładniczy; parametr λ_j	Lista statyczna wg nierosnących λ_j	Weiss, Pinedo /1980/
	p_j-rozkład geometryczny; parametr q_j	Lista statyczna wg nierosnących q_j	Glazebrook/1979/
	p_j-rozkład podobny z klasy IHR	Lista statyczna wg nierosnących ρ_j	Weber/1982, 1979/ Giffins /1981/
P|| $\bar{F}_{\Sigma C_j}$, P|| przer.| $\bar{F}_{\Sigma C_j}$	p_j-rozkład podobny z klasy ILR		Weber /1982, 1979/
P|przer.| $E\Sigma C_j$	p_j-rozkład podobny z klasy DHR	Lista dynamiczna wg nierosnących ρ_j	
P|przer.| $\bar{F}_{\Sigma C_j}$	p_j-rozkład podobny z klasy DLR		
Q|przer.| $E\Sigma C_j$	p_{ij}-rozkład wykładniczy; parametr $\lambda_j s_i$, s_i-prędkość i-tej maszyny	Lista dynamiczna wg nierosnących λ_j $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_n$ /patrz komentarz/	Weiss, Pinedo /1980/
P|| $E\Sigma w_j C_j$	p_j-rozkład wykładniczy; parametr λ_j $\lambda_k \geq \lambda_l \Rightarrow w_k \geq w_l$	Lista statyczna wg nierosnących λ_j	
P2 || EC_{max}*, P2||przer.| EC_{max}	p_j-rozkład wykładniczy; parametr λ_j	Lista statyczna wg niemalejących λ_j	Bruno, Downey /1977/
	p_j-rozkład hiperwykładniczy: $1-\theta_j e^{-u_1 x} + (1-\theta_j)e^{-u_2 x}$	Lista statyczna wg nierosnących Ep_j	Pinedo, Weiss /1979/
P|| EC_{max}*, P|przer.| EC_{max}	p_j-rozkład wykładniczy; parametr λ_j	Lista statyczna wg niemalejących λ_j	Weiss, Pinedo /1980/
	p_j-rozkład podobny z klasy DHR	Lista statyczna wg niemalejących ρ_j	Weber /1982, 1979/
P|| $\bar{F}_{C_{max}}$*, P|przer.| $\bar{F}_{C_{max}}$	p_j-rozkład podobny z klasy DLR		
P|przer.| $\bar{F}_{C_{max}}$	p_j-rozkład podobny z klasy ILR	Lista dynamiczna wg niemalejących ρ_j	Weber /1982, 1979/
P|przer.| EC_{max}	p_j-rozkład podobny z klasy IHR		

Zadanie	Założenia	Rozwiązanie	Literatura
$P\|przer., r_j \geq 0\| \bar{F}_{C_{max}}$	p_j-rozkład podobny z klasy ILR lub DLR r_j-rozkład dowolny, niezależnie od p_j	Lista dynamiczna wg niemalejących ϱ_j	Weber /1982, 1979/
$Q\|przer.\|EC_{max}$	p_{ij}-rozkład wykładniczy; parametr $\lambda_j s_i$ s_i-prędkość i-tej maszyny	Lista dynamiczna wg niemalejących λ_j; $s_1 \geq s_2 \ldots \geq s_n$ /patrz komentarz/	Weiss, Pinedo /1980/
$P\|\|Ew_jU_j$	p_j-rozkład wykładniczy; parametr λ_j d_j-dowolne rozkłady spełniające: $(d_{j_1},\ldots,d_{j_n})$ ma ten sam rozkład łączny dla każdej permutacji $j_1,\ldots,j_n$ $-\lambda_k \geq \lambda_l \Rightarrow w_k \geq w_l$	Lista statyczna wg nierosnących j	Pinedo /1983/

5. Zagadnienie wielomaszynowe typu O,F,J

5.1. Zagadnienie typu O /open shop/

Pinedo i Ross /1982/ otrzymali następujące rezultaty dla problemu dwumaszynowego $O2\|\|EC_{max}$.

Założenia: Czasy wykonywania zadań mają rozkłady wykładnicze, przy czym zadanie j ma dla obydwu maszyn ten sam rozkład z parametrem λ_j.

Optymalna strategia przydziału zadań: W chwili, gdy któraś z maszyn jest wolna należy:

1/ jeżeli są zadania, które nie były dotąd wykonywane na żadnej z maszyn, wtedy należy wśród nich wybrać zadanie z najmniejszym λ_j i przydzielić je do wolnej maszyny,

2/ jeżeli wszystkie zadania były wykonywane na przynajmniej jednej maszynie należy wybrać dowolne zadanie, które nie było wykonywane na aktualnie wolnej maszynie.

Założenia: Czasy wykonywania zadań na maszynie i mają rozkład F_i, i=1,2. Dystrybuanty F_i, i=1,2 spełniają warunek: $\bar{F}_i(x+y)/\bar{F}_i(x) \leq \bar{F}_i(y)$, $x,y \geq 0$.

Optymalna strategia przydziału zadań: W chwili, gdy któraś z maszyn jest wolna należy przydzielić do niej to zadanie, które dotąd nie było wyko-

nywane na żadnej z maszyn. Jeżeli takich zadań nie ma, należy przydzielić dowolne zadanie nie wykonywane dotąd na tej maszynie.
Dla problemu $O2 \| E \sum C_j$ Pinedo /1981/ [36] otrzymał następujący rezultat.
Założenia: Czasy wykonywania zadań na maszynie i mają ten sam rozkład wykładniczy z parametrem λ_i, i=1,2.
Optymalna strategia przydziału zadań: W chwili, gdy któraś z maszyn jest wolna należy przydzielić do niej dowolne zadanie z tych, które dotąd były wykonywane na pozostałej maszynie. Gdy takich zadań brak, należy przydzielić do niej dowolne zadanie z tych, które dotąd nie były wykonywane.

5.2. Zagadnienie typu F /taśmowe/ bez blokowania

Bagga /1970/ otrzymał następujący rezultat dla problemu $F2 \| EC_{max}$.
Założenia: p_{ij} ma rozkład wykładniczy z parametrem λ_{ij}.
Optymalna strategia przydziału zadań: Należy przydzielać zadania do maszyn w kolejności zgodnej z nierosnącymi $\lambda_{1j} - \lambda_{2j}$.

Weber /1979/ [37] wykazał, że jeżeli czasy wykonywania zadań są wykładnicze i nie zależą od maszyn, wówczas w problemie $F \| EC_{max}$ rozkład C_{max} nie zależy od kolejności zadań.

5.3. Zagadnienie typu J /gniazdowe/

Pinedo /1982/ [24] rozszerzył rezultat otrzymany w pracy [1] na problem $J2 \| EC_{max}$ z wykładniczymi czasami wykonywania o parametrach λ_{ij}.
Oznaczmy przez A zbiór zadań, które najpierw mają być wykonywane na maszynie 1 a następnie na maszynie 2, a przez B, zbiór zadań, które najpierw wykonują maszyny 2, a następnie 1.
Optymalna strategia przydziału zadań: W każdej chwili, w której maszyna 1 /2/ jest wolna należy przydzielić jej zadanie nie wykonane ze zbioru A. /B/ z największą wartością $\lambda_{1j} - \lambda_{2j}$ / $\lambda_{2j} - \lambda_{1j}$/. Jeżeli wszystkie zadania ze zbioru A /B/ zostały wykonane na maszynie 1 /2/, wtedy należy przydzielić jej dowolne zadanie ze zbioru B /A/, które dotąd na tej maszynie nie było wykonywane.

LITERATURA

[1] A.C.Bagga: n-Job, 2-machine sequencing problem with stochastic service times, Opsearch 7 /1970/, 184-197.
[2] B.P.Banerjee: Single Facility Sequencing with Random Execution Times, Operations Research 13 /1965/ No. 3.
[3] R.E.Barlow, F.Proschan: Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models, Holt, Rinchard and Winston, New York 1975.
[4] R.E.Barlow, F.Proschan; Mathematical Theory of Reliability, J.Wiley and Sons, New York 1965.

[5] J.Bruno, P.Downey: Sequencing tasks with exponential service times on two machines, Technical Report, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California, Santa Barbara 1977.

[6] J.Bruno, P.Downey, G.N.Frederickson: Sequencing tasks with componential service times to minimize the expected flowtime and makespan, J.Assoc. Comput. Mach. 28 /1981/, 100-113.

[7] T.B.Grabill, W,L.Maxwell: Single Machine Sequencing with Random Processing Times and Random Due-Dates, Naval Res. Logist. Quarterly 16 /1969/, 549-554.

[8] A.A.Cunningham, S.K.Dutta: Scheduling Jobs with Exponentially Distributed Processing Times on Two Machines of a Flow Shop, Naval Res. Logist. Quart. 20 /1973/, 69-81.

[9] C.Derman, G.Lieberman, S.Ross: A Renewal Decision Problem, Management Sci. 24 /1978/, 554-561.

[10] H.Emmons, The two-machine job-shop with exponential processing times, In Symp. Theory of Scheduling and its Applications, ed. S.E. Elmaghraby, Springer-Verlag, Berlin 1973.

[11] J.C.Gittins: Bandit Processes and Dynamic Allocation Indices, J.Roy. Statist. Ser. B, 41 /1979/, 148-177.

[12] J.C.Gittins; Multiserver Scheduling of Jobs with Increasing Completion Rates, J.Appl. Probab., 18 /1981/, 321-324.

[13] K.D.Glazerbrook; On Stochastic Scheduling with Precedence Relations and Switching Costs., J.Appl. Probab. 17 /1980/, 1016-1024.

[14] K.D.Glazerbrook; On Non-preemptive Strategies for Stochastic Scheduling Problems in Continuous Time, Internat. J. Systems. Sci, 12 /1981/, 771-782.

[15] K.D.Glazerbrook: On Non-preemptive Strategies in Stochastic Scheduling, Naval Res. Logist. Quart., 28 /1981/, 289-300.

[16] K.D.Glazerbrook: On the Evaluation of Fixed Permutation as Strategiest in Stochastic Scheduling, Stochastic Processes Appl., 13 /1982/, 171--187.

[18] K.D.Glazerbrook: Methods for the Evaluation of Permutations as Strategies in Stochastic Scheduling Problems, Management Sci., 29 /1983/, 1142-1155.

[19] K.D.Glazerbrook, Scheduling Tasks with Exponential Service Times on Parallel Processors, J. Appl. Probab., 16 /1979/, 685-689.

[20] T.Gonzalez, S.Sahni: Open Shop Scheduling to Minimize Finish Time, J. Assoc. Comput. Mach., 23 /1976/, 665-697.

[21] R.L.Graham, E.L.Lawler, J.K.Lenstra, A.H.G.Rinnooy Kan, Optimization and Approximation in Deterministic Sequencing and Scheduling. A Survey, Ann. Discrete Math., 5 /1979/, 287-326.

[22] M.L.Pinedo; S.M.Ross: Minimizing Expected Makespan in Stochastic Open Shop, Adv. Appl. Prob., 14 /1982/, 898-911.

[23] M,L.Pinedo; G.Weiss: Scheduling of Stochastic Tasks on Two Parallel Processors, Naval Res. Logist. Quart., 26 /1979/, 527-535.

[24] M.L.Pinedo, L.Schrage: Stochastic shop scheduling: A survey, in Deterministic and Stochastic Scheduling, ed. M.A.H. Dempster et al., Reidel, Dordrecht, 1982.

[25] M.L.Pinedo: Stochastic Scheduling with Release Dates and Due Dates, Oper. Res., 31 /1983/, 559-572.

[26] M.L.Pinedo: On the computational complexity of stochastic scheduling problems, in Deterministic and Stochastic Scheduling, ed. M.A.H. Dempster et. al., Reidel. Dordrecht, 1982.

[27] M.H.Rothkopf: Scheduling with Random Service Times, Management Sci., 12 /1966/, 707-713.

[28] R.R.Weber: Scheduling jobs with stochastic processing requirements on parallel machines to minimize makespan or flowtime, J. Appl. Prob., 19 /1982/, 167-182.

[29] R.R.Weber, P.Nash; An Optimal Strategy in Multi-server Stochastic Scheduling, J.R. Statist. Soc. B, 40 /1978/, 322-327.

[30] R.R.Weber: On the optimal assignment of customers to parallel servers, J. Appl. Prob., 15 /1978/, 406-413.

[31] R.R.Weber: Optimal organization of multiserver systems, Ph.D. thesis, University of Cambridge, 1979.

[32] G.Weiss, M.L.Pinedo: Scheduling Tasks with Exponential Service Times on Non-identical Processors to Minimize Various Cost Functions, J. Appl. Prob. 17 /1980/, 187-202.

[33] G.Weiss: Multiserver stochastic scheduling: A survey, in Deterministic and Stochastic Scheduling, ed. M.A.H. Dempster et al., Reidel, Dordrecht, 1982.

[34] E.L.Lawler, J.K.Lenstra, A.H.G.Rinnooy Kan: Recent Developements in Deterministic Sequencing and Scheduling, in Deterministic and Stochastic Scheduling, ed. M.A.H. Dempster et al., Reidel, Dordrecht. 1982.

[35] S.M.Ross: Applied Probability Models with Optimization Applications, Holden-Day, London 1970.

[36] M.Pinedo: Minimizing the Expected Flow Time in a Stochastic Open shop with and without Preemptions, Technical Report, Georgia Institute of Technology, 1981.

[37] R.R.Weber: The interchangeability of Tandem M 1 Queues in Series, J. Appl. Prob. 16 /1979/, 690-655.

Recenzent: Doc.dr hab.inż.Konrad Wala

Wpłynęło do Redakcji do 30.03.1984r.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАСПИСАНИЯ ЗАДАЧ - ОБЗОР

Р е з ю м е

В работе представлен обзор результатов по стохастическим проблемам расписания задач. Представлены алгоритмы упорядочения задач для одномашинных проблем , с параллельными машинами и многомашинных проблем типа O,F,J. В работе приведена обширная библиография.

STOCHASTIC PROBLEMS OF JOBS SCHEDULING - A SURVEY

S u m m a r y

In the paper a survey of the results in stochastic jobs scheduling is made. Algorithms for finding an optimal schedule in single machine problems, parallel machines problems, and open shop, flow shop and job shop are reviewed. The paper includes a wide bibliography.