ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976
Seria: ELEKTRYKA z. 54 Nr kol. 490

Andrzej GONIEWICZ

O STABILNOŚCI KONWERTORÓW IMPEDANCJI UJEMNEJ (NIC)$^{x)}$

Streszczenie. W pracy wykazano, że konwertor impedancji ujemnej jest niestabilny zwarciowo od strony jednego wejścia i jednocześnie niestabilny rozwarciowo od strony drugiego wejścia. Przy opisie konwertora skorzystano z własności wielomianów charakterystycznych.

1. Wstęp

Konwertor impedancji ujemnej jest układem aktywnym, wobec czego jego stabilność w odpowiednich reżimach pracy jest zagadnieniem podstawowym. Rozważania dotyczą konwertora bezpośrednio sprzężonego, nieidealnego [5], [6],[7].
Wprowadzono pojęcie wielomianów charakterystycznych [1], [2], [3] i zastosowano je przy opisie NIC.

2. Pojęcie i własności wielomianów charakterystycznych

Każdy chwórnik niezdegenerowany [4] można opisać równaniem macierzowym którego każdy element jest wymierną rzeczywistą funkcją częstotliwości zespolonej.

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ J_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2(s) \\ J_2(s) \end{bmatrix} \tag{1}$$

s - częstotliwość zespolona.
Macierz łańcuchowa $\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix}$ w pełni opisuje dany czwórnik i na jej podstawie możemy znaleźć 5 pozostałych.
W klasie SLS, każdy element macierzy można przedstawić jako stosunek dwóch wielomianów, będących funkcją częstotliwości zespolonej s.
Dla macierzy łańcuchowej można napisać:

$$A(s) = \frac{L_A(s)}{M_A(s)} \tag{2}$$

$$B(s) = \frac{L_B(s)}{M_B(s)} \tag{3}$$

---
x) NIC - Negative Impedance Converter

$$C(s) = \frac{L_C(s)}{M_C(s)} \tag{4}$$

$$D(s) = \frac{L_D(s)}{M_D(s)}, \tag{5}$$

gdzie: $L_{A,B,C,D}(s)$ i $M_{A,B,C,D}(s)$ odpowiednio wielomiany licznika i mianownika poszczególnych elementów macierzy.

Powstaje pytanie: co wyrażają i jak można zinterpretować te wielomiany? Wiadomo że A(s) jest transmitancją napięciowo-napięciową przy rozwartych zaciskach wyjściowych.

$$A(s) = \frac{U_1(s)}{U_2(s)}\bigg/_{J_2(s)=0} = \frac{L_A(s)}{M_A(s)}$$

lub

$$U_1(s)\ M_A(s) = U_2(s)\ L_A(s)\Big|_{\text{przy } J_2(s) = 0} \tag{6}$$

Z równania (6) widać, że jeśli $U_1(s)$ jest pobudzeniem a $U_2(s)$ reakcją, to wyrażenie:

$$L_A(s) = 0$$

jest równaniem charakterystycznym czwórnika przy rozwartych zaciskach wyjściowych $J_2(s) = 0$ i zwartych zaciskach wejściowych ($U_1(s) = 0$, równanie charakterystyczne dotyczy pobudzenia równego zeru).

Zapiszmy to równanie charakterystyczne w postaci:

$$n_{zo} = 0 .$$

Indeksy oznaczają zwarte wejście i rozwarte wyjście. Wracając do równania (6) zauważmy że jeśli $U_2(s)$ jest pobudzeniem a $U_1(s)$ reakcją,to wielomian mianownika elementu A(s) macierzy łańcuchowej nie może być równaniem charakterystycznym, gdyż warunek $U_2(s) = 0$ i $J_2(s) = 0$ zwarcie i rozwarcie wyjścia równocześnie jest niemożliwy do zrealizowania.

Prowadząc analogiczne rozważania dla pozostałych elementów macierzy łańcuchowej znajdujemy jeszcze trzy wielomiany charakterystyczne tzn. wielomiany reprezentujące równania charakterystyczne dla różnych reżimów pracy czwórnika.

Wielomiany w mianownikach elementów A(s); B(s); C(s); D(s) macierzy łań-

cuchowej są określone przy takich samych warunkach zaciskowych, z czego wynika że są one sobie równe.
Oznaczając ten wielomian przez m, można macierz łańcuchową zapisać przy pomocy wielomianów charakterystycznych w następujący sposób:

$$A(s) = \frac{n_{zo}(s)}{m(s)} \qquad B(s) = \frac{n_{zz}(s)}{m(s)}$$

$$C(s) = \frac{n_{oo}(s)}{m(s)} \qquad D(s) = \frac{n_{oz}(s)}{m(s)} \tag{7}$$

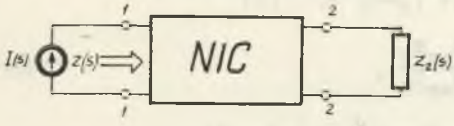
lub

$$[A] = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} n_{zo} & n_{zz} \\ n_{oo} & n_{oz} \end{bmatrix}$$

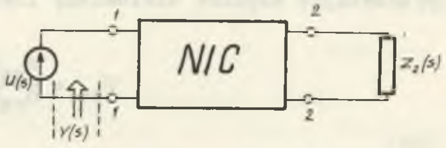
Znaki "+" przy elementach A(s), B(s), C(s) i D(s) wynikają z symetrycznego strzałkowania czwórnika opisanego macierzą łańcuchową.

3. Stabilność zwarciowa i rozwarciowa

Układ jest układem stabilnym, gdy wszystkie jego wielomiany charakterystyczne są wielomianami Hurwitza.
Układ jest stabilny rozwarciowo, jeżeli impedancja rozwarciowa między dwoma dowolnymi węzłami tego układu nie posiada biegunów w prawej półpłaszczyźnie i na osi urojonej (wielomian mianownika impedancji jest wielomianem Hurwitza).
Konwertor impedancji ujemnej pobudzany ze źródła prądowego (rys. 1) i obciążony impedancją $Z_2(s)$ jest stabilny dla tych wartości $Z_2(s)$ dla których wielomian mianownika impedancji rozwarciowej Z(s) od strony zacisków 1-1 jest wielomianem Hurwitza.



Rys. 1



Rys. 2

Układ jest stabilny zwarciowo, jeśli wielomian mianownika admitancji zwarciowej jest wielomian Hurwitza.
Konwertor impedancji ujemnej pobudzany ze źródła napięciowego (rys. 2) i obciążony impedancją $Z_2(s)$ jest stabilny dla tych wartości $Z_2(s)$ dla któ-

rych wielomian mianownika admitancji zwarciowej jest wielomianem Hurwitza.

4. Konwertor nieidelany

Ograniczmy się do niskich częstotliwości, dla których konwertor rzeczywisty aproksymuje idealny.
Opisując konwertor rzeczywisty- jak czwórnik macierzą łańcuchową otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ J_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ J_2 \end{bmatrix}$$

wszystkie elementy są funkcją zmiennej zespolonej s.
Impedancja wejściowa takiego układu, przy obciążeniu wyjścia impedancją Z_2 wynosi:

$$Z_{we} = \frac{AZ_2+B}{D+CZ_2} \cdot \tag{9}$$

Z poprzednich rozważań wiemy, że zarówno licznik jak i moanownik impedancji wejściowej są wielomianami.

Wyrażając poszczególne elementy macierzy łańcuchowej, jako stosunek wielomianów charakterystycznych oraz impedancję obciążenia $Z_2 = \frac{L_2}{M_2}$ otrzymujemy:

$$Z_{we} = \frac{\frac{n_{zo}}{m} \cdot \frac{L_2}{M_2} + \frac{n_{zz}}{m}}{\frac{n_{oo}}{m} \cdot \frac{L_2}{M_2} + \frac{n_{oz}}{m}} \cdot \tag{10}$$

Upraszczając wspólne wielomiany licznika i mianownika otrzymujemy:

$$Z_{we} = \frac{n_{zo}L_2+n_{zz}M_2}{n_{oz}M_2+n_{oo}L_2} , \tag{11}$$

na podstawie (7) można napisać:

$$\frac{n_{zo}}{n_{zz}} = \frac{A}{B} ; \quad \frac{n_{oz}}{n_{oo}} = \frac{D}{C} \cdot \tag{12}$$

Zależności (12) wynikają z tego, że wszystkie elementy macierzy łańcuchowej posiadają ten sam wielomian w mianowniku.
Postępując podobnie, jeśli przyłączymy do wejścia impedancję Z_1, wtedy impedancja wyjściowa:

$$Z_{wy} = \frac{DZ_1+B}{A+CZ_1} \tag{13}$$

Oznaczając $Z_1 = \frac{L_1}{M_1}$ i wyrażając elementy macierzy łańcuchowej poprzez wielomiany charakterystyczne zapisujemy równanie (13) w postaci:

$$Z_{wy} = \frac{n_{oz}L_1+n_{zz}M_1}{n_{zo}M_1+n_{oo}L_1} , \tag{14}$$

Dla czwórnika, który ma być konwertorem impedancji ujemnej dla niskich częstotliwości, zachodzi warunek:

$$\frac{A}{D} = \frac{n_{zo}}{n_{oz}} = -1 , \quad \text{gdy} \quad |s| \to 0 . \tag{15}$$

Ponadto, niezależnie od wartości impedancji obciążenia dla której układ zachowuje własności konwertora:

$$\left.\begin{aligned} |AZ_2| &\gg |B| \\ |D| &\gg |CZ_2| , \end{aligned}\right\} \quad \text{gdy} \quad |s| \to 0 \tag{16}$$

oraz

$$\left.\begin{aligned} |DZ_1| &\gg |B| \\ |A| &\gg |CZ_1| , \end{aligned}\right\} \quad \text{gdy} \quad |s| \to 0 \tag{17}$$

lub

$$|n_{zo}\, L_2| \gg |n_{zz}\, M_2| \tag{18}$$

$$|n_{oz}\, M_2| \gg |n_{oo}\, L_2| , \quad \text{gdy} \quad |s| \to 0 \tag{19}$$

$$|n_{oz}\, L_1| \gg |n_{zz}\, M_1| \tag{20}$$

$$|n_{zo}\, M_1| \gg |n_{oo}\, L_1| \tag{21}$$

Gdy założyć $Z_1 = Z_2$ nierówności (20) i (21) wynikają z (18) i (19). Relacje (18) - (21) są spełnione dla wszystkich częstotliwości zespolonych za wyjątkiem zer i biegunów impedancji Z_1 oraz Z_2. Ze względu na pasywność impedancji obciążenia osobliwości te leżą w lewej półpłaszczyźnie.
Korzystając z rozwiązań przedstawionych w pracy [9] z których wynika, że realizowalny czwórnik, w tym przypadku nieidealny konwertor jest układem pasywnym dla $s = 0$ i $s \to +\infty$
Z warunków pasywności wynika:

$$\frac{A}{B} = \frac{n_{zo}}{n_{zz}} > 0\,, \quad \text{gdy} \quad \sigma \to +\infty \tag{22}$$

$$\frac{D}{C} = \frac{n_{oz}}{n_{oo}} > 0\,, \quad \text{gdy} \quad \sigma \to +\infty \tag{23}$$

$$\frac{D}{B} = \frac{n_{oz}}{n_{zz}} > 0\,, \quad \text{gdy} \quad \sigma \to +\infty \tag{24}$$

$$\frac{A}{C} = \frac{n_{zo}}{n_{oo}} > 0\,, \quad \text{gdy} \quad \sigma \to +\infty \tag{25}$$

Z równań (22) - (25) wynika, że przy $\sigma \to +\infty$ wszystkie wielomiany charakterystyczne muszą być tego samego znaku.

$$\operatorname{sign} n_{zo} = \operatorname{sign} n_{oz} = \operatorname{sign} n_{oo} = \operatorname{sign} n_{zz}\,. \tag{26}$$

Porównując zachowanie się konwertora dla $\sigma \to +0$ oraz $\sigma \to +\infty$ otrzymuje się:

z wzoru (15)

$$\frac{n_{zo}}{n_{oz}} = -1 \quad \text{gdy} \quad |s| \to +0$$

ponieważ

$$\lim |F(s)| = \lim |F(s)|$$

w tym przypadku $|s| \to +0 \qquad \sigma \to +0$

Jednocześnie z wzoru (26) $\dfrac{n_{zo}}{n_{oz}} > 0\,,$ gdy $|s| \to +\infty\,.$

Z ostatnich relacji wynika, że jeden z wielomianów charakterystycznych zmienia znak na osi części rzeczywistej zmiennej s. Wracając do relacji (18) - (21) widzimy że czynniki z wielomianami n_{zo} i n_{oz} dominują nad pozostałymi. Od ich własności więc zależy stabilność konwertora impedancji ujemnej.

Rozpatrując licznik zależności (11) dochodzimy do wniosku że:

$$\mathrm{sign}(n_{zo}\ L_2) = \mathrm{sign}(n_{zz}\ M_2) \quad \text{gdy} \quad |s| \to +\infty \tag{27}$$

Znak we wzorze (27) nie zależy od L_2 oraz M_2 ponieważ są to wielomiany Hurwitza.

Powoduje to, że gdy n_{zo} zmienia znak na dodatniej części osi rzeczywistej, to cały licznik zależności (11) zmienia znak (ponieważ pierwszy składnik licznika dominuje nad drugim).

Zmiana znaku wielomianu n_{zo} (wielomian określający własności konwertora przy zwarciu wejścia i rozwarciu wyjścia) powoduje że przestaje on być wielomianem Hurwitza.

W tym przypadku konwertor od strony wejścia staje się niestabilny zwarciowo.

Zmiana znaku przez wielomian n_{zo}, powoduje że mianownik impedancji wyjściowej Z_{wy} także zmienia znak, co oznacza, że konwertor staje się niestabilny rozwarciowo od strony wyjścia.

Prowadząc analogiczne rozumowanie dla wielomianu n_{zo} dochodzimy do wniosku, że wtedy konwertor impedancji ujemnej jest niestabilny rozwarciowo od strony wejścia i niestabilny zwarciowo od strony wyjścia.

5. Zakończenie

Z przedstawionych rozważań wynika, że niemożliwym jest, by konwertor był jednocześnie stabilny zwarciowo lub rozwarciowo na obu wejściach. Widoczne to jest w relacjach na Z_{we} i Z_{wy}, gdzie o charakterze i wielkości tych impedancji decyduje stosunek wielomianów n_{zo} i n_{oz}, które charakteryzują stan pracy przy zwartych jednych zaciskach i rozwartych drugich lub odwrotnie.

LITERATURA

[1] Pian L.de: Linear Active Network Theory. Prentice Hall, 1962.
[2] Matthaei G.L.: Some Simplications for Analysis of Linear Circuits. Trans. IRE, v. CT-4, No 3, 1957.
[3] Weinberg L.: Network Analysis and Synthesis. Mc Graw-Hill, 1962.
[4] Osiowski J.: Podstawy analizy i syntezy liniowych układów elektrycznych. W-wa 1971.
[5] Su K.L.: Teoria układów aktywnych. W-wa, WNT, 1969.

[6] Mitra S.K.: Analysis and Synthesis of Linear active Networks.J.Wiley, New York 1969.
[7] Brownlie J.D.: On the Stability Properties of a Negative Impedance Converter. Trans. IEEE v. CT-13, March, 1966.
[8] Schwartz A.F.: On the Stability Properties of a Negative Immitance Conwerter. Trans. IEEE v. CT-14, March 1967.
[9] Browlie J.D.: Small-Signal Responses Realizable from d.c.biased devices. Proc. IEE May 1963, v. 110.

О СТАБИЛЬНОСТИ КОНВЕРТОРА ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ИМПЕДАНСА

Р е з ю м е

В статье доказывается что конвертор отрицательного импеданса является нестабильным на входе в режиме короткого замыкания, и одновременно нестабильным на выходе в режиме холостого хода или наоборот. Конвертор описан при помощи характеристических полиномов.

STABILITY OF NEGATIVE IMPEDANCE CONVERTERS (NIC)

S u m m a r y:

In the paper it has been shown that a negative impedance conwerter is short-circuit unstable at one port and opencircuit unstable at the other one. To describe the NIC the use has been made of properties of characteristic polynominals.