

Marian PASKO

## WYBÓR METODY SYNTEZY AKTYWNYCH FILTRÓW RC

**Streszczenie.** W pracy zostały porównane najczęściej stosowane metody syntezy aktywnych filtrów RC. Porównanie metod przeprowadza się na podstawie analizy czułości dobroci  $Q$  funkcji przejścia podstawowego ogniwa filtru pasmowego.

**Wprowadzenie**

Ostatnie lata rozwoju elektrotechniki teoretycznej to między innymi okres intensywnych badań nad problemem syntezy obwodów elektrycznych złożonych z elementów RC i elementów aktywnych. Dzięki wprowadzeniu elementów aktywnych stała się możliwa synteza funkcji, których nie można było realizować wyłącznie przy użyciu elementów pasywnych. Ponadto jest możliwa eliminacja z układów elementów indukcyjnych, elementów o dużych gabarytach wysokiej cenie jednostkowej i całkowicie nieprzydatnych dla niskich i bardzo niskich częstotliwości ze względu na małą dobroć. Synteza układów aktywnych polega w najogólniejszym ujęciu na oddzielnej realizacji części pasywnej i części aktywnej obwodu. Przegląd różnych metod syntezy dwójników i czwórników RC zawierających elementy aktywne przedstawiony jest w pracy [7]. Wśród licznych metod syntezy aktywnych filtrów RC na szczególną uwagę zasługują metody syntezy z wykorzystaniem żyratora, konwertora impedancji ujemnej oraz wzmacniacza operacyjnego. Jednym z kryteriów wyboru odpowiedniej metody może być ocena czułości. Zadaniem przedstawionej pracy jest ocena przydatności poszczególnych metod do realizacji podstawowego ogniwa filtru pasmowego drugiego stopnia, gdyż realizacja wyższego stopnia przy pomocy jednego elementu aktywnego prowadzi do nadmiernej wrażliwości dobroci przy zmianach współczynnika  $k$  charakteryzującego element aktywny. Ponadto znacznie wzrasta pracochłonność obliczeń oraz konieczność użycia bardziej dokładnych elementów. Realizację funkcji przejścia filtrów wyższych stopni należy więc przeprowadzić jako łańcuchowe połączenie podstawowych ogniw drugiego stopnia, rozdzielonych obwodami separującymi.

Funkcję przejścia o biegunach zespolonych syntetyzowanego filtru aktywne-go można przedstawić ogólnie w postaci:

$$K(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (1)$$

gdzie

$$s = \sigma + j\omega.$$

Aby zadaną funkcję przejścia móc syntetyzować w oparciu o elementy aktywne i pasywne RC należy mianownik wyrażenia (1) rozłożyć na sumę lub różnicę dwóch wielomianów z zerami rzeczywistymi ujemnymi w zależności od przyjętego elementu aktywnego. W przypadku modeli syntezy z użyciem konwerterów impedancji ujemnej stosuje się rozkład różnicowy, zwany też rozkładem RC; - RC zaproponowany przez Horowitza [2]. Natomiast rozkład sumaryczny zaproponowany przez Calahana [1] nazywany jest rozkładem RC; RL i stosowany w syntezie przy użyciu żyratorów. Należy zwrócić uwagę, że rozkład na różnicę RC; - RC zawsze jest możliwy natomiast rozkład RC; RL tylko wówczas jeżeli dla wielomianu:

$$D(s) = \prod_{i=1}^n (s-s_1)(s-s_1^*)$$

spełniona jest zależność:

$$\sum_{i=1}^n \arg \{s_1\} \leq \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Rozkład RC; RL nie jest ponadto jednoznaczny.

W syntezie aktywnych filtrów RC z wykorzystaniem wzmacniacza operacyjnego wg tzw. uogólnionej struktury Kuha [5]; [6] mianownik wyrażenia (1) rozkłada się na sumę dwóch wielomianów tak aby jeden zawierał zera rzeczywiste, a drugi tylko urojone [3], [6]. Dla każdej z przedstawionych metod zostanie przeprowadzona analiza czułości dobroci funkcji przejścia na zmianę współczynników rozłożenia wielomianu  $D(s)$  jako kryterium porównawcze przydatności metody. Do analizy użyto funkcji przejścia ogniwa filtru pasmowego o postaci:

$$K_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{H s}{s^2 + 2\xi_0 s + \omega_0^2} = \frac{N(s)}{D(s)}. \quad (3)$$

Dobroć funkcji przejścia określona jest zależnością:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\xi_0}, \quad (4)$$

gdzie:

$\omega_0$  - częstotliwość środkowa filtru,

$\xi_0$  - współczynnik tłumienia.

Czułość określono według klasycznej definicji podanej przez Bode [4].

$$S_{x_1}^Q = \frac{d \ln Q}{d \ln x_1} = \frac{dQ}{dx_1} \cdot \frac{x_1}{Q}, \quad (5)$$

gdzie:

- Q - dobroć funkcji przejścia filtru pasmowego,
- $x_1$  - współczynnik rozłożenia wielomianu D(s),

którego wpływ badamy

$S_{x_1}^Q$  - czułość dobroci Q względem współczynnika  $x_1$ .

Miarą porównawczą różnych metod pod względem czułości może być czułość wypadkowa zdefiniowana następująco:

$$S_{\sum x_1}^Q = \sum_{i=1}^n |S_{x_i}^Q|. \quad (6)$$

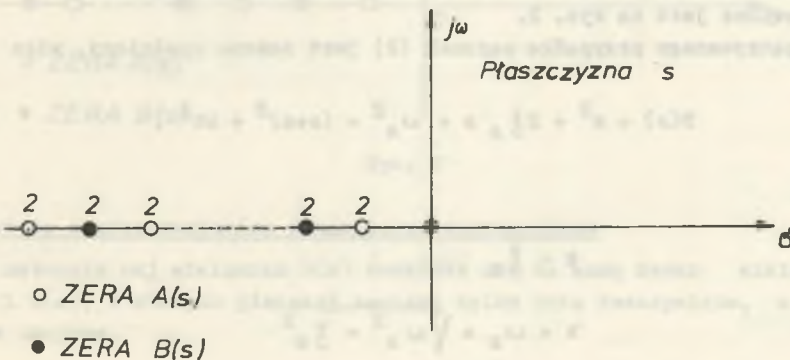
Czułość wypadkowa jest najbardziej "pesymistyczną" czułością i można ją określić bez odnoszenia się do konkretnego schematu.

#### Analiza metod syntezy

##### A. Metoda z wykorzystaniem konwertera impedancji ujemnej

Ogólnie wielomian D(s) można przedstawić jako różnicę dwóch wielomianów

$$D(s) = A(s) - k B(s). \quad (7)$$



Rys. 1

Dla rozkładu optymalnego, to znaczy dla rozkładu w którym minimalizuje się czułość na zmiany współczynnika  $k$  rozkładu zer wielomianów  $A(s)$  i  $B(s)$  przedstawiony jest na rys. 1 [2].

Zera oznaczone na rys. 1 (oraz na dalszych rysunkach) symbolem  $z$  są zera-mi podwójnymi.

Dla rozpatrywanego przypadku:

$$D(s) = s^2 + 2\xi_0 s + \omega_0^2 = (s + \alpha)^2 - ks = (s + \omega_0)^2 - 2(\omega_0 - \xi_0)s \quad (8)$$

dobroć:

$$Q = \frac{\alpha}{2\alpha - k}, \quad (9)$$

natomiast:

$$S_k^Q = \frac{dQ}{dk} \cdot k = 2Q - 1, \quad (10)$$

$$S_{\alpha}^Q = \frac{dQ}{d\alpha} \cdot \alpha = 1 - 2Q,$$

$$\sum x_1^Q = 2(2Q - 1). \quad (11)$$

### B. Metoda z wykorzystaniem żyratora

Jeżeli spełniony jest warunek (2) wówczas

$$D(s) = A(s) + kB(s) \quad (12)$$

przy czym dla optymalnego rozkładu położenie zer wielomianów  $A(s)$  i  $B(s)$  przedstawione jest na rys. 2.

Dla rozpatrywanego przypadku warunek (2) jest zawsze spełniony, więc

$$D(s) = s^2 + 2\xi_0 s + \omega_0^2 = (s+a)^2 + kb^2, \quad (13)$$

jeżeli:

$$a = \xi_0$$

$$b = \omega_x = \sqrt{\omega_0^2 - \xi_0^2}$$

$$k = 1$$

Wówczas rozkład (13) jest optymalny i przyjmuje postać:

$$D(s) = (s + \zeta_0)^2 + \omega_x^2, \quad (14)$$

dobroć

$$Q = \frac{\sqrt{kb^2 + a^2}}{2a}, \quad (15)$$

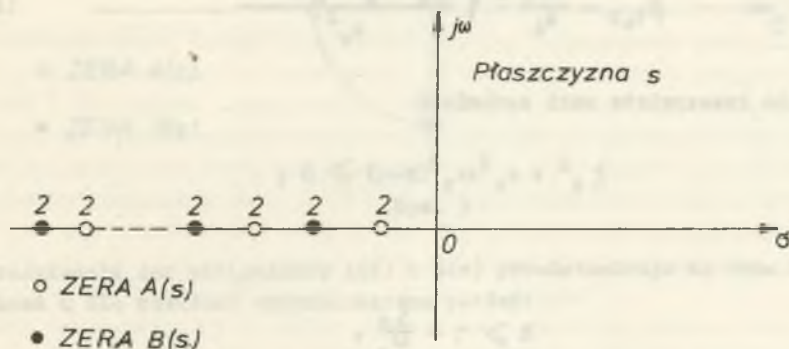
natomiast:

$$s_a^Q = \frac{dQ}{da} \cdot a = -1 + \frac{1}{4Q^2} \quad (16)$$

$$s_b^Q = \frac{dQ}{db} \cdot b = 1 - \frac{1}{4Q^2}$$

$$s_k^Q = \frac{dQ}{dk} \cdot k = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) \quad (17)$$

$$s_{\Sigma x_1}^Q = 2,5 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right).$$



Rys. 2

### C. Metoda z wykorzystaniem wzmacniacza operacyjnego

W metodzie tej wielomian  $D(s)$  rozkłada się na sumę dwóch wielomianów  $A(s)$  i  $B(s)$ , z których pierwszy zawiera tylko zera rzeczywiste, a drugi tylko urojone.

Niech więc:

$$A(s) = A_0(s + \alpha)(s + \beta) \quad (18)$$

$$B(s) = s^2 + \omega_0^2$$

wówczas

$$D(s) = s^2 + 2\xi_0 s + \omega_0^2 = A_0(s + \alpha)(s + \beta) + k(s^2 + \omega_0^2), \quad (19)$$

porównując stronami otrzymuje się:

$$A_0 + k = 1$$

$$A_0(\alpha + \beta) = 2\xi_0 \quad (20)$$

$$A_0\alpha\beta + k\omega_0^2 = \omega_0^2.$$

Wyznaczając  $\beta$  otrzymamy:

$$\beta_{1,2} = \frac{2\xi_0}{A_0} \pm \sqrt{\frac{\xi_0^2 + A_0^2\omega_0^2(k-1)}{A_0^2}}. \quad (21)$$

Aby  $\beta$  było rzeczywiste musi zachodzić

$$\xi_0^2 + A_0^2\omega_0^2(k-1) \geq 0,$$

stąd:

$$k \geq 1 - \frac{\xi_0}{\omega_0},$$

ponadto:

$$\beta > 0 \quad \text{więc} \quad k < 1.$$

Ostatecznie:

$$1 - \frac{\xi_0}{\omega_0} \leq k < 1. \quad (22)$$

Minimalną czułość na zmiany współczynnika  $k$  otrzymuje się dla

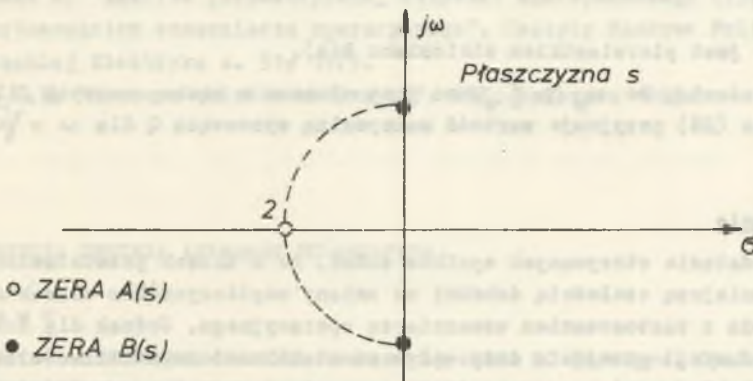
$$k = 1 - \frac{\xi_0}{\omega_0} ;$$

Wtedy

$$A_0 = \frac{\xi_0}{\omega_0} ; \quad \alpha = \beta = \omega_0 . \quad (23)$$

Otrzymany w ten sposób rozkład będzie rozkładem optymalnym. Wielomian  $D(s)$  przyjmie postać:

$$D(s) = \frac{\xi_0}{\omega_0} (s + \omega_0)^2 + \left(1 - \frac{\xi_0}{\omega_0}\right) (s^2 + \omega_0^2) , \quad (24)$$



Rys. 3

o rozkładzie zer wielomianów  $A(s)$  i  $B(s)$  przedstawionym na rys. 3. Dobroć  $Q$  dla rozkładu optymalnego ma postać:

$$Q = \frac{A_0 + k}{2A_0} , \quad (25)$$

natomiast:

$$S_{A_0}^Q = \frac{dQ}{dA_0} \cdot \frac{A_0}{Q} = -1 + \frac{1}{2Q} ,$$

$$S_k^Q = \frac{dQ}{dk} \cdot \frac{k}{Q} = 1 - \frac{1}{2Q}, \quad (26)$$

$$S_{\sum x_1}^Q = 2\left(1 - \frac{1}{2Q}\right). \quad (27)$$

W metodzie tej czułość wypadkowa  $S_{\sum x_1}^Q$  jest stosunkowo mała, o wiele większy wpływ na zmianę charakterystyki filtra mają zmiany zer czwórnika sprzężenia zwrotnego. Wpływ tych zmian można ocenić poprzez modułową czułość wielomianu  $D(j\omega)$  na zmiany zer czwórnika sprzężenia zwrotnego (zmiany zer wielomianu  $B(s)$  w wyrażeniu (24)).

Czułość modułowa ma postać:

$$S_{\gamma} |D(j\omega)| = \frac{d|D(j\omega)|}{d\gamma} \cdot \frac{\gamma}{|D(j\omega)|} = \frac{2\omega_0(\omega_0 - \xi_0)(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_0^2\omega^2}, \quad (28)$$

gdzie  $\gamma$  jest pierwiastkiem wielomianu  $B(s)$ .

Przy założeniu, że  $\omega_0 \gg \xi_0$ , co jest słuszne w wąskopasmowych filtrach, wyrażenie (28) przyjmuje wartość maksymalną wynoszącą  $Q$  dla  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\xi_0^2}$ .

### Zakończenie

Na podstawie otrzymanych wyników widać, że z trzech przedstawionych metod najmniejszą czułością dobroci na zmiany współczynników charakteryzuje się metoda z zastosowaniem wzmacniacza operacyjnego. Jednak dla dużych dobroci  $Q$  funkcji przejścia duży wpływ na stabilność częstotliwościowej charakterystyki ma zmiana zer czwórnika sprzężenia zwrotnego. Oddziaływanie tych zmian scharakteryzowane poprzez  $S_{\gamma} |D(j\omega)|$  jest stosunkowo duże, przy czym maksymalna wartość wynosząca  $Q$  występuje w przybliżeniu dla  $\omega = \omega_0$ . W tym aspekcie najbardziej korzystną jest metoda z wykorzystaniem żyratora.

Pomimo, że w przedstawionych rozważaniach metoda z wykorzystaniem konwertera impedancji ujemnej wypadła niekorzystnie to jednak nie można jej całkowicie eliminować. W rozważaniach pominięto inne istotne czynniki mające niewątpliwie również wpływ na wybór metody syntezy, a mianowicie:

- prostota konstrukcji użytego elementu aktywnego,
- stabilność pracy użytego elementu aktywnego,
- ilość elementów pasywnych potrzebnych do realizacji żądanej funkcji,
- stałość współczynnika  $k$  elementu aktywnego przy zmianach temperatury,
- prostotę regulacji współczynnika  $k$ ,
- prostotę regulacji charakterystyki.



Uzupełnienie rozważań o wymienione czynniki pozwoli na bardzo precyzyjne określenie przydatności poszczególnych metod syntezy.

Problemy te są jednak obszernie i wykraczają poza ramy przedstawionego artykułu.

#### LITERATURA

- [1] Calahan D.A. "Sensitivity Minimization in Active RC Synthesis". IRE Trans. Circuit Theory, March 1962, CT-9.
- [2] Horowitz I.M. "Optimization of Negative-Impedance Methods of Active RC Synthesis". IRE Trans. Circuit Theory, September 1959, CT-6.
- [3] Iwanickij A.M., Wozobienko P. "Sprawienie metodow synteza aktywnych RC-filtrow". Radioelektronika nr 7, 1970.
- [4] Kałachan A. - Sowriemiennyj sintiez ciepiej. Energia 1966.
- [5] Mitra S.K. "Analiza i synteza układów aktywnych liniowych". WNT, Warszawa 1974.
- [6] Pasko M. "Analiza parametrycznej czułości wąskopasmowego filtra RC z zastosowaniem wzmacniacza operacyjnego". Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Elektryka z. 51 1975.
- [7] Su K.L. "Synteza układów aktywnych". WNT, Warszawa 1969.

#### ВЫБОР МЕТОДА СИНТЕЗА АКТИВНЫХ RC-ФИЛЬТРОВ

#### Р е з ю м е

В статье сопоставлены методы синтеза активных RC-фильтров. Сравнение методов производится на основании анализа чувствительности добротности передаточной функции звена типа К полосового фильтра.

#### CHOICE OF THE METHOD OF ACTIVE RC FILTERS SYNTHESIS

#### S u m m a r y:

In the article, some most often used methods of the synthesis of active RC filters have been compared.

Analysis of the sensitivity  $Q$  of the transfer function of the basic section of a bandpass filter has been the basis of comparison.