ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: AUTOMATYKA z. 75 Nr kol. 811

Jolanta Stępień
Instytut Badań Systemowych PAN
Warszawa

PLANOWANIE PRODUKCJI W WYBRANYM ZAKŁADZIE JAKO PROBLEM SZEREGOWANIA ZADAŃ Z UWZGLĘDNIENIEM PLANOWYCH REMONTÓW URZĄDZEŃ

Streszczenie. W referacie sformułowano problem planowania produkcji jako zadanie szeregowania z uwzględnieniem planowych remontów urządzeń oraz zależnych czasów ich przezbrajania.

1. Wstęp

Z problemem planowania produkcji z uwzględnieniem planowych remontów spotkano się w praktyce w jednym z zakładów materiałów ogniotrwałych. W zakładzie tym w ośmiu piecach drogą wypalania, kalcynacji, itp. wytwarza się kilkanaście rodzajów wyrobów. Jednym z zasadniczych problemów tego zakładu jest takie ustawienie produkcji, aby zrealizować zamówienia na poszczególne wyroby oraz przeprowadzić planowe remonty urządzeń, które muszą odbywać się co określony czas ich ciągłej pracy.Dodatkowym utrudnieniem jest to, że zakład ten dysponuje tylko jedną brygadą remontową.

Tak przedstawione zadanie zostało sformułowane jako zagadnienie szeregowania N zadań na M różnych urządzeniach. Urządzenia te są różne pod względem możliwości wykonywania zadań, czasów ich wykonywania jak i pod względem częstotliwości i czasów trwania remontów. Uwzględniono też w podanym sformułowaniu zależne czasy przezbrajania urządzeń.

Poniżej podano dane i oznaczenia niezbędne do sformułowania modelu matematycznego przedstawionego problemu. Następnie podano model matematyczny problemu szeregowania zadań na jednym urządzeniu wraz z uogólnieniem na przypadek wielu urządzeń. Jako funkcję kryterium przyjęto średni ważony czas wykonywania zadań

2. Dane i oznaczenia

Zanim przejdziemy do sformułowania modelu matematycznego przedstawionego problemu, wprowadzimy niezbędne oznaczenia. Niech

$\mathcal{N} = \{1,2,\dots,N\}$ - zbiór numerów zadań, przy czym przez zadanie rozumiemy zamówienie na określony wyrób lub część tego zamówienia (podziału tego dokonuje główny technolog w zakładzie),

$i,j,n \in \mathcal{N}$ - numery zadań,

$\mathcal{M} = \{1,2,\dots,M\}$ - zbiór numerów urządzeń,

$m \in \mathcal{M}$ - numer urządzenia.

Ponieważ urządzenia są różne, przez a_i^m oznaczymy pomocniczy współczynnik taki, że:

$$a_i^m = \begin{cases} 1, & \text{jeśli i-te zadanie może być wykonywane na m-tym urządzeniu} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Oznaczymy symbolami:

t_i^m – czas wykonywania i-tego zadania na m-tym urządzeniu

τ_{ij}^m – czas przezbrajania m-tego urządzenia z zadania i-tego na zadanie j-te

τ^m – czas trwania remontu m-tego urządzenia

T^m – maksymalna odległość czasowa między kolejnymi remontami na m-tym urządzeniu

T_1^m – najpóźniejszy termin rozpoczęcia pierwszego remontu m-tego urządzenia

b_i – waga i-tego zadania; można również przyjąć wagę b_i^m zależną od urządzenia.

W przedstawionym poniżej sformułowaniu remonty będą również traktowane jako zadania i numerowane N+1, N+2,..., N+q,..., N+Q, gdzie Q – maksymalna liczba remontów, q = 1,2,...,Q – numer remontu.

Zakładamy, że czas przezbrojenia z dowolnego zadania ze zbioru N na remont i z remontu na dowolne zadanie jest zerowy (został wliczony do czasu trwania remontu) oraz że wagi b_i dla remontów są również równe zero, a $t_i^m = \tau^m$ dla i = N+1,...,N+Q.

Oznaczmy ponadto symbolami:

n_0^m – numer zadania wykonywanego na m-tym urządzeniu do chwili t = oznaczającej początek okresu planowania

$\tau_{n_0 j}^m$ – czas przezbrojenia m-tego urządzenia z zadania n_0^m na zadanie j-te.

Po wprowadzeniu powyższych oznaczeń możemy przejść do sformułowania modelu matematycznego.

3. Szeregowanie zadań na jednym urządzeniu

Przy opisie problemu dla jednego urządzenia w podanych wyżej oznaczeniach będzie pomijany indeks m oznaczający numer urządzenia.

Sumaryczny czas wykonywania wszystkich zadań wynosi $\sum_{i=1}^{N} t_i$. Niech $\tau_i = \max_j \{\tau_{ji}\}$ dla każdego i = 1,2,...,N.

τ_i oznacza maksymalny czas przezbrojenia urządzenia na zadanie i. Maksymalną liczbę remontów Q wynikającą z sumarycznego czasu wykonywania wszystkich zadań i przezbrojeń możemy oszacować następująco:

$$Q = \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i + \sum_{i=1}^{N} \tau_i - T_1}{T} \right\rfloor + 1$$

gdzie $\lfloor a \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby a.

Wprowadzamy następującą zmienną decyzyjną:

$$x_i^k = \begin{cases} 1, & \text{jeśli zadanie i-te jest wykonywane jako k-te w kolejności} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$i = 1,2,\ldots,N+Q$, $k = 1,2,\ldots,N+Q$, x_{N+q}^k oznacza, że remont o numerze q jest wykonywany jako zadanie k-te.

Przyjmujemy następujące założenia:

1. Każde zadanie $i = 1,2,\ldots,N$ musi być wykonane.
2. Urządzenie pracuje w sposób ciągły, tzn. wykonuje jakieś zadanie, jest przezbrajane lub w remoncie.
3. Remonty muszą odbywać się terminowo, co określony czas T ciągłej pracy urządzenia (pierwszy remont nie później niż w chwili T_1 od początku okresu planowania).

Z powyższych założeń wynikają następujące ograniczenia problemu:

A. Każde zadanie zostanie wykonane (dokładnie raz)

$\forall\, i = 1,2,\ldots,N$

$$\sum_{k=1}^{N+Q} x_i^k = 1$$

B. Jako k-te w kolejności wykonywane jest tylko jedno zadanie.

$\forall\, k = 1,2,\ldots,N+Q$

$$\sum_{i=1}^{N+Q} x_i^k \leqslant 1$$

C. Pierwszy remont rozpocznie się nie później niż w chwili T_1 od początku okresu planowania.

$$\sum_{k=1}^{N+1} x_{N+1}^k \left(\sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{N} x_i^l t_i + \sum_{l=1}^{k-2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i^l x_j^{l+1} \tau_{ij} + \sum_{i=1}^{N} x_i^1 \tau_{n_0 i} \right) \leqslant T_1$$

D. Remonty muszą odbywać się w odstępach czasu nie większych niż T czyli

$\forall\, q = 2,\ldots,Q$

$$\sum_{k=1}^{N+q} x_{N+q}^k \left(\sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{N+q-1} x_i^l t_i + \sum_{l=1}^{k-2} \sum_{i=1}^{N+q-1} \sum_{j=1}^{N+q-1} x_i^l x_j^{l+1} \tau_{ij} + \sum_{i=1}^{N} x_i^1 \tau_{n_0 i} \right) -$$

$$\left[\tau + \sum_{k=1}^{N+q-1} x_{N+q-1}^k \left(\sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{N+q-2} x_i^l t_i + \sum_{l=1}^{k-2} \sum_{i=1}^{N+q-2} \sum_{j=1}^{N+q-2} x_i^l x_j^{l+1} \tau_{ij} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{N} x_i^1 \tau_{n_0 i} \right) \right] \leqslant T$$

Jak wspomniano wcześniej, jako funkcję kryterium przyjęto średni ważony czas wykonywania wszystkich zadań.

$$F = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N+Q}\sum_{n=1}^{N} x_n^k b_n \underbrace{\left(\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{N+Q} x_i^l t_i + \sum_{l=1}^{k-2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i^l x_j^{l+1}\tau_{ij} + \sum_{i=1}^{N} x_i^1 \tau_{n_0 i}\right)}_{\text{czas zakończenia wykonywania k-tego zadania}}$$

Poszukujemy więc min F przy ograniczeniach A-D.

4. Szeregowanie zadań na wielu urządzeniach

Podobnie jak dla jednego urządzenia i tym razem możemy oszacować maksymalną liczbę remontów Q, wspólną dla wszystkich urządzeń. Biorąc pod uwagę najgorszy przypadek

$$Q = \left[\frac{\sum_{i=1}^{N}\max_{m}\{t_i^m\} + \sum_{i=1}^{N}\max_{j,m}\{\tau^m_{ji}\} - \min_{m}\{T_1^m\}}{\min_{m}\{T^m\}}\right] \Big/ M + 1$$

Wprowadzamy następującą zmienną decyzyjną:

$$x_{im}^k = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli i-te zadanie jest wykonywane na m-tym urządzeniu jako k-te w kolejności} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$i = 1,2,\ldots,N+Q$, $k = 1,2,\ldots,N+Q$, $m = 1,2,\ldots,M$, $x^k_{N+q,m} = 1$ oznacza, że remont o numerze q jest wykonywany na urządzeniu m-tym jako k-te zadanie.

Przyjmujemy następujące założenia:

1. Każde zadanie $i = 1,2,\ldots,N$ musi być wykonane.
2. Urządzenia pracują w sposób ciągły, tzn. wykonują jakieś zadania, są przezbrajane lub w remoncie.
3. Remonty muszą odbywać się w określonych dla danego urządzenia odstępach czasu (pierwszy remont nie później niż w chwili T_1^m od początku okresu planowania).
4. Terminy wykonywania remontów poszczególnych urządzeń muszą być rozłączne ze względu na posiadanie przez zakład tylko jednej brygady remontowej.
5. Urządzenia są różne, to znaczy:

a) nie wszystkie zadania mogą być wykonywane na każdym urządzeniu,

b) różne są czasy wykonywania poszczególnych zadań na różnych urządzeniach.

Z powyższych założeń wynikają następujące ograniczenia problemu:

A. Każde zadanie zostanie wykonane (dokładnie raz).

$$\forall i = 1,2,\ldots,N \qquad \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{N+Q} x_{im}^k a_i^m = 1$$

B. Jako zadanie k-te na m-tym urządzeniu może być wykonywane tylko jedno zadanie.

$\forall m = 1,2,\ldots,M$

$\forall k = 1,2,\ldots,N+Q$

$$\sum_{i=1}^{N+Q} x_{im}^{k} \leqslant 1$$

C. Pierwszy remont nie może rozpocząć się później niż w chwili T_1^m.

$\forall m = 1,2,\ldots,M$

$$\sum_{k=1}^{N+1} x_{N+1,m}^{k}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{N} x_{im}^{l} t_i^m + \sum_{l=1}^{k-2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_{im}^{l} x_{jm}^{l+1} \tau_{ij}^{m} + \sum_{i=1}^{N} x_{im}^{1} \tau_{n_0 i}^{m}\right) \leqslant T_1^m$$

D. Remonty muszą odbywać się w ustalonych odstępach czasu.

$\forall m = 1,2,\ldots,M$

$\forall q = 2,\ldots,Q$

$$\sum_{k=1}^{N+q} x_{N+q,m}^{k}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{N+q-1} x_{im}^{l} t_i^m + \sum_{l=1}^{k-2}\sum_{i=1}^{N+q-1}\sum_{j=1}^{N+q-1} x_{im}^{l} x_{jm}^{l+1} \tau_{ij}^{m} + \sum_{i=1}^{N} x_{im}^{1} \tau_{n_0 i}^{m}\right) -$$

$$\left[\tau^m + \sum_{k=1}^{N+q-1} x_{N+q,m}^{k}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{N+q-2} x_{im}^{l} t_i^m + \sum_{l=1}^{k-2}\sum_{i=1}^{N+q-2}\sum_{j=1}^{N+q-2} x_{im}^{l} x_{jm}^{l+1} \tau_{ij}^{m} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{N} x_{im}^{1} \tau_{n_0 i}^{m}\right)\right] \leqslant T^m \sum_{k=1}^{N+q} x_{N+q,m}^{k}$$

czyli odległość czasowa między remontami o numerach q-1 i q jest dla m-tego urządzenia nie większa niż T^m.

E. W tym samym czasie odbywa się remont tylko jednego urządzenia. Czas rozpoczęcia remontu o numerze q dla m-tego urządzenia może być wyrażony następującym wzorem:

$$v_{qm} = \sum_{k=1}^{N+q} x_{N+q,m}^{k}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{N} x_{im}^{l} t_i^m + \sum_{l=1}^{k-2}\sum_{i=1}^{N+q}\sum_{j=1}^{N+q} x_{im}^{l} x_{jm}^{l+1} \tau_{ij}^{m} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{N} x_{im}^{1} \tau_{n_0 i}^{m}\right)$$

natomiast czas zakończenia tego remontu wzorem $v_{qm} + \tau^m$. Tak więc, ograniczenie to możemy zapisać w następującej postaci:

$\forall (m_1,m_2) \quad m_1 = 1,2,\ldots,M,\ m_2 = 1,2,\ldots,M,\ m_1 \neq m_2$

$\forall (q,s) \quad q = 1,2,\ldots,Q,\ s = 1,2,\ldots,Q$

$$(v_{qm_2} + \tau^{m2} - v_{sm_1})(v_{sm_1} + \tau^{m1} - v_{qm_2}) \geqslant 0$$

Podobnie jak w przypadku jednego urządzenia jako funkcję kryterium przyjęto średni ważony czas wykonywania wszystkich zadań. Minimalizować więc będziemy funkcję wyrażoną następującym wzorem:

$$F = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} b_n v_{nm}$$

gdzie v_{nm} określa czas zakończenia wykonywania n-tego zadania na m-tym urządzeniu i określony jest poniższym wyrażeniem

$$v_{nm} = \sum_{k=1}^{N+Q} x_{nm}^{k} \left(\sum_{l=1}^{k=1} \sum_{i=1}^{N+Q} x_{im}^{l} t_i^m + \sum_{l=1}^{k-2} \sum_{i=1}^{N+Q} \sum_{j=1}^{N+Q} x_{im}^{l} x_{jm}^{l+1} \tau_{ij}^{m} + \sum_{i=1}^{N} x_{im}^{1} \tau_{n_0 i}^{m} + t_n^m \right)$$

Przyjęcie jako funkcji kryterium średniego ważonego czasu wykonywania zadań ma uzasadnienie praktyczne. Zamówienia na poszczególne wyroby mogą być dzielone na zadania o różnych wagach. I tak na przykład, przy rocznym planowaniu produkcji część zamówienia,która ma być wykonana, np. w I kwartale otrzyma większą wagę niż część zamówienia na ten sam wyrób do wykonania w kwartale IV. Ponadto tak przyjęta funkcja kryterium gwarantuje maksymalne możliwe rozsunięcie remontów w czasie.

5. Podsumowanie

Przedstawiony model matematyczny problemu planowania produkcji w wybranym zakładzie, jako pewnego zadania szeregowania jest zadaniem nieliniowego programowania binarnego. Rozwiązanie takiego zadania jest bardzo trudne.

Ponieważ nie ma możliwości znalezienia rozwiązania optymalnego tak sformułowanego problemu w całości, zdecydowano się na jego dekompozycję. Wykorzystując specyfikę problemu rzeczywistego dokonano jego dekompozycji na dwa podzadania: zadanie planowania terminów remontów i zadanie planowania produkcji przy ustalonych terminach remontów.

Tak zdekomponowany problem stwarza realne szanse na jego rozwiązanie. Ze względu na niewielkie rozmiary referatu nie zostaną zaprezentowane szczegółowe modele matematyczne tych podproblemów.

LITERATURA

[1] ABC materiałów ogniotrwałych. CEHAMOG Gliwice.
[2] Coffman E.G.: Teoria szeregowania zadań. WNT, Warszawa 1980.
[3] Garfinkel R.S., Nemhauser G.L.: Programowanie całkowitoliczbowe. PWN, Warszawa 1978.
[4] Grabowski W.: Programowanie matematyczne. PWE, Warszawa 1980.

Recenzent: Prof. dr inż. Henryk Kowalowski

Wpłynęło do Redakcji do 30.03.1984r.

ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОДУКЦИИ НА ВЫБРАННОМ ЗАВОДЕ КАК ПРОБЛЕМА ЧЕРЕДОВАНИЯ ЗАДАНИЙ УЧИТЫВАЮЩАЯ ПЛАНОВЫЕ РЕМОНТЫ УСТАНОВОК

Р е з ю м е

В статье представлена проблема планирования продукции на выбранном заводе огнеупорных материалов. Прблема эта сформулирована как некоторая задача чередования заданий (продуктов) на разных установках. Математическая модель проблемы учитывает плановые ремонты установок и стоимость их переоборудования . В качестве функции цели для минимизации принятоъ среднее взвешенное время окончания выполнения всех заданий.

PRODUCTION PLANNING IN CHOSEN PLANT AS SCHEDULING PROBLEM WITH ROUTINE REPAIRS OF MACHINES

S u m m a r y

The paper presents the production planning problem in a chosen plant in the branch of refractory materials. The problem was formulated as certain scheduling problem of N products /tasks/ on M different machines. In mathematical model presented in this paper we consider planned routine repairs of machines and dependent change-over times. The objective is a minimization of mean weighted finishing time of all tasks.