ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984
Seria: AUTOMATYKA z. 75 Nr kol. 811

Eugeniusz Toczyłowski
Stanisław Berka
Instytut Automatyki
Politechnika Warszawska

METODA HARMONOGRAMOWANIA CIĘCIA PŁYT OFFSETOWYCH DLA DRUKARŃ RSW PRASA

Streszczenie. W pracy analizowany jest pewien model matematyczny zadania harmonogramowania cięcia płyt offsetowych do maszyn zwojowych w drukarniach RSW Prasa. Pełny model jest zadaniem programowania całkowitoliczbowego z dużą liczbą zmiennych. W pracy wykorzystano specyficzne cechy problemu do przekształcenia go do zredukowanego zadania z ośmiokrotnie mniejszą liczbą zmiennych, którego rozwiązanie pozwala na wyznaczanie dokładnego rozwiązania pełnego modelu. Otrzymane zadanie zostało efektywnie rozwiązane za pomocą algorytmu płaszczyzn tnących.

1. Sformułowanie problemu

W zakładach Cynkowych "Silesia" produkowane są płyty offsetowe do maszyn zwojowych zainstalowanych w drukarniach RSW Prasa. Płyty obrabiane są w sposób następujący [1]: blacha aluminiowa znajdująca się w zwojach o szerokości h jest rozcinana na arkusze wyjściowe jednego formatu o długości d, które z kolei mocowane są na cylindrach a następnie przenoszone wraz z cylindrami za pomocą programowo sterowanego transportera z wanny do wanny, gdzie poddawane są kolejnym operacjom technologicznym. Po obróbce arkusze wyjściowe są cięte na formaty płyt gotowych według określonych wzorów rozkroju płyt w ilości i asortymencie zgodnym z zapotrzebowaniem zgłaszanym przez drukarnie RSW Prasa. Płyty gotowe są prostokątami określonych formatów, których wymiary zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1

NR	Format płyty mm	NR	Format płyty mm
1	492 x 675	9	750 x 820
2	510 x 645	10	820 x 1010
3	650 x 730	11	820 x 1030
4	650 x 750	12	820 x 1050
5	660 x 725	13	920 x 1110
6	680 x 810	14	950 x 1180
7	690 x 820	15	1030 x 1270
8	700 x 820	16	1050 x 1260

Przy konstrukcji wieloformatowych wzorów rozkroju zakłada się jednorodność materiału oraz możliwość trzystopniowego cięcia gilotynowego.

Najbardziej rozpowszechniona uniwersalna metoda wyznaczania optymalnego programu rozkroju materiałów polega na konstrukcji i rozwiązywaniu odpowiedniego zadania programowania liniowego /por. np. [4]/, w którym składowe wektora zmiennych decyzyjnych wyrażają poszukiwane liczby płyt ciętych według kolejnych wzorów rozkroju, natomiast ograniczenia odpowiadają formatom użytkowym i zapewniają dla każdego formatu wycięcie żądanej liczby płyt. Stosunkowo efektywny algorytm opracowali Gilmore i Gomory dzięki połączeniu obydwu faz ustalania programów rozkroju i wykonywaniu iteracji sympleksowych polegających na wprowadzaniu do bazy kolumn niebazowych generowanych przez rozwiązanie pomocniczego problemu optymalnego załadunku [2], [3]. Do wad tego podejścia można zaliczyć konieczność rozwiązywania w każdym kroku problemu NP-zupełnego, uzyskiwanie rozwiązania ciągłego, które jest tylko przybliżeniem optymalnego rozwiązania całkowitoliczbowego a ponadto małą elastyczność na wprowadzanie dodatkowych ograniczeń, np. podczas rozważania wieloetapowego problemu harmonogramowania rozkroju materiałów z uwzględnieniem ograniczeń na pojemność magazynu, kosztów przezbrojeń itp.

W pracy rozważany jest model wieloetapowego problemu harmonogramowania produkcji płyt offsetowych. Pełny model jest złożonym zadaniem programowania całkowitoliczbowego. Szczególne właściwości problemu pozwalają na drastyczne uproszczenie tego zadania dzięki czemu może być ono rozwiązywane dokładnie /w liczbach całkowitych/ dostępnymi uniwersalnymi algorytmami programowania całkowitoliczbowego.

2. Pełny model do celów harmonogramowania

Najpełniejszy model harmonogramowania zawiera zmienne decyzyjne odpowiadające wszystkim możliwym wzorom rozkroju oraz ograniczenia odpowiadające indywidualnym formatom. Niech M będzie zbiorem indeksów wszystkich indywidualnych formatów użytkowych. Załóżmy, że dla ustalonych parametrów h i d arkusza wyjściowego wyznaczono zbiór wszystkich interesujących wzorów rozkroju /z pominięciem tych wzorów, które w oczywisty sposób mogą być zastąpione przez bardziej wydajne wzory rozkroju/. Niech Ω będzie zbiorem indeksów wyznaczonych wzorów rozkroju. Liczba dopuszczalnych wzorów rozkroju jest na ogół bardzo duża. W rozważanym w pracy zadaniu /dzięki ustalonym stosunkowo niewielkim rozmiarom $h=1100$ oraz $d=1800$ arkusza wyjściowego/ liczba dopuszczalnych wzorów rozkroju nie jest nadmiernie wysoka i wynosi $|\Omega| = 104$. Pełne zadanie harmonogramowania cięcia blach w okresie czasu podzielonym na K etapów przybierze postać

Minimalizuj

$$f = \sum_{k \in K} \sum_{\lambda \in \Omega} \xi_{\lambda,k} \qquad /1/$$

przy ograniczeniach

$$\psi_{\mu,k+1} = \psi_{\mu,k} + \nu_{\mu,k} - \beta_{\mu,k} \qquad \mu \in M,\ k \in K \qquad /2/$$

$$\nu_{\mu,k} = \sum_{k \in K} \sum_{\lambda \in \Omega} d_{\lambda,\mu} \cdot \xi_{\lambda,k} \qquad /3/$$

$$\psi_{\mu,k} \geqslant 0, \qquad \xi_{\lambda,k} \geqslant 0, \text{ całkowite}, \ \mu \in M,\ k \in K, \qquad /4/$$

gdzie $\xi_{\lambda,k}$ jest ilością arkuszy ciętych w k-tym etapie według wzoru $\lambda \in \Omega$, $\psi_{\mu,k}$ jest stanem zapasu μ-tego formatu w magazynie na początku k-tego etapu, $\nu_{\mu,k}$ jest liczbą płyt formatu μ wyprodukowanych w k-tym okresie, $\beta_{\mu,k}$ jest zapotrzebowaniem na płyty formatu μ w k-tym okresie, współczynniki macierzy $D = [d_{\lambda,\mu}]$ określają ile płytek μ-tego formatu znajduje się we wzorze rozkroju λ.

W zadaniu przyjmujemy ustalony stan początkowy $\psi_{\mu,1}$ a ponadto można dodatkowo przyjąć dowolny stan końcowy oraz dowolne warunki ograniczające przedziały wartości zmiennych $\psi_{\mu,k}$ i $\xi_{\lambda,k}$. Zadanie /1/ - /4/ nawet po wyrugowaniu zmiennych $\nu_{\mu,k}$ jest stosunkowo dużych rozmiarów, przykładowo dla problemu czteroetapowego liczba zmiennych całkowitoliczbowych wynosi 480. Wielokrotne rozwiązywanie zadania /1/ - /4/ do celów harmonogramowania jest zbyt kosztowne. Z tego względu korzystne jest poszukiwanie metody pozwalającej na uproszczenie zadania dzięki wykorzystaniu specyficznych właściwości rozważanego problemu.

3. Model zagregowany

Dokładna analiza formatów użytkowych i wszystkich wzorów rozkroju pozwala na konstrukcję, tzw. zagregowanych wzorów rozkroju, których liczba może być istotnie ograniczona. Pierwszym krokiem uproszczenia zadania jest wyodrębnienie w zbiorze formatów użytkowych podzbiorów formatów równoważnych. Mówimy, że formaty $\mu_1, \mu_2 \in M$ są równoważne, jeżeli zbiór wzorów rozkroju Ω jest domknięty ze względu na operację zamiany formatów μ_1 i μ_2 we wszystkich wzorach rozkroju ze zbioru Ω. Klasy równoważnych formatów użytkowych nazywane będą formatami zbiorczymi. Formaty zbiorcze dla analizowanego problemu zestawiono w tablicy 2.
Zastąpienie formatów użytkowych za pomocą formatów zbiorczych pozwala na konstrukcję zadania, w którym liczba ograniczeń maleje dwukrotnie natomiast liczba zmiennych w każdym etapie ulega redukcji ze 120 do 45 /liczba zbiorczych wzorów rozkroju zawierających formaty zbiorcze jest równa 37/.

Tablica 2

format zbiorczy	formaty użytkowe
1	1
2	2
3	3,4
4	5
5	6,7
6	8,9,10,11,12
7	13
8	14,15,16

Dalsze uproszczenie zadania polega na konstrukcji tzw. zagregowanych wzorów rozkroju. Rozważmy następujący zbiór zagregowanych wzorów rozkroju dla zbiorczych formatów.

Tablica 3

numer zagregowanego wzoru rozkroju	numery zawartych formatów zbiorczych
1	2,8
2	5,7
3	6,6
4	2,2,7
5	1,2,2,4
6	1,3,3
7	2,2,2,2,2

Przyjmijmy, że jeżeli $j < l$, to format zbiorczy j jest podrzędny w stosunku do formatu l. Relacja podrzędności formatu j-tego w stosunku do formatu l-tego oznacza możliwość umieszczenia formatu j-tego na obszarze zarezerwowanym dla formatu l-tego dla dowolnego wzoru rozkroju zawierającego format l-ty. W ogólnym przypadku zamiana danego formatu znajdującego się w ustalonym wzorze rozkroju na format podrzędny może prowadzić do wzoru rozkroju, który jest niedopuszczalny ze względu na wymiary arkusza wyjściowego. Przyjmijmy chwilowo upraszczające założenie, że w rozważanym zadaniu wszystkie formaty podrzędne można umieszczać na miejscu formatów nadrzędnych znajdujących się w zagregowanych wzorach rozkroju /tablica 3/ uzyskując dopuszczalne "podrzędne" wzory rozkroju. Rozważając np. zagregowany wzór rozkroju: /5,7/ o numerze 2 stwierdzamy, że jest on reprezentantem następujących zbiorczych wzorów rozkroju: $\{(i,j):\ 1 \leq i \leq 5,\ 1 \leq j \leq 7\}$. Ze zbioru tego można wybrać tylko 3 interesujące wzory /5,7/,

/4,7/ i /3,7/, gdyż pozostałe wzory mają lepsze /nie gorsze/ zamienniki znajdujące się w innych zagregowanych wzorach, przykładowo wzór zbiorczy /2,7/ może być zastąpiony przez lepszy wzór /2,2,7/ znajdujący się w zagregowanym wzorze 4 .

Zbiór zagregowanych wzorów rozkroju zawartych w tablicy 3 posiada następujące właściwości:

(i) każdy pierwotny wzór rozkroju ze zbioru Ω jest reprezentowany przynajmniej przez jeden zagregowany wzór rozkroju,

(ii) wszystkie wzory rozkroju podrzędne do wzorów zagregowanych są wzorami dopuszczalnymi /z wyjątkiem nielicznych podrzędnych wzorów rozkroju zawierających format 1, tzn. wzór 1,1,1,4 podrzędny do 1,2,2,4 oraz niektóre wzory podrzędne do zagregowanego wzoru 7/.

Jesteśmy obecnie przygotowani do utworzenia zagregowanego modelu harmonogramowania. W modelu tym zmienne i ograniczenia odpowiadać będą zbiorczym formatom oraz zagregowanym wzorom rozkroju. Niech i, $1 \leq i \leq 7$ będzie indeksem zagregowanych wzorów rozkroju, j,l, $1 \leq j$, $l \leq 8$ będą indeksami formatów zbiorczych oraz k indeksem numeru etapu.

Rozważamy zadanie: minimalizować

$$F = \sum_{k \in K} \sum_{i=1}^{7} Z_{ik} \qquad /5/$$

względem zmiennych $Z_{i,k}$ oraz y_{lk} przy ograniczeniach

$$Y_{j,k+1} \leq Y_{j,k} + V_{j,k} - B_{j,k} \qquad j=1,\ldots,8,\ k \in K \qquad /6/$$

$$V_{j,k} = \sum_{i=1}^{7} A_{ij} Z_{ik} \qquad j=1,\ldots,8,\ k \in K \qquad /7/$$

$$Y_{j,k} = \sum_{l=j}^{8} y_{lk} \qquad j=1,\ldots,8,\ k \in K \qquad /8/$$

$$y_{lk} \geq 0, \quad Z_{ik} \geq 0, \quad \text{całkowite} \qquad /9/$$

gdzie Z_{ik} jest ilością arkuszy ciętych w k-tym etapie według i-tego zagregowanego wzoru rozkroju, y_{lk} jest stanem zapasu płyt l-tego formatu zbiorczego w magazynie na początku k-tego okresu /rozumianym jako suma zapasów wszystkich formatów wchodzących w skład formatu zbiorczego/, współczynnik A_{ij} określa liczbę pól formatów zbiorczych $l \geq j$ jaka mieści się w i-tym zagregowanym wzorze, współczynnik $B_{j,k}$ określa łączne zapotrzebowanie w k-tym okresie na płyty użytkowe formatów należących do formatów zbiorczych rozmiarów większych lub równych j.

Łatwo sprawdzić, że $V_{j,k}$ jest łączną ilością pól formatów zbiorczych o numerach $l \geq j$ jakie znajdują się na arkuszach ciętych w k-tym okresie, $Y_{j,k}$ jest stanem zapasu płyt formatów zbiorczych $l \geq j$ na początku k-tego okresu. Macierz zagregowanych współczynników przynależności formatów zbiorczych do wzorów rozkroju dla analizowanego problemu jest równa

$$A = [A_{ij}]_{7\times 8} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad /10/$$

Zadanie zagregowane po wyrugowaniu zmiennych $V_{j,k}$ i $Y_{j,k}$ za pomocą wzorów /7/ i /8/ staje się stosunkowo prostym zadaniem programowania całkowitoliczbowego mającym jedynie 15 zmiennych całkowitoliczbowych oraz 8 ograniczeń w każdym etapie harmonogramowania. Zadanie to może być skutecznie rozwiązywane za pomocą algorytmu płaszczyzn tnących. Wykorzystując biblioteczną wersję algorytmu płaszczyzn tnących [5],[6] generującego stosunkowo głębokie odcięcia dla zadań całkowitoliczbowych uzyskiwano rozwiązania optymalne w liczbie odcięć rzędu 3-5 /w czasie trochę dłuższym od czasu rozwiązywania zadania złagodzonego w liczbach rzeczywistych/ za pomocą algorytmu sympleks . Przykładowo, dla zadania 4-etapowego czas obliczeń na m.c. Odra 1325 wynosił około 8 minut.

4. Wyznaczenie rozwiązania modelu pełnego

Znajomość rozwiązania optymalnego modelu zagregowanego pozwala na wyznaczenie /przy spełnieniu niezbyt ograniczających dodatkowych założeń/ dokładnego rozwiązania dla pełnego modelu harmonogramowania. Po rozwiązaniu zadania zagregowanego dysponujemy wartościami $y_{j,k}$ oraz $V_{j,k}$. Zauważmy, że $V_{j,k}$ nie określa liczby pól formatów rozmiarów większych lub równoważnych formatowi zbiorczemu j znajdujących się na arkuszach ciętych w k-tym okresie, gdyż na obszarach formatów zbiorczych $l \geqslant j$ można oprócz płytek formatu j-tego umieszczać, jeżeli tylko zajdzie potrzeba, płytki formatów podrzędnych w stosunku do formatu j-tego. Z drugiej strony wielkość $\underline{V}_{j,k} = B_{j,k} + (Y_{j,k+1} - Y_{j,k})$ określa liczbę pól przeznaczonych na produkcję w k-tym okresie formatów nadrzędnych lub równoważnych formatowi zbiorczemu j. Rozważając formaty od największego do najmniejszego i uwzględniając fakt, że formaty nadrzędne w stosunku do formatu zbiorczego j nie mogą być umieszczane w polach formatu j, można obliczyć wielkości $v_{j,k}$ - liczbę pól na obszarach formatów zbiorczych $l \geqslant j$ jaka zostanie przeznaczona na produkcję formatu zbiorczego j w k-tym etapie w następujący sposób

$$v_{8,k} = \underline{V}_{8,k}$$

$$v_{j-1,k} = \underline{V}_{j,k} - v_{j,k} \qquad j=8,7,\ldots,2$$

Dalsza dezagregacja polega na rozkładzie wielkości odpowiadających formatom zbiorczym na wielkości dla formatów użytkowych przy czym stosować należy zasadę, aby na obszarach aktualnie największych formatów zbiorczych umieszczać największe formaty użytkowe. Dzięki temu staramy się nie dopuścić do sytuacji, w której pojawiają się formaty użytkowe nie mieszczące się na dostępnych obszarach formatów zbiorczych.
W wyniku dezagregacji uzyskujemy pewne rozwiązanie modelu pełnego.
W ogólnym przypadku możliwe są dwa przypadki:

(i) rozwiązanie to jest dopuszczalne dla zadania pierwotnego, tzn. wszystkie otrzymane wzory rozkroju są realizowane;

(ii) niektóre otrzymane wzory rozkroju nie mogą być realizowane na arkuszu wyjściowym o założonych rozmiarach.

W przypadku (i) uzyskujemy rozwiązanie optymalne. W przypadku (ii) otrzymany wynik jest oszacowaniem od dołu dla optymalnego rozwiązania. Wtedy z otrzymanego rozwiązania niedopuszczalnego można utworzyć jak najlepsze rozwiązanie dopuszczalne, w ogólności suboptymalne.

Należy tutaj jednak podkreślić, że podczas badania algorytmu uzyskiwano dezagregację dopuszczalną dla wszystkich przebadanych zestawów danych.

5. Przykład dezagregacji

Rozważmy zadanie, w którym zapotrzebowania $\hat{P}_{\mu k}$ przedstawia tablica 4. W zadaniu tym przyjęto dodatkowe założenia, że $\Psi_{\mu,k} \leq \hat{P}_{\mu k}$ co gwarantuje, że wszystkie formaty płyt zgromadzone i wyprodukowano w bieżącym etapie są sprzedawane w etapach bieżącym i następnym. Przyjęto również zerowy stan początkowy i końcowy w magazynie. Wyniki rozwiązania zadania zagregowanego przedstawiają tablice 5 i 6. Dezagregacja na formaty zbiorcze przedstawiona jest w tablicy 7.

Podczas przydzielania formatów zbiorczych na pola należy zwrócić uwagę na fakt, że format 1 nie jest całkowicie podrzędny względem formatu 2. Przykładowo we wzorze 4,2,2,1 nie mieści się całkowicie format 1 zamiast 2, /por. tablica 7 ozn. I/. Przydział II jest niedopuszczalny dlatego też przydziały 1 x 150 oraz 1 x 1241 oznaczone przez III i IV zamieniamy kolejno na 1 x 68 oraz 1 x 1323 likwidując zarazem przydział niedopuszczalny 2 x 82 /II/. Dalszy podział w ramach formatów zbiorczych na formaty użytkowe jest w ramach każdego formatu zbiorczego dowolny.
Optymalna wartość funkcji celu wynosi $\hat{f}$ = 28.639 płyt arkuszy wyjściowych.

Tablica 4

format \ etap k	1	2	3	4
1	150	134	200	1392
2	0	400	400	500
3	400	2876	3000	6000
4	150	1834	1200	2500
5	600	400	500	1400
6	500	450	350	150
7	850	1000	950	250
8	300	400	1200	800
9	0	153	0	271
10	1771	0	2000	1100
11	2575	3500	1500	1000
12	1800	3000	1200	629
13	400	500	500	500
14	150	300	600	35
15	0	250	250	45
16	75	684	700	70

Tablica 5

etapy	w z o r y						
	i=1	2	3	4	5	6	7
k = 1	1459	2500	2173	0	0	0	0
2	534	9406	0	0	0	0	0
3	1016	0	2299	0	0	0	0
4	150	0	0	0	1	1323	0

Przedstawia: $z_{i,k}$

Tablica 6

etapy	f o r m a t y							
	l=1	2	3	4	5	6	7	8
k = 1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	1234
3	0	0	4199	0	0	0	0	534
4	0	416	1	0	0	0	0	0

Przedstawia: $y_{l,k}$

Tablica 7

etap	Przydział na wzór	Przydział na pole	Zamówienia		Magazyn	
			format	x ilość sztuk	format	x ilość sztuk
1	1459 wzorów 1	8	8	225	8	1234
		2	1	150		
	2500 wzorów 2	7	7 6	400 2100		
		5	5 4 3	1350 600 550		
	2173 wzorów 3	6	6	2173		
		6	6	2173		
2	534 wzorów 1	8			8	534
		1	1 2	134 400		
	9406 wzorów 2	7	7 6 5	500 7553 1353		
		5	5 4 3	97 400 4710	3	4199
3	1016 wzorów 1	8	8	1016		
		2	1 2	200 400	2	416
	1802 wzorów 2	7	7 6	500 1302		
		5	5 4 3	1300 500 1	3	1
	2299 wzorów 3	6 6	6 6	2299 2299		
4	150 wzorów 1	8 2	8 1	150 III 150		
	5976 wzorów 2	7	7 6 5 4	500 3800 400 1276		
		5	4 3	124 5852		
	1 wzorów 5	4 I 2 2 1	3 2 2 1	1 1 1 1		
	1323 wzorów 6	3 3 1	3 3 1 2	1323 1323 1241 IV 82 II		

LITERATURA

[1] Bartnicki W., Orłowski A.: informacja prywatna.

[2] Gilmore P.C., Gomory R.E.: Multistage cutting stock problems of two and more dimensions, Opns. Res. Vol.13, pp.94-120.

[3] Gilmore P.C., Gomory R.E.: The theory and computations of knapsack functions, Opns. Res. vol 14, pp.1045-1074.

[4] Piasecki B.: Optymalny rozkrój materiałów, WNT, Warszawa 1978.

[5] Toczyłowski E.: Koncepcja systemu programowania całkowitoliczbowego raport problemu I.2.0.3, Warszawa 1978.

[6] Toczyłowski E.: A composite integer programming algorithm, X Symp. on Mathematical Programming, Montreal 1979.

Recenzent:Prof.dr inż.Henryk Kowalowski

Wpłynęło do Redakcji do 30.03.1984r.

МЕТОД СОСТАВЛЕНИЯ ГРАФИКОВ РАБОТЫ ПРИ РАСКРОЙКЕ ОФФСЕТНЫХ ПЛИТ ДЛЯ ТИПОГРАФИЙ " РСВ ПРАСА "

Р е з ю м е

В работе анализируется некоторая математическая модель задачи составления графика раскроя оффсетных плит для свёртывающих машин в типографиях " РСВ Праса" . Полная модель это задача целочисленного программирования с большим количеством переменных. В работе используются специфические свойства проблемы для преобразования её к редуцированному виду с восьмикратным уменьшением числа переменных, решение которого даёт возможность определения точного решения полной(нередуцированной) модели. Поставленная задача была эффективно решена при помощи алгоритма режущих поверхностей.

A METHOD OF SCHEDULING OF OFFSET DISCS CUTTING FOR PRINTING OFFICES RSW Prasa

S u m m a r y

A mathematical model for scheduling problem of offset disc cutting for bundling machines in printing offices RSW Prasa is considered. The model is given as a integer programming problem with many variables. Some particular features of the problem are used to reduce it to a problem with the numeber of variables reduced eight times. Nevertheless its solution enables to find an accurate solution of the full model. The cutting phases algorithm is used to find a solution.