

Tadeusz Przybysz, Jan Kałuski
Instytut Automatyki
Politechnika Śląska

ANALIZA MODELU NIEZAWODNOŚCI HARMONOGRAMOWANIA ZADAŃ NA AGREGACIE

Streszczenie: W pracy przeanalizowano modele niezawodnościowe harmonogramów przeznaczonych do sterowania wykonawstwem zadań /operacji/ na jednym agregacie. Dla przyjętych określonych rozkładów czasów dla n operacji otrzymano czasowe funkcje niezawodności harmonogramów. Omówiono ich przebiegi.

1. Wstęp

W pracy [1] zdefiniowano niezawodność harmonogramów do sterowania wykonawstwem niezależnych operacji na jednym agregacie bez przebrojeń. Przy losowych realizacjach dla czasów wykonania poszczególnych operacji i ustalonym horyzoncie harmonogramowania t_H , pokazano w jaki sposób można otrzymać liczbową wartość wskaźnika niezawodności harmonogramu $R(t)$.

Celem niniejszej pracy jest przeanalizowanie modelu niezawodnościowego harmonogramu w przypadku, gdy jego strukturę funkcjonalną można przedstawić w postaci niezawodnościowej struktury szerekowej, oraz w przypadku, gdy ten sam /lub inny/ harmonogram może mieć strukturę niezawodnościową równoległą.

Celem pracy jest również, wykorzystując wzór na niezawodność harmonogramu w postaci [1]

$$R_n(t) = 1 - R_0 \exp \left[- \int_0^t z(\tau) d\tau \right] \quad (1)$$

gdzie:

$$R_0 = R(0) \quad - \text{niezawodność dla } t = 0,$$

$$z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(t) \quad - \text{funkcja gęstości odnowienia,}$$

$$f_n^*(t) = \int_0^t f_{n-1}^*(t-\tau) f_n(\tau) d\tau \quad - \text{splot gęstości } n\text{-operacji,}$$

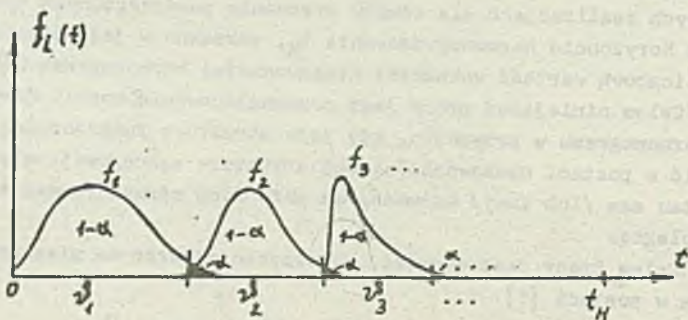
znalezienie przebiegów funkcji $R_i(t)$ dla różnych gęstości rozkładów $f_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ czasów wykonywania operacji.

2. Niezawodność harmonogramu o strukturze niezawodnościowej szeregowej i równoległej

Rozpatrzmy harmonogram bez przebrożeń w postaci

$$H = \langle \rho_i, t_i \rangle, \quad i = \overline{1, n}, \quad /2/$$

gdzie: ρ_i oraz t_i - chwile rozpoczęcia i zakończenia i -tej operacji na danym agregacie. Horyzontem harmonogramowania jest t_H , a czasy v_i^j wykonywania poszczególnych operacji - $v_i^j = t_i - \rho_i$, są realizacjami zmiennych losowych T_i , $i = \overline{1, n}$ o gęstościach $f_i(t)$. Na rys.1 pokazano przykładowy harmonogram według /2/.



Rys.1. Przykładowy harmonogram

Przyjmujemy, że v_i^j są kwantylami rzędu α , tzn.

$$v_i^j = v_{i, \alpha}^j, \quad 0 < \alpha < 1, \quad i = \overline{1, n} \quad /3/$$

Załóżmy, teraz, iż rozpatrywany harmonogram załamuje się, jeżeli czas realizacji v_i^j jakiegokolwiek spośród n operacji przekroczy czas normatywny $v_{i, \alpha}^j$ przeznaczony dla danej operacji.

Można zauważyć, że założenie takie implikuje szeregowy model niezawodnościowy dla harmonogramu. Niezawodność harmonogramu w funkcji niezawodnościowej

wodności jego "elementów" można wyznaczyć w następujący sposób:

$$R_H = R_1(R) = P \left\{ \min(R'_1, \dots, R'_n) = 1 \right\} = P \left\{ \bigwedge_{i=1}^n R'_i = 1 \right\} = \prod_{i=1}^n R_i, \quad /4/$$

gdzie $R_i = 1 - \alpha_i$ - prawdopodobieństwo wykonania i -tej operacji, a zdarzenie $\left\{ \bigwedge_{i=1}^n R'_i = 1 \right\}$ oznacza, że czasy wykonania żadnej z $i = \overline{1, n}$ operacji nie zostały przekroczone, tzn. $\psi_i \leq \psi_{i, \alpha}$.

$R'_i, i = \overline{1, n}$ przyjmuje wartość 1 lub 0 i jest zmienną boolowską. Załóżmy z kolei, że harmonogram załamuje się tylko wówczas, gdy dla wszystkich n operacji czasy $\psi_i > \psi_{i, \alpha}, i = \overline{1, n}$. Prowadzi to jak można zauważyć, do równoległej struktury niezawodnościowej harmonogramu. W tym przypadku niezawodność harmonogramu można wyznaczyć z następującej zależności

$$R_H = R_2(R) = P \left\{ \max(R'_1, \dots, R'_n) = 1 \right\} = P \left\{ \bigvee_{i=1}^n R'_i = 1 \right\} = P \left\{ \left[1 - \bigwedge_{i=1}^n (1 - R'_i) \right] = 1 \right\} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i), \quad /5/$$

gdzie zdarzenie $\left\{ \left[1 - \bigwedge_{i=1}^n (1 - R'_i) \right] = 1 \right\}$ oznacza, że czasy realizacji

$$\psi_i \leq \psi_{i, \alpha}, i = \overline{1, n}.$$

Niezawodności harmonogramów $R_1(R)$ i $R_2(R)$ wyznaczone ze wzorów /4/, /5/ są różne co do wartości liczbowej. Różnica ta wraz ze wzrostem liczby n - wykonywanych operacji rośnie, gdyż $R_1(R)$ maleje ze wzrostem n , a $R_2(R)$ - rośnie. Dla skończonej liczby n -operacji zależności dla $R_1(R)$ i $R_2(R)$ będą oszacowaniami od góry i od dołu dla nieznannej, rzeczywistej niezawodności R_H harmonogramu.

Przebieg realizacji rzeczywistego harmonogramu jest w większości przypadków odmienny od opisanych wyżej przypadków granicznych. W rzeczywistości, przekroczenie nawet przez kilka operacji czasów normatywnych nie powoduje załamania się harmonogramu. Ten proces został opisany w [1], Tam też zaproponowano model niezawodnościowy i sposób obliczania niezawodności harmonogramu w funkcji czasu, dla $0 < t < t_H$, wykorzystując teorię odnowienia.

Wykażemy teraz, że model niezawodnościowy harmonogramu opisany w cytowanej pracy daje wskaźnik niezawodności R_H , spełniający następującą nierówność:

$$R_1(R) < R_H \leq R_2(R) \quad /6/$$

dla każdego $n \geq 2$, gdzie n - liczba niezależnych operacji objętych harmonogramem. Na podstawie twierdzenia o kwantylach sumy zmiennych losowych niezależnych [1] wynika, że:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_H \rightarrow 1,$$

g biorąc pod uwagę, że na mocy /4/ i /5/

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_1(R) \rightarrow 0$$

natomiast,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_2(R) \rightarrow 1$$

otrzymujemy nierówność /6/.

W zakończeniu tego punktu zauważmy, że każdorazowo przed wyznaczeniem niezawodności danego harmonogramu, należy dokładnie zdefiniować termin "załamanie się harmonogramu". Od tego bowiem zależy jego struktura niezawodnościowa i tok obliczeń.

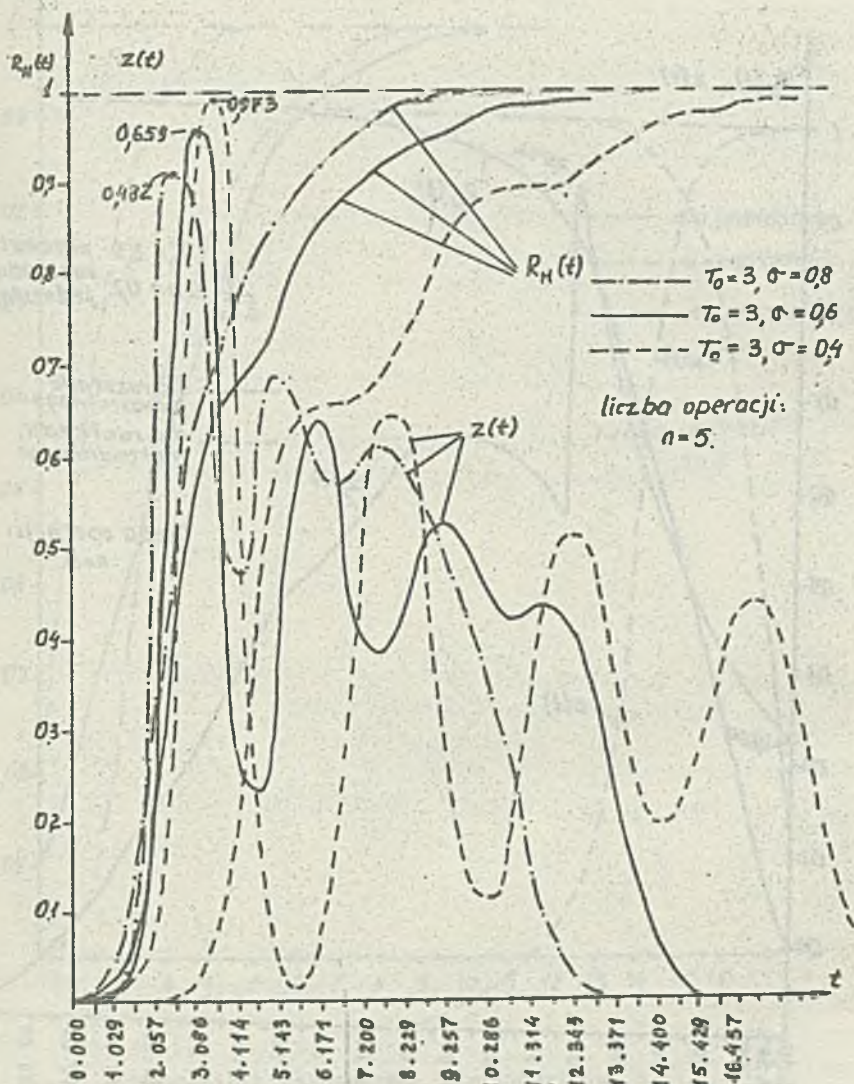
Dalej w pracy zajmijemy się obliczeniami niezawodności harmonogramu /2/ według zależności /1/ oraz omówimy uzyskane funkcje $R_H(t)$.

3. Funkcje niezawodności harmonogramów

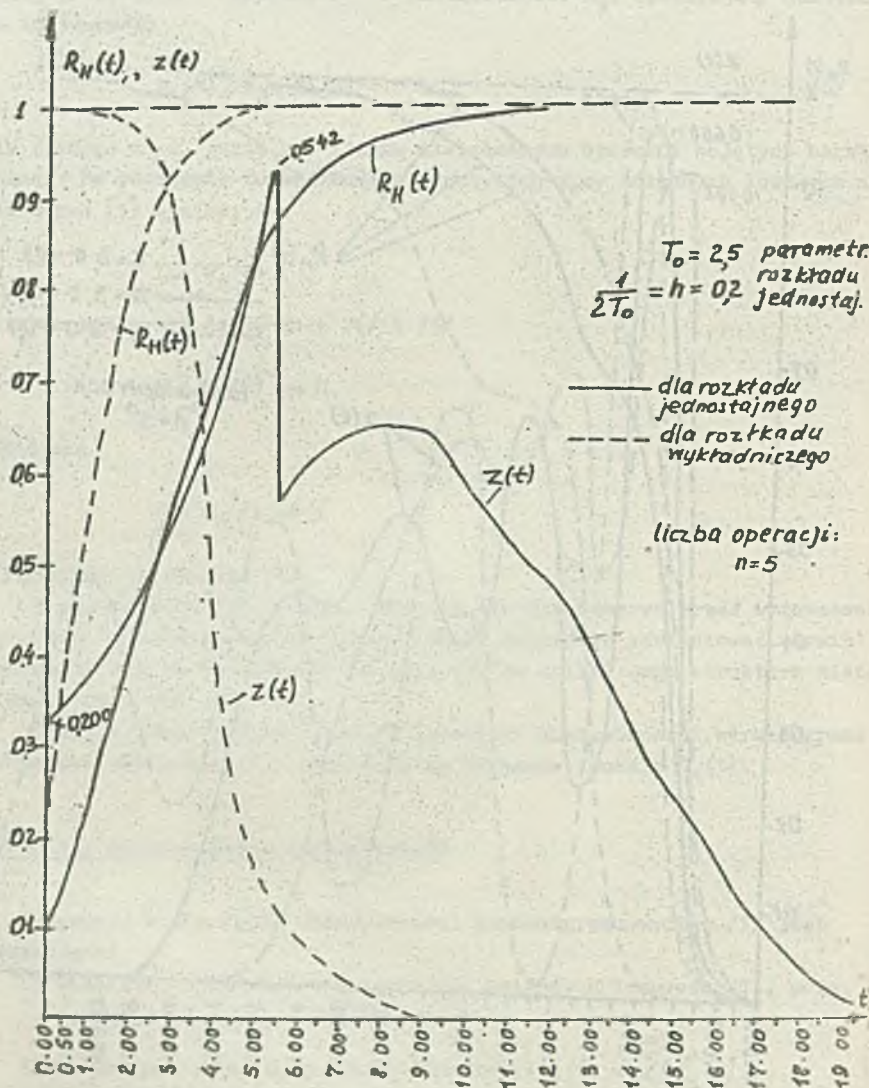
Procedura wyznaczania niezawodności harmonogramu według /1/ jest następująca:

- 1/ Obliczanie gęstości rozkładów sum zmiennych losowych T_1 , przy zadanych $f_{T_1}(t)$, $i=1, \bar{n}$.
- 2/ Obliczanie funkcji gęstości odnowienia $z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(t)$.
- 3/ Obliczanie niezawodności $R_H(t)$.

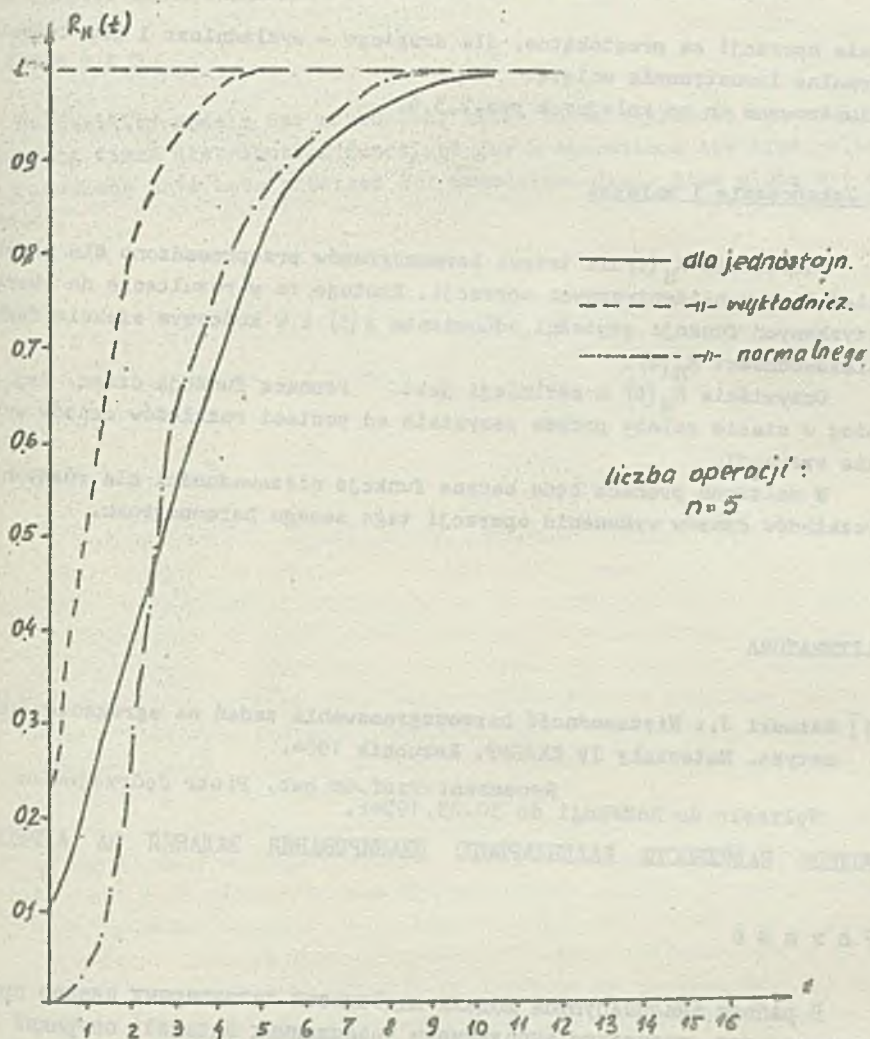
W celu ułatwienia obliczeń napisano program na EMC ODRA 13-05. Obliczono $R_H(t)$ dla trzech harmonogramów. Rozkłady czasów wykonywania operacji są inne dla każdego z harmonogramów. Dla pierwszego rozkłady czasów wykony-



Rys.2. Funkcje niezawodności harmonogramu $R_H(t)$ dla normalnych rozkładów czasów wykonywania operacji o różnych parametrach.



Rys. 3. Funkcje niezawodności harmonogramu $R_H(t)$ dla rozkładów jednostajnych i wykładniczych czasów wykonywania operacji.



Rys.4. Porównanie niezawodności harmonogramów $R_H(t)$ dla różnych rozkładów czasów wykonywania operacji.

wania operacji są prostokątne, dla drugiego - wykładnicze i dla trzeciego normalne lewostronnie wcięte.

Zilustrowano to na kolejnych rys.2,3,4.

4. Zakończenie i wnioski

Obliczenia $R_H(t)$ dla trzech harmonogramów przeprowadzono dla niewielkiej liczby n -identycznych operacji. Rzuca to w rezultacie na charakter uzyskanych funkcji gęstości odnowienia $z(t)$ i w końcowym efekcie funkcji niezawodności $R_H(t)$.

Oczywiście $R_H(t)$ z definicji jest rosnącą funkcją czasu. Jej przebieg w czasie zależy przede wszystkim od postaci rozkładów czasów wykonania operacji.

W dalszych pracach będą badane funkcje niezawodności dla różnych rozkładów czasów wykonania operacji tego samego harmonogramu.

LITERATURA

- [1] Kałuski J.: Niezawodność harmonogramowania zadań na agregacie. Z.N. Automatyka. Materiały IV KKADPP. Kozubnik 1984.

Recenzent: Prof. dr hab. Piotr Jędrzejowicz
Wpłynęło do Redakcji do 30.03.1984r.

МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ЗАДАНИЙ НА АГРЕГАТЕ

Резюме

В работе анализируются модели надёжности календарных планов предназначенных для управления выполнением независимых заданий (операций) на одном агрегате. Принимая определённые распределения для времени выполнения каждой операции, получено временные функции надёжности календарных планов.

RELIABILITY MODEL ANALYSIS FOR SCHEDULING TASKS ON AN AGGREGATE

Summary

Reliability models for scheduling tasks on an aggregate are analysed. Assuming times distribution functions for n operations the time reliability functions have been obtained for schedules. Their time plots are discussed.