

Marian PASKO

SYNTEZA WĄSKOPASMOWYCH FILTRÓW RC Z ZEROWĄ CZUŁOŚCIĄ DOBROCI

Streszczenie. W pracy zwrócono uwagę na możliwość wielomianu mianownika funkcji przejścia na sumę lub różnicę dwóch wielomianów z zerową czułością dobroci S_x^Q oraz prześledzono dla tak założonej wartości S_x^Q zmianę S_x^O w stosunku do rozkładu Calahana [1] i Horowitza [2].

Wprowadzenie

Zadania jakie stawia się przy syntezie układów aktywnych, to nie tylko wybór odpowiedniego elementu aktywnego, a z tym związanej odpowiedniej struktury lecz również minimalizacja ilości elementów pasywnych, jak również minimalizacja czułości odpowiedniej wielkości najlepiej charakteryzującej daną syntetyzowaną funkcję na zmiany parametrów tak aktywnych jak i pasywnych.

Realizację funkcji przejścia filtrów wyższych stopni przeprowadza się przy pomocy kaskadowego połączenia ogniw podstawowych, rozdzielonych obwodami separującymi. Tak więc funkcję przejścia można zapisać:

$$K(s) = \prod_{i=1}^n \frac{H_i s^m}{s^2 + 2\sigma_i s + \omega_{0_i}^2}, \quad (1)$$

gdzie:

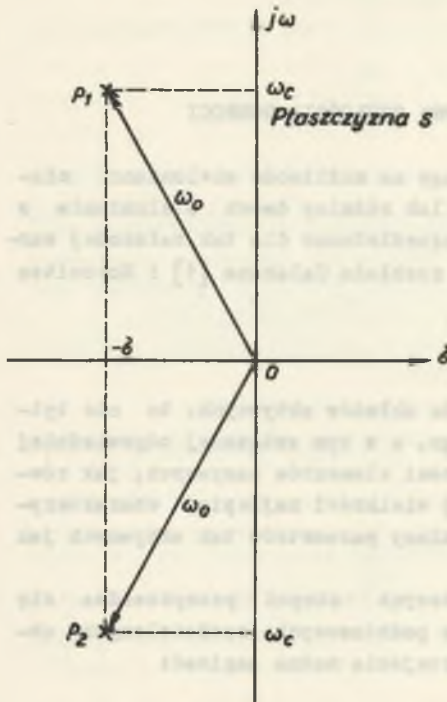
$$m = 0; 1; 2.$$

W dalszej części pracy będziemy zajmować się tylko ogniwem podstawowym dla filtru wąskopasmowego:

$$K_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Hs}{s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2} = \frac{N(s)}{D(s)}. \quad (2)$$

Podstawowe definicje

Równanie $D(s) = 0$ nazywane jest równaniem charakterystycznym a jego pierwiastki nazywane są biegunami p_1 i p_2 . Położenie ich na płaszczyźnie zespolonej podane jest na rys. 1.



Rys. 1

Dobroć funkcji przejścia:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (3)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_c^2 + \delta^2}, \quad (4)$$

gdzie:

ω_0 - pulsacja środkowa filtru,

ω_c - pulsacja drgań własnych,

δ - współczynnik tłumienia.

Dla porównania poszczególnych metod syntezy wprowadzmy definicje czułości [3], [4], [5]

$$S_x^Q = \frac{dQ}{dx} \cdot \frac{x}{Q}, \quad (5)$$

$$S_x^{\omega_0} = \frac{d\omega_0}{dx} \cdot \frac{x}{\omega_0}, \quad (6)$$

oraz definicję czułości biegunu:

$$S_x^p = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{x}{p}, \quad (7)$$

definicja ta różni się od przyjętych w literaturze definicji [3], [4], [6]. Takie przyjęcie wprowadza ujednoczenie wymienionych definicji czułości, ponadto tak zaproponowana definicja S_x^p pozwoli na jej powiązanie z S_x^Q i $S_x^{\omega_0}$.

Niech p jest zerem wielomianu $D(s) = s^2 + 2\delta s + \omega_c^2 + \delta^2$ czyli biegunem wyrażenia (2) wówczas S_x^Q i $S_x^{\omega_0}$ przyjmie postać:

$$S_x^Q = \frac{dQ}{dx} \cdot \frac{x}{Q} = \frac{\delta \omega_c d\omega_c - \omega_c^2 d\delta}{\delta (\omega_c^2 + \delta^2)} \cdot \frac{x}{dx}, \quad (8)$$

$$S_x^{\omega_0} = \frac{d\omega_0}{dx} \cdot \frac{x}{\omega_0} = \frac{\omega_c d\omega_c + \delta d\delta}{\omega_c^2 + \delta^2} \cdot \frac{x}{dx}. \quad (9)$$

Natomiast $p = -\delta + j\omega_c$ stąd:

$$S_x^p = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{x}{p} = \frac{\sigma d\sigma + \omega_0 d\omega_0 + j(\omega_0 d\sigma - \sigma d\omega_0)}{\omega_0^2 + \sigma^2} \frac{dx}{dx}, \quad (10)$$

$$\operatorname{Re} \{S_x^p\} = \frac{\omega_0 d\sigma + \sigma d\omega_0}{\omega_0^2 + \sigma^2} \frac{x}{dx}, \quad (11)$$

$$\operatorname{Im} \{S_x^p\} = \frac{\omega_0 d\sigma - \sigma d\omega_0}{\omega_0^2 + \sigma^2} \cdot \frac{x}{dx}. \quad (12)$$

Porównując wzory (9) i (11) widzimy, że

$$\operatorname{Re} \{S_x^p\} = S_x^{\omega_0}, \quad (13)$$

natomiast przekształcając relacje (8) i (12) otrzymujemy:

$$\operatorname{Im} \{S_x^p\} = -\frac{\sigma}{\omega_0} S_x^Q = -\frac{S_x^Q}{\sqrt{4Q^2-1}}. \quad (14)$$

Ostatecznie więc:

$$S_x^p = S_x^{\omega_0} - j \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}} S_x^Q. \quad (15)$$

Analiza metod syntezy

Procedura syntezy przy użyciu elementów aktywnych i pasywnych RC polega na odpowiednim rozłożeniu wielomianu $D(s)$ wyrażenia (2) na sumę lub różnicę dwóch wielomianów w zależności od przyjętego elementu aktywnego [3], [4], [7]. Optymalizacja wielomianu $D(s)$ na minimalną czułość każdego współczynnika tego wielomianu względem x prowadzi do znanych rozkładów Calahana [1] i Horowitza [2]. Dla rozkładu Calahana, Horowitza czy też rozkładu wielomianu $D(s)$ przy syntezie z wykorzystaniem wzmacniacza operacyjnego [7] S_x^Q jest różne od zera. Porównanie poszczególnych metod jak również wybór odpowiedniej metody syntezy przedstawiono w pracy [8]. Rozpatrzmy teraz problem rozkładu wielomianu $D(s)$ na sumę lub różnicę dwóch wielomianów, ale tak aby $S_x^Q = 0$. Zbadamy również jak zmieniać się będzie $S_x^{\omega_0}$.

W pracach [6], [9] analizowano możliwość rozkładu wielomianu $D(s)$ na sumę i różnicę dwóch wielomianów przy założonym warunku $S_x^Q = 0$, nie rozpatrywano jednak wielkości $S_x^{\omega_0}$, która jest nie mniej ważna w filtrach wąsko-

pasemowych co S_x^Q . Dalsza część pracy poświęcona jest temu problemowi. Znajdźmy jeszcze relację wiążącą S_x^p z rozkładem wielomianu $D(s)$.

Niech:

$$D(s) = A(s) \pm x B(s) = (s-p)M(s), \quad (16)$$

różniczkując obustronnie mamy:

$$- \frac{dp}{dx} M(s) + (s-p) \frac{dM(s)}{dx} = \pm B(s)$$

lecz:

$$(s-p) = 0 \quad \text{więc} \quad (s-p) \frac{dM(s)}{dx} = 0,$$

stąd:

$$S_x^p = \frac{A(s)}{pD(s)} (s-p)_{s=p=-\sigma+j\omega_c} \quad (17)$$

Relacja (17) służy do wyznaczania S_x^p .

a) Metoda z wykorzystaniem żyratora (rozkład na sumę).

Ogólnie wielomian $D(s)$ ma postać:

$$D(s) = s^2 + 2\sigma s + \omega_c^2 = A(s) + x B(s) = A_0(s+a_0)^2 + x B_0(s+b_0)^2, \quad (18)$$

gdzie:

a_0, b_0, A_0, B_0 - liczby rzeczywiste nieujemne, które należy wyznaczyć.

Zakładamy $S_x^Q = 0$ więc:

$$\operatorname{Im} \left\{ S_x^p \right\} = - \frac{2\omega_c^2(a_0 - \sigma) - \sigma \left[(a_0 - \sigma)^2 - \omega_c^2 \right]}{2\omega_c \omega_0^2} = 0, \quad (19)$$

stąd:

$$a_{o_{1,2}} = 2Q\sigma \left(2Q \mp \sqrt{4Q^2 - 1} \right) \quad \text{i dla} \quad Q \gg 1.$$

$$a_{o_1} = \frac{\sigma}{2}; \quad a_{o_2} = 8Q^2\sigma \quad (20)$$

Korzystamy następnie z warunku, że dla $p = -\sigma + j\omega_c$ zachodzi równość:

$$A_0 (a_0 - \sigma + j\omega_c)^2 = -x B_0 (b_0 - \sigma + j\omega_c)^2, \quad (21)$$

która musi być spełniona tak dla modułu jak i argumentu:

$$\arg(a_0 - \sigma + j\omega_c) - \arg(b_0 - \sigma + j\omega_c) = \frac{\pi}{2},$$

stąd:

$$b_0 = \frac{\omega_c^2 - \sigma^2 - \sigma a_0}{\sigma - a_0}. \quad (22)$$

Natomiast A_0 i B_0 wyznaczmy z porównania stronami równości

$$s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2 = A_0(s + a_0)^2 + B_0(s + b_0)^2.$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$a_0 = \frac{\sigma}{2}; \quad b_0 = \sigma(8Q^2 - 1), \quad (23)$$

$$A_0 = \frac{16Q^2 - 4}{16Q^2 - 3}; \quad B_0 = \frac{1}{16Q^2 - 3}$$

i wielomian $D(s)$ dla którego $S_x^Q = 0$ przyjmie postać:

$$D(s) = \frac{16Q^2 - 4}{16Q^2 - 3} \left(s + \frac{\sigma}{2}\right)^2 + x \frac{1}{16Q^2 - 3} \left[s + \sigma(8Q^2 - 1)\right]^2. \quad (24)$$

Aby obliczyć $S_x^{\omega_0}$ należy skorzystać z warunku:

$$R_e \left\{ S_x^p \right\} = S_x^{\omega_0} = -A_0 \frac{(a_0 - \sigma)(a_0 \omega_c - \sigma \omega_c + 2\sigma \omega_c) - \omega_c^3}{2\omega_c \omega_0^2}. \quad (25)$$

Dla podanych wartości a_0 , b_0 , A_0 , B_0 (23) wyrażenie (25) przyjmie wartość

$$S_x^{\omega_0} = \frac{16Q^2 - 4}{16Q^2 - 3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{32Q^2}\right) \approx \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{16Q^2}\right). \quad (26)$$

b) Metoda z wykorzystaniem konwertora impedancji ujemnej

Ogólnie wielomian $D(s)$ przedstawia się jako różnicę dwóch wielomianów w postaci:

$$D(s) = s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2 = A(s) - x B(s) = A_0(s + a_0)^2 - x B_0(s + b_0). \quad (27)$$

Zakładamy znów $S_x^Q = 0$ więc:

$$\text{Im} \left\{ S_x^P \right\} = A_0 \frac{\zeta [(a_0 - \zeta)^2 - \omega_c^2] - 2\omega_0^2(a_0 - \zeta)}{2\omega_c \omega_0^2} = 0, \quad (28)$$

stąd:

$$a_{0,1,2} = \frac{\omega_0}{\zeta} (\omega_0 \mp \omega_c). \quad (29)$$

Postępując analogicznie jak przy rozkładzie na sumę otrzymujemy:

$$a_0 = 8Q^2 \zeta; \quad b_0 = \frac{2Q^2 \zeta (16Q^2 - 1)}{8Q^2 - 1}; \quad A_0 = 1, \quad (30)$$

$$B_0 = 2\zeta (8Q^2 - 1)$$

czyli:

$$D(s) = (s + 8Q^2 \zeta)^2 - 2x \zeta (8Q^2 - 1) \left[s + \frac{2Q^2 \zeta (16Q^2 - 1)}{8Q^2 - 1} \right] \quad (31)$$

i przy $S_x^Q = 0$ natomiast:

$$S_x^{\omega_0} = \text{Re} \left\{ S_x^P \right\} = \frac{1}{2} (1 - 16Q^2). \quad (32)$$

W tabeli 1 zestawiono wyniki dla zaproponowanego rozkładu z rozkładem Calahana [1] i Horowitza [2]. Proponując wyniki widzimy, że dla ω_0 rozkładu na sumę sprowadzenie S_x^Q do zera spowodowało nieznaczny wzrost $S_x^{\omega_0}$ w porównaniu z rozkładem Calahana, natomiast sprowadzenie S_x^Q do zera w drugim przypadku (rozkład na różnicę) spowodowało znaczny wzrost $S_x^{\omega_0}$ w porównaniu z rozkładem Horowitza. Nausza się zatem wniosek, że rozpatrywanie tylko zmian S_x^Q przy równoczesnym pominięciu zmian $S_x^{\omega_0}$ jest niewystarczające. Takie podejście prowadziłoby do błędnych decyzji przy projektowaniu ukła-

Tabela 1

Metoda syntezy	ROZKŁAD WIELOMIANU $D(s) = s^2 + 2\delta s + \omega_0^2$	S^2	$S \omega_0$	ROZKŁAD ZER WIELOMIANÓW $A(s)$ i $B(s)$ na płaszczyźnie s
RC - ZYRATOR	ROZKŁAD CALAHANA $A(s) + B(s) = (s + \delta)^2 + X \omega_c^2$	$\frac{1}{2}(1 - \frac{\delta}{\omega_c^2})$	$\frac{1}{2}(1 - \frac{\delta}{\omega_c^2})$	
	ROZKŁAD DLA KTÓREGO $S^2 = 0$ $A(s) + X B(s) = \frac{16Q^2 - 1}{16Q^2 - 3} (s + \frac{3}{2})^2 + X \frac{1}{16Q^2 - 3} [(s + \delta)(8Q^2 - 1)]^2$	0	$\frac{1}{2}(1 - \frac{\delta}{\omega_c^2})$	
RC - KONWERTOR	ROZKŁAD HORONITZA $A(s) - X B(s) = (s + \omega_0)^2 - 2X(\omega_0 - \delta)s$	$2Q - 1$	0	
	ROZKŁAD DLA KTÓREGO $S^2 = 0$ $A(s) - X B(s) = (s + \frac{2\omega_0^2}{\delta})^2 - 2X(\frac{2\omega_0^2}{\delta} - \delta) [(s + \frac{\omega_0^2(4\omega_0^2 - \delta^2)}{2\delta})(2\omega_0^2 - \delta^2)]$	0	$\frac{1}{2}(1 - 16Q^2)$	

dów aktywnych a w szczególności filtrów wąskopasmowych, gdzie wymaga się nie tylko stałości Q lecz również ω_0 . Dlatego też dopiero całkowite zestawienie zmian pozwoli wybrać taki a nie inny układ w zależności od konkretnego przeznaczenia układu.

LITERATURA

- [1] Calahan D.A. - Sensitivity Minimalization in Active RC Synthesis. IRE Trans. Circuit Theory. March 1962, CT-9.
- [2] Horowitz I.M. - Optimization of Negative-Impedance Methods of Active RC Synthesis. IRE Trans. Circuit Theory. September 1959, CT-6.
- [3] Hulesman L.P. - Theory and Design of Active RC Circuits. Mc Graw-Hill, New York 1968.
- [4] Mitra S.K. - Analiza i synteza układów aktywnych liniowych. WNT, Warszawa 1974.
- [5] Su K.L. - Teoria układów aktywnych. WNT, Warszawa 1969.
- [6] Kim H.K., Phan C.S. - Polynomial Decomposition for the Minimization of Quality Factor Sensitivity. IEEE Trans. on Circuit Theory. July 1972.
- [7] Pasko M. - Analiza parametrycznej czułości wąskopasmowego filtra RC z zastosowaniem wzmacniacza operacyjnego. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Elektryka z. 51, 1975.
- [8] Pasko M. - Wybór metody syntezy aktywnych filtrów RC. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Elektryka nr 54, 1976.
- [9] Phung L., Goulet R. - Quadratic Polynomial Decomposition for the Simultaneous Minimization of Root and Quality-Factor Sensitivities. IEEE Trans. on Circuits and Systems. January 1974. N 1.

СИНТЕЗА ПОЛОСОВЫХ АКТИВНЫХ RC-ФИЛЬТРОВ С НУЛЕВОЙ
ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬЮ ДОБРОТНОСТИ

Р е з ю м е

В работе обращено внимание на возможность разложения полинома знаменателя передаточной функции на сумму или разность двух полиномов с нулевой чувствительностью добротности а также произведен анализ изменения по отношению к разложению Калахана и Горовица.

SYNTHESIS OF BAND-PASS FILTERS RC WITH ZERO Q - SENSITIVITY

S u m m a r y:

This paper pays attention to the possibility of a decomposition of the denominator polynomial of transfer function into a sum or a difference of two polynomials with zero Q-sensitivity S_x^Q . For that value of S_x^Q a change of S_x has been investigated and compared with the one obtained by the Całahan and Horowitz polynomial decomposition.