

Jerzy Jaskulski

Instytut Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej

ANALIZA OBWODÓW DWURDZENIOWEGO INDUKCYJNEGO  
DZIELNIKA NAPIĘCIA

Streszczenie. Podano schematy zastępcze dwurdzeniowego indukcyjnego dzielnika napięcia oraz zależności opisujące prądy i napięcia w obwodach dzielnika w stanie jałowym oraz przy obciążeniu poszczególnych uzwojeń. Przedstawiono wyniki pomiarów parametrów elektrycznych i magnetycznych dzielnika w zakresie małych częstotliwości akustycznych.

### 1. Wprowadzenie

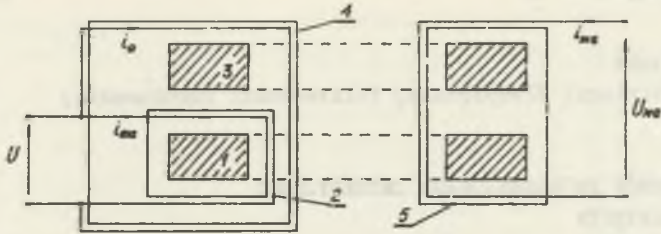
W wielu pomiarach takich jak komparacja wzorców, sprawdzanie dzielników i kompensatorów napięcia stałego, pomiar niskich temperatur [1] itp. wymagane jest zastosowanie dzielników napięcia o dużej dokładności w zakresie małych częstotliwości akustycznych. Z aktualnie znanych typów dzielników najlepsze właściwości metrologiczne w tym zakresie mają dwurdzeniowe indukcyjne dzielniki napięcia (IDN), charakteryzujące się małymi błędami rzędu  $1 \cdot 10^{-8}$  przy  $f=20 \dots 400$  Hz [2, 3].

Przy projektowaniu konstrukcji tych urządzeń niezbędna jest znajomość równań opisujących prądy i napięcia dzielnika w stanie jałowym i przy obciążeniu poszczególnych jego uzwojeń oraz zmian tych wielkości w funkcji częstotliwości i napięcia wejściowego. Zależności te stanowią podstawę do szczegółowego określenia źródeł błędów dzielnika, analitycznego ujęcia błędów, doboru materiałów, optymalizacji konstrukcji itp.

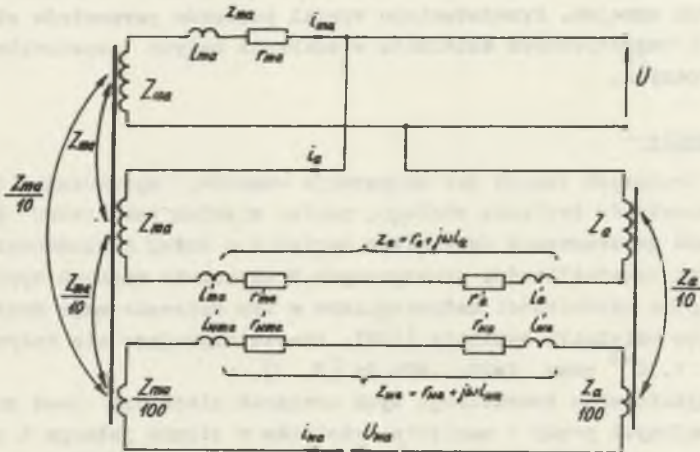
### 2. Dzielnik w stanie jałowym. Schemat zastępczy i równania pierwszej dekad

Pojedyncza dekada dzielnika dwurdzeniowego (rys. 1) ma dwa rdzenie magnetyczne, dwa uzwojenia pierwotne (magnesujące i stosunkowe) oraz uzwojenie wtórne [2]. Uzwojenia pierwotne połączone są równolegle i mają taką samą liczbę zwojów, natomiast uzwojenie wtórne ma 10-krotnie mniejszą liczbę zwojów. Uzwojenie stosunkowe, podobnie jak w dzielniku autotransformatorowym, wykonane jest w postaci uzwojenia multifilarnego i nawinięte jest wokół obu rdzeni magnetycznych. Rozwiązanie takie umożliwia podział napięcia wejściowego w zakresie  $U_k = 0,1 \pm 1,0 U_{we}$ .

Analizę obwodów dzielnika przeprowadzono w oparciu o schemat zastępczy podany na rys. 2. Przy budowie schematu zastępczego przyjęto założenia:



Rys. 1. Rozwiązanie konstrukcyjne dzielnika dwurdzeniowego  
 1 - rdzeń magnesujący, 2 - uzwojenie magnesujące, 3 - rdzeń korekcyjny,  
 4 - uzwojenie stosunkowe, 5 - uzwojenie wtórne



Rys. 2. Schemat zastępczy dzielnika dwurdzeniowego w stanie jałowym

- impedancje własne i wzajemne uzwojeń stosunkowego i magnesującego związane z rdzeniem magnesującym są równe i wynoszą  $Z_{ma}$ ,
- impedancje własne uzwojenia wtórnego związane z rdzeniem magnesującym i korekcyjnym wynikają ze stosunków zwojów dzielnika i wynoszą odpowiednio  $Z_{ma}/100$  oraz  $Z_s/100$ ,
- impedancje wzajemne pomiędzy uzwojeniem wtórnym i magnesującym oraz uzwojeniem wtórnym i stosunkowym wynoszą odpowiednio  $Z_{ma}/10$  i  $Z_s/10$ ,
- sprzężenie pomiędzy indukcyjnymi składnikami impedancji rozproszenia mają bardzo mały wpływ na rozpyły prądów w obwodzie dzielnika i zostały pominięte,
- admitancje między poszczególnymi elementami dzielnika decydują głównie o wartościach błędów podziału i ich wpływ na wartość prądów i napięć został pominięty. Poruszone zagadnienia stanowią treść oddzielnych opracowań [5, 8].

Równania dzielnika w stanie jałowym mają postać [2]:

$$U_{we} = i_{ma} (z_{ma} + Z_{ma}) + i_a Z_{ma}, \quad (1)$$

$$U_{we} = i_{ma} Z_{ma} + i_a (z_a + Z_{ma} + Z_a), \quad (2)$$

$$U_{wa} = i_{ma} \frac{Z_{ma}}{10} + i_a \frac{Z_a + Z_{ma}}{10}. \quad (3)$$

Rozwiązując układ równań (1-3) uzyskuje się równania prądów i napięć dzielnika dwurdzeniowego w stanie jałowym:

$$i_a = i_{ma} \frac{z_{ma}}{z_a + Z_a}, \quad (4)$$

$$i_a = \frac{U_{we}}{z_{ma} + Z_{ma}} \frac{z_{ma}}{z_a + Z_a}, \quad (5)$$

$$i_{ma} = \frac{U_{we}}{z_{ma} + Z_{ma}} \left(1 - \frac{z_{ma}}{z_a + Z_a}\right), \quad (6)$$

$$\frac{U_{wa}}{U_{we}} = 0,1 \left(1 - \frac{z_{ma}}{z_{ma} + Z_{ma}} \frac{z_a}{z_a + Z_a}\right). \quad (7)$$

Z równań (4-7) wynikają korzyści osiągnięte przez zastosowanie konstrukcji dwurdzeniowej do budowy dzielnika indukcyjnego:

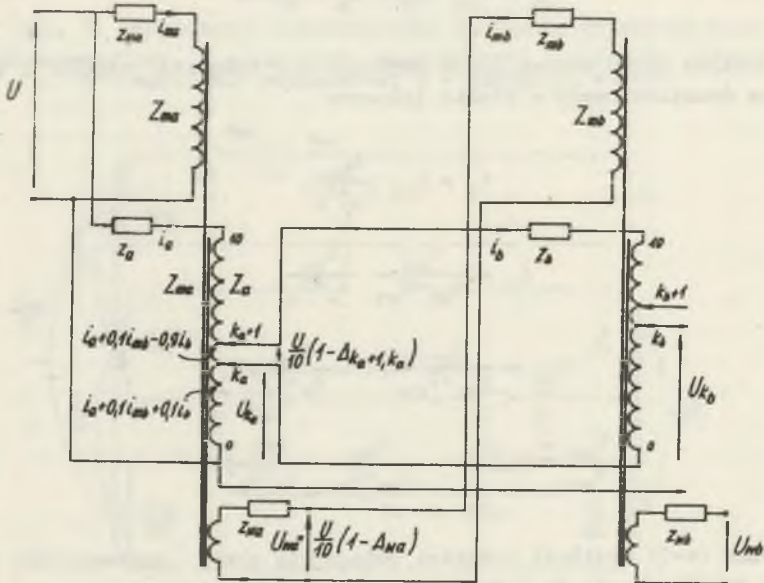
- bardzo mała wartość prądu w uzwojeniu stosunkowym, mniejsza od prądu w uzwojeniu dzielnika autotransformatorowego w stosunku  $z_{ma}/(z_a + Z_a)$ ,
- mały błąd stosunku napięć  $U_{wa}/U_{we}$ , mniejszy od błędu występującego w tradycyjnym transformatorze w stosunku  $z_a/(z_a + Z_a)$ .

Mała wartość prądu  $i_a$  daje korzyści w postaci zmniejszenia błędów spowodowanych nierównościami impedancji poszczególnych sekcji, impedancjami doprowadzeń oraz wzajemnym obciążaniem się dekad. Mały błąd napięcia  $U_{wa}$  przyczynia się do zmniejszenia błędów następnej dekady w dzielniku wielodekadowym (rys. 3).

Wyrażenia  $z_{ma}/(z_a + Z_a)$  oraz  $z_a/(z_a + Z_a)$  są stosunkami impedancji rozproszenia uzwojeń pierwotnych i impedancji własnej uzwojenia stosunkowego i w poprawnie wykonanym dzielniku są mniejsze niż  $5 \cdot 10^{-3}$  przy  $f = 20\text{Hz}$  [3]. Daje to możliwość budowy dwurdzeniowych IDN mających małe błędy w zakresie małych częstotliwości akustycznych.

### 3. Dzielnik obciążony. Schemat zastępczy i równania pierwszej dekady dzielnika

W celu uzyskania wielostopniowego podziału napięcia pojedyncze dekady dwurdzeniowe są łączone kaskadowo (rys. 3). Impedancje uzwojeń dekady drugiej stanowią w tym przypadku obciążenie uzwojeń dekady pierwszej i zmieniają rozplływ prądów w poszczególnych jej obwodach (rys. 3).



Rys. 3. Schemat zastępczy dzielnika dwurdzeniowego obciążonego drugą dekadą

Podstawowe równania prądów i napięć dzielnika dwurdzeniowego obciążonego drugą dekadą mają postać [12]:

$$i_k = \frac{U_{we}}{z_{ma} + z_{ma}} \frac{z_{ma}}{z_a + z_a} + 0,1 i_{mb} \left( 1 - \frac{z_a}{z_a + z_a} \right) + 0,1 i_b, \quad (8)$$

$$i_{k_a+1, k_a} = \frac{U_{we}}{z_{ma} + z_{ma}} \frac{z_{ma}}{z_a + z_a} + 0,1 i_{mb} \left( 1 - \frac{z_a}{z_a + z_a} \right) - 0,9 i_b, \quad (9)$$

$$i_{ma} = \frac{U_{we}}{z_{ma} + z_{ma}} \left( 1 - \frac{z_{ma}}{z_a + z_a} \right) + 0,1 i_{mb} \frac{z_a}{z_a + z_a}, \quad (10)$$

$$\frac{U_{wa}}{U_{we}} = 0,1 \left[ 1 - \frac{z_{ma}}{z_{ma} + z_{ma}} \frac{z_a}{z_a + z_a} - \frac{1}{z_{mb}} (z_{wa} + 0,01 z_a) \right]. \quad (11)$$

Ze wzorów (8-11) wynika, że obciążenie uzwojenia wtórnego powoduje wzrost prądu w uzwojeniu stosunkowym (8, 9), przy czym gęstość tego prądu wzdłuż całego uzwojenia jest jednakowa. Obciążenie jednej sekcji uzwojenia stosunkowego uzwojeniem stosunkowym 2 dekady powoduje znaczną zmianę prądu w sekcji obciążonej (9) i przyrost prądu w pozostałych sekcjach (8), natomiast prąd w uzwojeniu magnesującym praktycznie nie ulega zmianie (10). Jednocześnie zwiększa się błąd stosunku napięć  $U_{wa}/U_{we}$  (11). Są to zjawiska obniżające częściowo zalety konstrukcji dwurdzeniowej. Należy jednak zaznaczyć, że mimo to ze względu na małą wartość prądu  $i_b$  oraz jednakową gęstość prądu  $i_{mb}$  we wszystkich sekcjach, dokładność dzielników dwurdzeniowych w zakresie małych częstotliwości akustycznych jest wielokrotnie większa od dokładności dzielników autotransformatorowych [8].

#### 4. Schemat zastępczy i równania drugiej dekady dzielnika

Dekada druga i dekady następne zasilane są z dwóch oddzielnych źródeł napięcia, które stanowią: uzwojenie wtórne oraz jedną sekcję uzwojenia stosunkowego. Źródła te różnią się impedancjami wewnętrznymi oraz wartościami napięć wyjściowych (rys. 3). Równania prądów i napięć drugiej dekady mają postać:

$$i_b = \frac{U_{we}}{10(z_{mb} + Z_{mb})} \left[ \frac{z_{mb}}{z_{mb} + Z_{mb}} + \Delta_{wa} - \Delta_{k_{a+1}, k_a} \right], \quad (12)$$

$$i_{mb} = \frac{U_{we}}{10(z_{mb} + Z_{mb})} \left[ 1 - \Delta_{wa} \left( 1 + \frac{z_{mb}}{Z_b} \right) + \Delta_{k_{a+1}, k_a} \frac{z_{mb}}{Z_b} \right], \quad (13)$$

$$\frac{U_{wb}}{U_{we}} = \frac{1}{100} \left[ 1 - \frac{z_{mb}}{z_{mb} + Z_{mb}} \frac{z_b}{z_b + Z_b} - \Delta_{k_{a+1}, k_a} - \Delta_{wa} \frac{z_b}{Z_b} \right], \quad (14)$$

Błędy  $\Delta_{wa}$  i  $\Delta_{k_{a+1}, k_a}$  są małe ( $< 1 \cdot 10^{-5}$ ) [3, 8] stąd ich wpływ na wartość prądów i napięć jest do pominięcia. Dodatkowo wpływ ten jest samoczynnie kompensowany gdyż zmniejszeniu prądu w uzwojeniu magnesującym odpowiada wzrost prądu w uzwojeniu stosunkowym. Wynika stąd, że równania prądów i napięć dekady drugiej oraz dekad następnych mogą być opisywane równaniami podanymi dla dekady pierwszej (4-7). Dotyczy to również zależności podanych dla dzielnika obciążonego (8-11).

#### 5. Wypadkowy prąd pierwszej dekady w dzielniku wielodekadowym

W dzielniku wielodekadowym prąd płynący przez uzwojenie stosunkowe pierwszej dekady jest sumą prądu stanu jałowego oraz prądów obciążenia zależnych od impedancji uzwojeń magnesujących i stosunkowych wszystkich (i-1) niższych dekad. Zakładając identyczne parametry wszystkich dekad mamy:

$$i_{k_a} = \frac{U_{we}}{Z_{ma}} \frac{Z_{ma}}{Z_a} \left( 1 + \sum_{j=1}^{i-1} 10^{-2j} \right) + \frac{U_{we}}{Z_{ma}} \sum_{j=1}^{i-1} 10^{-2j}, \quad (16)$$

gdzie:  $j = 1, 2, \dots, i-1$ .

W równaniu (16) pierwszy składnik przedstawia prąd w stanie jałowym oraz jego przyrost spowodowany dołączeniem uzwojeń stosunkowych ( $i-1$ ) niższych dekad. Drugi składnik przedstawia przyrost prądu spowodowany dołączeniem uzwojeń magnesujących. W podobny sposób można wyprowadzić zależności na prądy w obciążonej sekcji uzwojenia stosunkowego oraz w uzwojeniu magnesującym [8].

#### 6. Równania dzielnika dwurdzeniowego przy częstotliwości $f = 400\text{Hz}$

W równaniach (4-15) stosowano ogólny zapis impedancji uzwojeń, stąd nie obrazują one zjawisk zachodzących w dzielniku przy zmianach częstotliwości napięcia wejściowego. Impedancje uzwojeń stanowią równoległe połączenie indukcyjności własnej i rezystancji strat szeregowo połączonych z indukcyjnością rozproszenia i rezystancją uzwojeń [2, 8]. Uwzględniając to, charakterystyczne wielkości dzielnika dwurdzeniowego są:

$$\frac{Z_a}{Z_a + Z_a} = \left( \frac{r_a}{R_a} + \frac{l_a}{L_a} \right) + j\omega \left( \frac{l_a}{R_a} - \frac{1}{\omega^2 L_a} \right), \quad (17)$$

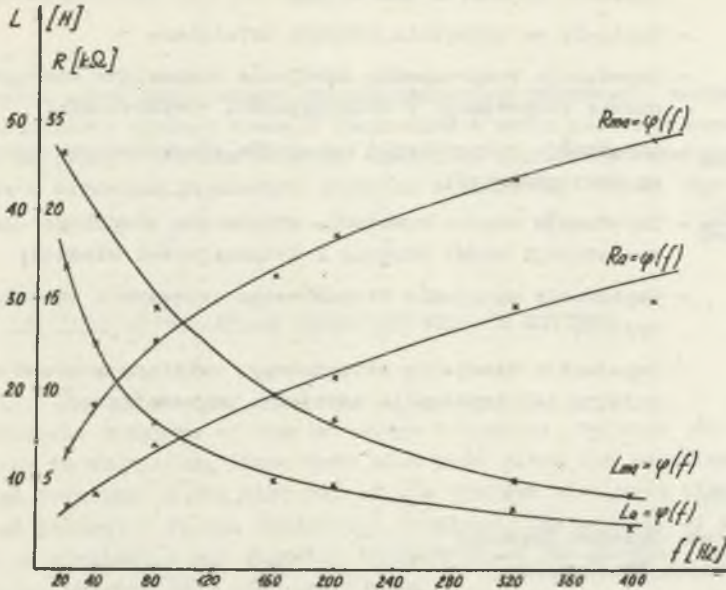
$$\frac{Z_{ma}}{Z_a + Z_{ma}} = \left( \frac{r_{ma}}{R_a} + \frac{l_a}{L_a} \right) + j\omega \left( \frac{l_a}{R_a} - \frac{r_{ma}}{\omega^2 L_a} \right) \quad (18)$$

$$i_a = U_{we} (r_{ma} + j\omega l_{ma}) \left[ \left( \frac{1}{R_{ma} R_a} - \frac{1}{\omega^2 L_{ma} L_a} \right) - j \left( \frac{1}{\omega L_a R_{ma}} + \frac{1}{\omega L_{ma} R_a} \right) \right] \quad (19)$$

Dla dzielnika o parametrach: rdzeń magnesujący  $74 \times 40 \times 25$  mm, rdzeń korekcyjny  $74 \times 40 \times 10$  mm, liczba zwojów 300, średnica drutów 0,5 mm parametry szeregowo wynoszą [8]:  $r_a \approx 6\Omega$ ,  $r_{ma} = 2\Omega$ ,  $l_a = 51\mu\text{H}$ ,  $l_{ma} = 12\mu\text{H}$  przy  $f = 20 \div 400$  Hz. Wartości parametrów równoległych w funkcji częstotliwości podano na rys. 4.

Z pomiarów wynika, że w zakresie małych częstotliwości akustycznych  $r_{ma} \gg \omega l_{ma}$  i  $r_a \gg \omega l_a$ , a więc decydujący wpływ na wartość wyrażeń (17-19) mają stosunki  $r_a/R_a$  i  $r_{ma}/R_a$  dla części rzeczywistej oraz  $r_a/\omega L_a$  i  $r_{ma}/\omega L_a$  dla części urojonej. Dla wykonanych dzielników dwurdzeniowych uzyskano  $r_a/R_a < 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $r_{ma}/R_a < 1 \cdot 10^{-3}$  oraz  $r_a/\omega L_a < 2 \cdot 10^{-3}$  przy  $f = 20$  Hz [8].

W praktycznych rozwiązaniach dzielników w niewielkim stopniu można wpływać na rezystancję uzwojeń, dlatego dalszą poprawę parametrów dzielnika dwurdzeniowego w zakresie małych częstotliwości akustycznych można osiągnąć przez zwiększenie rezystancji strat  $R_a$  i indukcyjności własnej  $L_a$ .



Rys. 4. Indukcyjność własna uzwojenia magnesującego i stosunkowego w funkcji częstotliwości

W tym celu należy stosować rdzenie o lepszych właściwościach magnetycznych, mniejszej grubości taśmy oraz uzwojenia o większej liczbie zwojów.

## 7. Podsumowanie

Zostało wykazane, że konstrukcja dwurdzeniowa daje wielokrotne zmniejszenie prądu stanu jałowego w uzwojeniu stosunkowym oraz prądu obciążenia niższymi dekadami. W dzielnikach wykonanych przez autora uzyskano około 1000-krotne zmniejszenie tych prądów, co pozwoliło na budowę wielodekadowych IDN o błędach rzędu  $10^{-6}$  przy  $f \geq 20\text{Hz}$  [6-8].

Podane równania prądów i napięć umożliwiają indywidualne projektowanie pojedynczych dekad dwurdzeniowych oraz odpowiedni dobór parametrów konstrukcyjnych dzielników.

### Ważniejsze oznaczenia

- $a, b \dots i$  - oznaczenia kolejnych dekad dzielnika, 1-szej, 2-giej, i-tej;
- $k_a \dots k_i$  - numer nastawionego odczepu na dekadzie 1-szej, i-tej;
- $i_a, i_{ma}, i_{wa}$  - prąd w uzwojeniu stosunkowym, magnesującym oraz wtórnym;
- $i_{k_a}$  - prąd płynący przez część sekcji uzwojenia stosunkowego między odczepami 0 ... k;

- $U_{we}$  - napięcie wejściowe dzielnika;  
 $U_{wa}$  - napięcie na uzwojeniu wtórnym dzielnika;  
 $z=r+j\omega l$  - impedancja rozproszenia uzwojenia stanowiąca szeregowe połączenie rezystancji i indukcyjności rozproszenia;  
 $z_a, z_{ma}, z_{wa}$  - impedancja rozproszenia uzwojenia stosunkowego, magnesującego oraz wtórnego;  
 $Z = \frac{j\omega LR}{j\omega L + R}$  - impedancja własna uzwojenia stanowiąca równoległe połączenie rezystancji strat rdzenia i indukcyjności własnej;  
 $Z_a$  - impedancja uzwojenia stosunkowego związana z rdzeniem korekcyjnym;  
 $Z_{ma}$  - impedancja uzwojenia stosunkowego związana z rdzeniem magnesującym lub impedancja uzwojenia magnesującego.

## RECENZENT:

doc. dr hab. Ryszard Gotszalk  
 Politechnika Wrocławska

## LITERATURA

- [1] Deacon T.A., Accurate 2 parts in  $10^{-7}$  inductive voltage divider for 20-200 Hz, Proc. IEE, vol. 117, 1970, nr 3, s. 634-640.
- [2] Deacon T.A., Hill I.I., Two-stage inductive voltage dividers, Proc. IEE, vol. 115, 1968, nr 6, s. 888-892.
- [3] Hill I.I., An optimizer for a low-frequency inductive voltage divider, IEEE Trans., vol. IM-21, 1972, nr 4, s. 368-372.
- [4] Hill I.I., Der Entwurf und die Anwendungsmöglichkeiten von Induktiven Spannungsteilern mit einstellbaren Übersetzungsverhältnissen, Messtechnik, 1968, nr 16, s. 265-277.
- [5] Jaskulski J., Analiza i porównanie właściwości metrologicznych autotransformatorowych i dwurdzeniowych indukcyjnych dzielników napięcia, Materiały X Międzyuczelnianej Narady Metrologów, Szczecin 1975.
- [6] Jaskulski J., Błędy dwurdzeniowych indukcyjnych dzielników napięcia w zakresie małych częstotliwości akustycznych, Komunikat Instytutu Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej Nr 155.
- [7] Jaskulski J., Gotszalk R., Krajowe dwurdzeniowe indukcyjne dzielniki napięcia, PAK, 1976.
- [8] Jaskulski J., Możliwości budowy dwurdzeniowych indukcyjnych dzielników napięcia i ich zastosowania na przykładzie mostka Thomsona, Praca doktorska, IME Politechnika Wrocławska 1975.



## АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ ИНДУКТИВНОГО ДЕЛИТЕЛЯ НАПРЯЖЕНИЯ

## Резюме

Приведены схемы индуктивного трансформаторного делителя напряжения, а также зависимости уровней токов и напряжений в цепях делителя холостого тока и при нагрузке отдельных обмоток. Приведены результаты измерений электрических и магнитных параметров делителя в диапазоне малых звуковых частот.

## CIRCUIT ANALYSIS OF TWO-STAGE INDUCTIVE VOLTAGE DIVIDER

## Summary

The circuit diagrams of the two-stage inductive voltage divider have been given in the paper. There have also been given the equations of currents and voltages in the circuits of the divider with open circuit and with load connected to the individual windings. The results of the measurements of electrical and magnetic parameters of the divider at low acoustic frequencies have also been given.