

Jan Kałuski
Politechnika Śląska

NIEZAWODNOŚĆ HARMONOGRAMOWANIA ZADAŃ NA AGREGACIE

Streszczenie. W pracy zdefiniowano niezawodność harmonogramu w postaci sekwencji niezależnych zadań (operacji), wykonywanych na jednym agregacie. Zbudowano model niezawodnościowy harmonogramu w oparciu o sumy zmiennych losowych niezależnych.

1. Wstęp

Harmonogram jest to zbiór chwil rozpoczęcia g_i i zakończenia t_i wykonywania kolejno $i=1, n$ zadań na agregacie. Można go zapisać w następującej postaci:

$$H = \langle\langle g_1, t_1 \rangle, \dots, \langle g_1, t_1 \rangle, \dots, \langle g_n, t_n \rangle\rangle \quad /1/$$

Tak skonstruowany harmonogram podaje również kolejność wykonywania zadań.

Różnica chwil

$$t_i - g_i = \mathcal{J}_i \quad /2/$$

jest czasem wykonania i -tej operacji. Będziemy dalej rozpatrywać przypadek, dla którego

$$t_{i-1} = g_i, \quad /3/$$

a więc chwila rozpoczęcia wykonywania zadania następnego na danym agregacie jest jednocześnie chwilą zakończenia wykonywania zadania poprzedniego. Ta sytuacja ma miejsce, gdy operacje lub zadania są wykonywane na agregatach bez przebrojeń.

Jest oczywiste, że harmonogram /1/, jako zbiór zdeterminowanych chwil $\langle g_i, t_i \rangle$ w rzeczywistych warunkach przemysłowych będzie w różny sposób realizowany. Odnosi się to zarówno do czasów wykonania poszczególnych operacji jak i łącznego czasu wykonania narastającej liczby operacji. Wynika to stąd, że czasy wykonania operacji są realizacjami zmiennych losowych. Oznaczmy te zmienne przez T_i , ($i=1, n$), natomiast łączny czas przeznaczony na zrealizowanie wszystkich operacji ujętych harmonogramem przez

$$t_H = \sum_1^n \mathcal{J}_i.$$

Jest jasne, że zmienne T_i , $i=\overline{1,n}$ są niezależne.

Z punktu widzenia teorii harmonogramowania istotnym, więc jest problem określenia niezawodności tak skonstruowanego i realizowanego harmonogramu podanego zależnością /1/.

Przez niezawodność harmonogramu będziemy rozumieli jego zdolność do wykonywania zadania jakim jest sterowanie procesem wykonywania operacji w określonym czasie t , przy określonych wymaganiach i warunkach pracy. Miarą tak zdefiniowanej niezawodności może być prawdopodobieństwo wykonania postawionego zadania.

Celem pracy jest zbudowanie modelu probabilistycznego dla czasów wykonania narastającej liczby $i=\overline{1,n}$ operacji oraz zbudowanie i uzasadnienie modelu niezawodnościowego harmonogramu.

2. Model probabilistyczny dla czasów wykonania narastającej liczby operacji

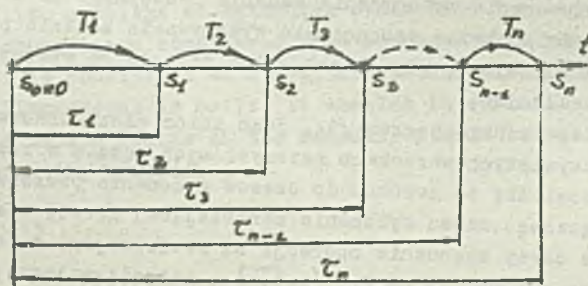
Z założenia, operacje wykonywane są kolejno oraz czasy realizacji ich są losowe. Wobec tego rozkład prawdopodobieństwa $F_H(t)$ łącznego czasu realizacji całego harmonogramu można zapisać w następujący sposób:

$$F_H(t) = P(T_1 + T_2 + \dots + T_n \leq t_H) \quad /4/$$

Jest to prawdopodobieństwo, że suma zmiennych losowych T_i , $(i=\overline{1,n})$ będzie mniejsza lub równa t_H . Oznaczmy

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i \quad /5/$$

Zilustrowane to zostało na rys.1.



Rys. 1. Ilustracja czasów wykonania n operacji.

Na rys.1 przez $\tau_i, i=\overline{1,n}$ oznaczono losowe czasy wykonania operacji. W ten sposób τ_i jest realizacją S_i dla prawidłowo skonstruowanego harmonogramu $\tau_n \leq t_H$.

Z powyższego widać, że modelem probabilistycznym czasów wykonania narastającej liczby operacji jest model w postaci sumy zmiennych losowych niezależnych.

Dla takiego modelu, jeżeli dane są dystrybuanty F_i zmiennych losowych T_i , dystrybuanta zmiennej losowej $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ wyraża się w postaci splotu n dystrybuant F_i . Oznaczmy ją przez F_n^* . Jeżeli dystrybuanty F_i są ciągle i różniczkowalne wówczas istnieją odpowiednie gęstości zmiennych losowych f_i . Gęstość łączną zmiennej losowej S_n o dystrybuancie F_n^* oznaczmy przez f_n^* . Określa się ją jako splot n gęstości f_i . Powyższe można zapisać w postaci następujących wzorów rekurencyjnych dla F_n^* i f_n^*

$$\left. \begin{aligned} F_n^* &= F_{n-1}^* * F_n \\ f_n^* &= f_{n-1}^* * f_n \end{aligned} \right\} , \quad /6/$$

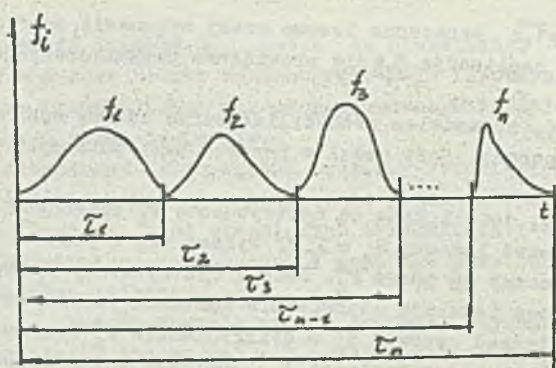
gdzie symbolem $*$ oznaczono operację splotu, która matematycznie, jak wiadomo, oznacza następującą operację całkową

$$\left. \begin{aligned} F_n^* &= F_n^*(t) = \int_0^t F_{n-1}^*(\tau) dF_n(t-\tau) \\ f_n^* &= f_n^*(t) = \int_0^t f_{n-1}^*(\tau) \cdot f_n(t-\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad /7/$$

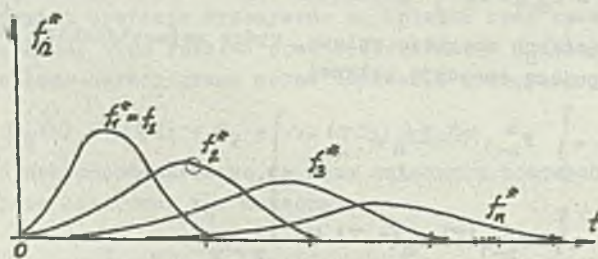
Nie będziemy dalej omawiali właściwości splotów, dystrybuant i ich gęstości. Wiadomości na ten temat można znaleźć w prawie każdym podręczniku z rachunku prawdopodobieństwa. Należałoby jednak przypomnieć, że operacja splatania jest przemienne i łączna.

W celu zilustrowania zależności /7/ na rys.2 pokazano przykładowy harmonogram dla wykonania n operacji w przypadku, gdy zmienne losowe T_i są normalne lewostronnie ucięte^{*)}. Natomiast na rys.3 pokazano wynik splatania gęstości n zmiennych losowych T_i .

*) Gdyż sam rozkład normalny nie może być modelem zmiennej losowej dodatniej.



Rys.2. Przykładowy harmonogram wykonywania n operacji.



Rys.3. Sploty odpowiednich gęstości z rys.2.

Dla dalszych rozważań należy wyjaśnić sens czasów \hat{v}_1 podawanych w harmonogramach. Stwierdziliśmy, że są to realizacje zmiennych losowych T_1 . Pytanie - jakie realizacje? W dalszej pracy nie sposób jest oczywiście wyjaśnić zagadnienia w pełni. Wymagałoby to obszernej analizy sposobów ustalania czasów normatywnych dla wykonania określonych detali na określonych agregatach z uwzględnieniem kwalifikacji operatora. Zauważmy jednak, że dla naszych celów \hat{v}_1 może być każdą realizacją zmiennej losowej T_1 pod warunkiem, że $\hat{v}_1 > 0$, gdyż $\hat{v}_1 = 0$ zwykle oznacza, że i -tej operacji nie wykonuje się na danym agregacie.

W naszym opracowaniu przyjmuje się, że \hat{v}_1 może być dowolnym kwantylem $\hat{v}_{1,\alpha}$ zmiennej losowej T_1 . Dla rozkładu normalnego lewostronnie uciętego (przy ucięciu $t_0 > 3 \sigma(T_1)$) dla czasów T_1 z dużą dokładnością dla kwantyla $\hat{v}_{1,\alpha}$ tego rozkładu można napisać:

*) W dalszym ciągu dla skupienia uwagi będziemy zakładali, że zmienne losowe T_1 mają rozkłady normalne lewostronnie ucięte. Nie zmniejsza to ogólności rozważań.

$$\bar{v}_i = \bar{v}_{i,\alpha} = E(T_i) + u_\alpha \cdot \sigma(T_i) \quad /8/$$

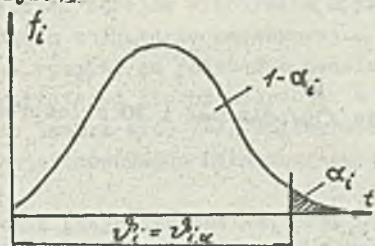
gdzie, $E(T_i)$ - wartość oczekiwana zmiennej losowej T_i ,
 u_α - odpowiedni kwantyl zmiennej losowej standaryzowanej,
 $\sigma(T_i)$ - odchylenie standardowe zmiennej losowej T_i ,
 α - $(0 < \alpha < 1)$ - takie prawdopodobieństwo, że

$$P(T_i > \bar{v}_{i,\alpha}) \leq \alpha \quad /9/$$

lub

$$P(T_i \leq \bar{v}_{i,\alpha}) > 1 - \alpha$$

Pokazano to na rys.4.



Rys.4. Losowy czas wykonania i-tej operacji.

Do dalszych rozważań potrzebne będzie następujące twierdzenie.

Twierdzenie*. Dla każdego $0 < \alpha < 0,5$ kwantyl sumy zmiennych losowych normalnych niezależnych jest mniejszy od sumy odpowiednich kwantyli składowych zmiennych losowych.

Dowód:

$T_i : N(m_i, \sigma_i)$. Kwantyl $\bar{v}_{i,\alpha}$ dla T_i jest

$$\bar{v}_{i,\alpha} = m_i + u_\alpha \cdot \sigma_i \quad /10/$$

zaś odpowiedni kwantyl na poziomie α dla sumy zmiennych losowych T_i jest

$$\bar{v}_{\sum_1 T_i, \alpha} = \sum_1 m_i + u_\alpha \sqrt{\sum_1 \sigma_i^2} \quad /11/$$

Z kolei suma kwantyli $\bar{v}_{i,\alpha}$, $i=1, n$ wyraża się wzorem

$$\sum_1 \bar{v}_{i,\alpha} = \sum_1 m_i + u_\alpha \cdot \sum_1 \sigma_i \quad /12/$$

Widać, że

$$\sum_1 \bar{v}_{i,\alpha} \neq \bar{v}_{\sum_1 T_i, \alpha} \quad /13/$$

* Twierdzenie takie można udowodnić dla każdej zmiennej losowej niezdegenerowanej.

Równość we wzorze /13/ można napisać w przypadku, gdy

$$K(n, \alpha) + \sum_1 m_1 + u_\alpha \sqrt{\sum_1 \sigma_1^2} = \sum_1 m_1 + u_\alpha \sum_1 \sigma_1, \quad /14/$$

gdzie $K(n, \alpha)$ będzie wielkością zależną od liczby n zmiennych losowych i poziomu α . Z /14/ dla $n \geq 2$ i $0 < \alpha \leq 0,5$ otrzymujemy wprost, że

$$K(n, \alpha) = u_\alpha \left(\sum_1 \sigma_1 - \sqrt{\sum_1 \sigma_1^2} \right) > 0, \quad /15/$$

co kończy dowód twierdzenia.

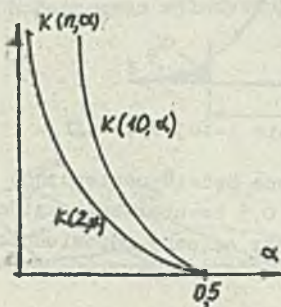
W szczególnym przypadku, gdy wykonywanych będzie n identycznych operacji tzn. $T_1 : N(m, \sigma)$, $i = \overline{1, n}$ z /15/ otrzymujemy

$$K(n, \alpha) = u_\alpha \cdot \sigma (n - \sqrt{n}) \quad /16/$$

a dla dużych n

$$K(n, \alpha) \approx u_\alpha \cdot \sigma \cdot n \quad /17/$$

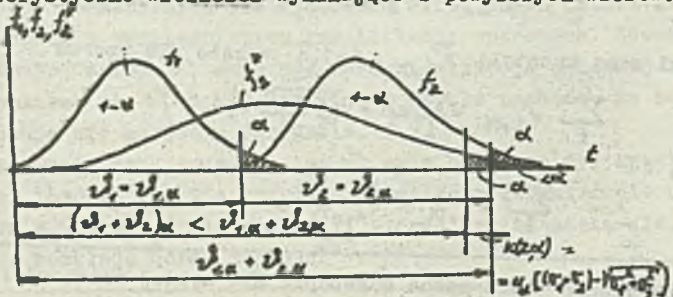
Sytuację opisaną wzorem /16/ dla $n=2$ i 10 zilustrowano na rys.5.



Rys.5. Graficzna postać funkcji $K(n, \alpha)$

Ze wzorów /15/ i /16/ a także własności całki Laplace'a wynika, że $K(n, \alpha)$ dla ustalonych α dość szybko rośnie do ∞ ze wzrostem $n \rightarrow \infty$ i maleje do zera ze wzrostem $\alpha \rightarrow 0,5$.

Na rys.6 na przykładzie sumy 2 zmiennych losowych normalnych pokazano charakterystyczne wielkości wynikające z powyższych wzorów.



Rys.6. Wielkości charakterystyczne dla sumy 2 zmiennych losowych.

Widać, że prawdopodobieństwo wykonania sumy dwóch operacji jest większe od prawdopodobieństwa $1 - \alpha$ wykonania każdej z operacji.

Dalej przy budowie modelu niezawodnościowego harmonogramu przedyskutujemy ten bądź co bądź nieoczekiwany wynik. dla fizycznej interpretacji prawdopodobieństwa realizacji n zadań.

3. Model niezawodnościowy harmonogramu

Przy budowie modelu niezawodnościowego, zwróćmy od razu uwagę na nie-
zbyt oczywisty wydawałoby się fakt, że niezawodności harmonogramu nie da się w danym przypadku obliczyć jako iloczynu prawdopodobieństw $1 - \alpha$ dla $i=1, n$, traktując kolejne wykonywane operacje jako elementy systemu niezawodnościowego o strukturze szeregowej.

Nie można również na podstawie modelu probabilistycznego dla czasów wykonania narastającej liczby operacji. w postaci sumy zmiennych losowych niezależnych (patrz wzór /4/) wnioskować, że w związku z przytoczonym twierdzeniem niezawodność harmonogramu rośnie wraz z liczbą wykonywanych operacji.

W pierwszym przypadku bowiem, przy modelu niezawodnościowym o strukturze szeregowej zakłada się występowanie uszkodzeń katastroficznych. Tzn. elementy takiego systemu mogą znajdować się w dwóch stanach niezawodnościowych: "sprawny" z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$ i "niesprawny" z prawdopodobieństwem α . Dlatego iloczyn prawdopodobieństw $1 - \alpha$ jest w takim przypadku miarą niezawodności takiego systemu. Prosty przykład w postaci systemu szeregowo połączonych żarówek jest klasycznym przykładem stosowania powyższego modelu.

Drugi model na podstawie tylko wzoru /4/ i twierdzenia 1 prowadzi nas niechybnie do wniosku, że przy $n \rightarrow \infty$ niezawodność harmonogramu rośnie do 1? Jest to sprzeczne z kolei z fizycznym sensem pojęcia niezawodności układów technicznych, gdyż wskutek zużycia maszyn (nawet nie biorąc pod uwagę zmęczenia operatora, co niewątpliwie wpływa na zwiększony rozrzut czasów \mathcal{V}_1) realizacje czasów $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_{1,\alpha}$ ustalone harmonogramem zdarzałyby się coraz rzadziej, natomiast coraz częściej pojawiałyby się realizacje $\mathcal{V}_1 > \mathcal{V}_{1,\alpha}$.

Ostatnie stwierdzenie posłuży nam właśnie do zbudowania modelu niezawodnościowego harmonogramu, biorąc pod uwagę, że fizycznie jest on realizowany na odpowiednim agregacie obsługiwany przez operatora. Każda kolejna realizacja czasu T_1 jest w związku z tym zależna od stanu technicznego agregatu i sprawności operatora.

Z powyższej analizy wyłaniają się dwa podejścia do budowy modelu niezawodnościowego harmonogramu. Pierwszy polega na tym, iż w modelu niezawodnościowym harmonogramu uwzględniamy zależność $\mathcal{V}_1, i=1, n$ od stanu technicznego agregatu, a więc od jego niezawodności.

Należałoby w tym celu zbudować funkcję $J_1 = \mathcal{V}_1(R_a)$, gdzie R_a jest niezawodnością agregatu. W takim modelu \mathcal{V}_1 rosłoby wraz z pogarszaniem się niezawodności agregatu. Taki model pozwoliłby również na optymalizację harmonogramu ze względu na kryterium niezawodnościowe. Dobierałoby się wówczas \mathcal{V}_1 w taki sposób, aby zapewnić optymalne (w tym przypadku mniejsze) prawdopodobieństwo jego przekroczenia w funkcji czasu. Tak sformułowany problem niezawodności harmonogramów prowadziłby nas do zadań niezawodności parametrycznej. Problem jest niewątpliwie ciekawy i dotąd nie został sformułowany i rozwiązany. Problemy niezawodności parametrycznej znajdują się obecnie w początkowej fazie rozwoju i do dziś doczekały się niewielu publikacji.

Dlatego też w niniejszym opracowaniu zajęliśmy się odmiennym podejściem przy wyznaczaniu modelu niezawodnościowego harmonogramu, wykorzystując jednak, ale inaczej, sumę zmiennych losowych czasów wykonania n operacji, przy pominięciu niezawodności agregatu.

Zauważmy, że w czasie rzeczywistej realizacji harmonogramu w większości przypadków będą zdarzały się operacje, których czasy realizacji będą mniejsze od czasów ustalonych harmonogramem. Dla prawidłowo skonstruowanego harmonogramu liczba takich operacji będzie porównywalna z całkowitą liczbą n operacji. Jednak liczba tych operacji w określonym czasie t będzie zmienną losową. Oznaczmy ją przez $N(t)$.

Przyjmijmy dalej hipotezę, że proces wykonania operacji na agregacie jest procesem samoodnawialnym z tendencją do wydłużania się czasów realizacji poszczególnych operacji. Sformułowanie powyższe prowadzi do modelu niezawodnościowego harmonogramu jako modelu systemów odnawialnych. Posłużymy się więc w tym przypadku znanymi konstrukcjami probabilistycznymi z teorii odnowienia (patrz np. [2]).

Zdefiniujmy wobec tego funkcję "odnowienia" procesu wykonania operacji, jako wartość oczekiwaną zmiennej losowej $N(t)$

$$Z(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P[N(t) = n] \quad /18/$$

Można pokazać, że

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^*(t). \quad /19/$$

Jeżeli $Z(t)$ jest różniczkowalna, to mówimy, że istnieje gęstość odnowienia $z(t)$.

Przez gęstość odnowienia w naszym przypadku będziemy rozumieli średnią liczbę operacji w jednostce czasu, dla których zostały przekroczone czasy ustalone przez harmonogram.

Gęstość odnowienia $z(t)$ jest rozwiązaniem równania całkowego Volterry II rodzaju z jądrem splotowym (różnicowym)

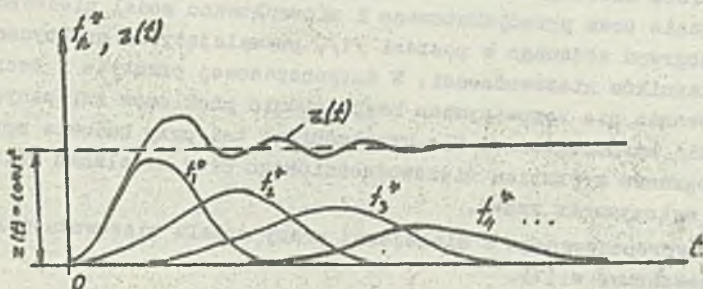
$$z(t) = f(t) + \int_0^t z(\tau)f(t-\tau) d\tau \quad /20/$$

Równania takie rozwiązuje się metodą przekształcenia Laplace'a - Carsona lub metodą przybliżoną, budując szereg Von Neumanna. Dla funkcji gęstości odnowienia można również napisać, że

$$z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(t), \quad /21/$$

gdzie $f_1^* = f_1$.

Pokazano to na rys. 7.



Rys. 7. Przykładowy wykres funkcji gęstości odnowienia.

Wzór /21/ pozwala również na graficzne lub numeryczne wyznaczenie funkcji gęstości odnowienia $z(t)$.

Mając do dyspozycji $z(t)$ budujemy funkcję niezawodności harmonogramu w postaci

$$R_H(t) = 1 - R_0 \exp\left[-\int_0^t z(\tau) d\tau\right] \quad /22/$$

gdzie R_0 - zawodność początkowa, ($R_0 = 1$). Wykorzystaliśmy w tym przypadku znaną w teorii niezawodności ogólną postać dla funkcji niezawodności w zależności od funkcji intensywności uszkodzeń.

W teorii odnowienia udowadnia się asymptotyczną postać dla $z(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \frac{1}{T_0} = z_0 \quad /23/$$

gdzie T_0 - średni czas między uszkodzeniami.

W związku z powyższym dla dużej liczby wykonywanych operacji można otrzymać niezawodność harmonogramu w postaci

$$R(t) = 1 - R_0 \exp(-z_0 \cdot t) \quad /24/$$

Co daje wykładnicze prawo niezawodności.

Dla skończonej liczby n operacji wzór /24/ można stosować, jako ograniczenie dolne dla niezawodności harmonogramu.

4. wnioski i uwagi

W pracy przeanalizowano problemy niezawodności harmonogramów do sterowania dyskretnymi procesami przemysłowymi stosując klasyczną teorię niezawodności.

Przedstawiono model probabilistyczny wykonania ciągu n operacji na jednym agregacie oraz przedyskutowano i sformułowano model niezawodnościowy harmonogramu zadanego w postaci /1/, pozwalający na praktyczne wyznaczenie wskaźników niezawodności. W dotychczasowej praktyce i teorii harmonogramowania nie rozpatrywano bezpośrednio problemów związanych z niezawodnością harmonogramów. Nie uwzględniano też przy budowie optymalnych harmonogramów kryterium niezawodnościowego przy ustalaniu kolejności i czasów wykonywania zadań.

Analizę zaproponowanego w niniejszej pracy modelu niezawodności harmonogramu zamieszczono w [1].

LITERATURA

- [1] Przybysz T., Kałuski J.: Analiza modelu niezawodności harmonogramowania zadań na agregacie. ZN Politechniki Śląskiej, s. Automatyka, Gliwice 1984.
- [2] Barlow R., Proschan F.: Mathematical Theory of Reliability. John Wiley and Sons Inc., New York, London, Sydney 1965.

Recenzent: Prof. dr hab. Piotr Jędrzejowicz

Wpłynęło do Redakcji do 30.03.1984r.

НАДЕЖНОСТЬ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ЗАДАНИЙ НА АГРЕГАТЕ

Резюме

В работе определено понятие надёжности календарного планирования независимых операций, выполняемых на одном агрегате. Предложена и описана модель надёжности календарного плана, принимая в основу сумму независимых случайных величин, в качестве вероятностной модели для времени выполнения возрастающего количества операций.

RELIABILITY OF TASKS SCHEDULES ON AN AGGREGATE

Summary

Reliability of schedules in the form of a sequence of independent operations is defined. Reliability model of a schedule basing on a sum of independent random variables is built.