ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: GÓRNICTWO z.89 Nr kol.576

SZCZEPAN BORKOWSKI

RÓWNANIA WARIACYJNE FIZYKALNIE NIELINIOWEJ TERMOSPRĘŻYSTOŚCI

Przyjmując, że ośrodek jest izotropowy, jednorodny, lecz fizykalnie nieliniowy - typu Kauderera a także zakładając działanie niestacjonarnych pól termicznych i obciążeń - sformułowano podstawowe równania wariacyjne termosprężystości sprzężonej.

Wprowadzenie

Przegląd prac dotyczących zasad wariacyjnych termosprężystości podany jest w monografiach: Funga [4] , Nowackiego [6,7] , Washizu [9], Kowalenki [11], a także w [10]; w wymienionych pracach przedstawia się ujęcie Biota [1] , które charakteryzuje się wprowadzeniem do rozważań strumienia entropii i uzyskaniem tzw. równań wariacyjnych problemu, por. [4] . Rozwinięcie tak przedstawionego ujęcia na przypadek mieszanych warunków brzegowych, a także uzyskanie równań Lagrange'a, podano w pracy Rafalskiego [8] . Zastosowanie zasad wariacyjnych do rozwiązywania problemów stateczności prętów przedstawiono w publikacji Szapowałowa [13] . Wariacyjne sformułowanie zadań niejednorodnej, deformacyjnej teorii plastyczności, przy uwzględnieniu wpływu pola temperatur, przedstawione jest przez Temisa [12] . Problemy niesprzężone teorii fizykalnie nieliniowej rozpatrywano w [3] .
W niniejszej pracy podano równania wariacyjne dla termosprężystości fizykalnie nieliniowej, której równania konstytutywne rozpatrzono w [2] .

1. Równania wyjściowe

Przyjmować będziemy, że równania konstytutywne, por.[2] , mają postać następującą:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma\delta_{ij} = 2G^{*}\varepsilon_{ij} + (\lambda^{*}\varepsilon_{kk} - \gamma^{*}\Theta)\delta_{ij} ,$$
$$s_{ij} = 2G^{*}e_{ij} , \quad \sigma = 3K^{*}\varepsilon - \gamma^{*}\Theta \qquad /1.1./$$

w której przyjęto oznaczenia

$$2G^{*}=2G(1-\chi),\quad \lambda^{*}=\lambda(1-\psi),$$

/1.2./ $$3K^{*}=3K(1-\varphi),\quad \gamma^{*}=3K(1-\bar{\varphi})\alpha_{T},$$

$$\chi=-\frac{3}{2G}\sum_{\gamma=2}^{Q}\gamma b_{\gamma}e^{\gamma-1},\quad \varphi=-\frac{1}{9K}\sum_{\beta=3}^{9}\beta a_{\beta}\varepsilon^{\beta-2},$$

$$\bar{\varphi}=-\frac{1}{9K}\sum_{\beta=3}^{9}\beta a_{\beta}(\Theta\alpha_{T})^{\beta-2},\quad \psi=-\frac{2G}{3\lambda}\chi+\frac{K}{\lambda}\varphi.$$

W pracy ograniczymy się do teorii liniowej geometrycznie; tensor odkształcenia określa równanie

/1.3./ $$2\varepsilon_{ij}=u_{i,j}+u_{j,i}$$

Warunki brzegowe, naprężeniowe i przemieszczeniowe zapiszemy w postaci

/1.4./ $$\begin{aligned} &\sigma_{ij}n_{j}=\mathfrak{X}_{i}(\hat{x},t)=\hat{\mathfrak{X}}_{i} &&:(\hat{x},t)\in\partial\hat{\mathcal{P}}\times\mathcal{T},\\ &u_{i}=u_{i}(\tilde{x},t)=\tilde{u}_{i} &&:(\tilde{x},t)\in\partial\tilde{\mathcal{P}}\times\mathcal{T} \end{aligned}$$

Równania ruchu Cauchy'ego mają znaną postać

/1.5./ $$\sigma_{ij,j}+\bar{X}_{i}=\varrho\ddot{u}_{i}$$

Podstawiając / 1.3./ kolejno do równań / $1.1/_{1}$, /$1,1/_{4}$, /1.5./ uzyskamy

/1.6./ $$\begin{aligned} &\sigma_{ij}=G^{*}(u_{i,j}+u_{j,i})+(\lambda^{*}u_{k,k}-\gamma^{*}\Theta)\delta_{ij},\\ &\sigma_{ij}n_{j}=\mathcal{M}_{ik}u_{k}-\gamma^{*}\Theta n_{i}=\hat{\mathfrak{X}}_{i},\\ &\sigma_{ij,j}+\bar{X}_{i}=\mathcal{N}_{ik}u_{k}-(\gamma^{*}\Theta)_{,i}+\bar{X}_{i}=\varrho\ddot{u}_{i} \end{aligned}$$

W równaniach / 1.6/ przyjęto oznaczenia

/1.7./ $$\begin{aligned} &\mathcal{M}_{ik}(\,)=G^{*}[\delta_{ik}(\,)_{,j}+\delta_{jk}(\,)_{,i}]n_{j}+\lambda^{*}(\,)_{,k}n_{i},\\ &\mathcal{N}_{ik}(\,)=\{G^{*}[\delta_{ik}(\,)_{,j}+\delta_{jk}(\,)_{,i}]\}_{,j}+[\lambda^{*}(\,)_{,k}]_{,i} \end{aligned}$$

2. Zasada Lagrange'a

Dla pól $\mathfrak{X}_{i}$, $\bar{X}_{i}$, u_{i} przyjmować będziemy, że ich wariacje są jak to przedstawiono w tablicy 1.

Tablica 1

Obszar	Przemieszczenie	Wariacje przemieszczenia	Siły	Wariacje siły
$\mathcal{P}\times\mathcal{T}$ $(x,t)=(x_i,t)$	u_i	$\delta u_i \neq 0$	$\bar{X}_i$	$\delta\bar{X}_i=0$
$\partial\hat{\mathcal{P}}\times\mathcal{T}$ $(\hat{x},t)=(\hat{x}_i,t)$	u_i	$\delta u_i \neq 0$	$\hat{\mathfrak{X}}_i$	$\delta\hat{\mathfrak{X}}_i=0$
$\partial\tilde{\mathcal{P}}\times\mathcal{T}$ $(\tilde{x},t)=(\tilde{x}_i,t)$ $\partial\hat{\mathcal{P}}\cup\partial\tilde{\mathcal{P}}=\partial\mathcal{P}$ $\partial\hat{\mathcal{P}}\cap\partial\tilde{\mathcal{P}}=\phi$	$\tilde{u}_i$	$\delta\tilde{u}_i$	$\mathfrak{X}_i=\mathcal{M}_{ik}u_k-\mathcal{T}^*\circledast n_i$	$\delta\mathfrak{X}_i\neq 0$

Podstawiając zależności / 1.4/$_1$ i / 1.5/ do równania $\int_{\mathcal{P}}\bar{X}_i\delta u_i\cdot dx+\int_{\partial\hat{\mathcal{P}}}\hat{\mathfrak{X}}_i\delta u_i\cdot dx$, które określa pracę przygotowaną sił masowych $\bar{X}_i$ i powierzchniowych $\hat{\mathfrak{X}}_i$ - na przesunięciach przygotowanych δu_i otrzymamy zasadę przemieszczeń przygotowanych Lagrange'a:

$$\int_{\mathcal{P}}\bar{X}_i\delta u_i\cdot dx+\int_{\partial\hat{\mathcal{P}}}\hat{\mathfrak{X}}_i\,\delta u_i\,dx=\int_{\mathcal{P}}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,dx+\int_{\mathcal{P}}\varrho\ddot{u}_i\delta u_i\,dx,\qquad u_i=\tilde{u}_i\quad (x,t)\in\partial\tilde{\mathcal{P}}\times\mathcal{T}. \tag{2.1.}$$

Warunek / 2.1./$_2$ winien być spełniony dla podobszaru $\partial\tilde{\mathcal{P}}\times\mathcal{T}$; uważając ten warunek za ograniczenie nałożone na pole przemieszczeń i wprowadzając mnożnik Lagrange'a $\mathfrak{X}_i=\mathcal{M}_{ik}u_k-\mathcal{T}^*\circledast n_i$, możemy równanie / 2.1/ zapisać w postaci równania wariacyjnego, bezwarunkowego

$$\int_{\mathcal{P}}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,dx+\int_{\mathcal{P}}\varrho\,\ddot{u}_i\delta u_i\,dx=\int_{\mathcal{P}}\bar{X}_i\delta u_i\,dx+\int_{\partial\hat{\mathcal{P}}}\hat{\mathfrak{X}}_i\delta u_i\cdot dx+\delta\left\{\int_{\partial\tilde{\mathcal{P}}}(u_i-\tilde{u}_i)\mathfrak{X}_i\,dx\right\} \tag{2.1.'}$$

Równanie / 2.1'/ możemy też zapisać w postaci

$$\int_{\mathcal{P}}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,dx+\int_{\mathcal{P}}\varrho\ddot{u}_i\delta u_i\,dx-\delta\left\{\int_{\partial\tilde{\mathcal{P}}}u_i\mathfrak{X}_i\,dx\right\}=\int_{\mathcal{P}}\bar{X}_i\,\delta u_i\cdot dx+\int_{\partial\hat{\mathcal{P}}}\hat{\mathfrak{X}}_i\delta u_i\,dx-\int_{\partial\tilde{\mathcal{P}}}\tilde{u}_i\,\delta\mathfrak{X}_i\,dx. \tag{2.1.''}$$

gdzie

$$\mathfrak{X}_i = \mathcal{M}_{ik} u_k - \gamma^* \Theta n_i \tag{2.2.}$$

Całkując równania /2.1./, /2.1'/, /2.1.''/ w przedziale czasu $(t_o, \mathcal{T})$, otrzymujemy kolejno

$$\{\sigma_{ij} ; \delta\varepsilon_{ij}\} + \{\varrho \ddot{u}_i ; \delta u_i\} = \{\bar{X}_i ; \delta u_i\} + \langle \hat{\mathfrak{X}}_i ; \delta u_i \rangle,$$

$$\{\sigma_{ij} ; \delta\varepsilon_{ij}\} + \{\varrho \ddot{u}_i ; \delta u_i\} = \{\bar{X}_i ; \delta u_i\} + \delta\langle u_i - \bar{u}_i ; \mathfrak{X}_i \rangle,$$

$$\{\sigma_{ij} ; \delta\varepsilon_{ij}\} + \{\varrho \ddot{u}_i ; \delta u_i\} - \delta(u_i ; \mathfrak{X}_i) = \tag{2.3.}$$

$$= \{X_i ; \delta u_i\} + \langle \hat{\mathfrak{X}}_i ; \delta u_i \rangle - (\bar{u}_i ; \delta \mathfrak{X})$$

W / 2.3./ wprowadzono następujące iloczyny skalarne

$$\{(\ ) ; (\ )\} = \int_{\mathcal{P} \times \mathcal{T}} (\ )(\ )\, dx\, dt, \tag{2.4.}$$

$$\langle (\ ) ; (\ ) \rangle = \int_{\partial \hat{\mathcal{P}} \times \mathcal{T}} (\ )(\ )\, dx\, dt, \qquad (\ ) ; (\ )) = \int_{\partial \bar{\mathcal{P}} \times \mathcal{T}} (\ )(\ )\, dx\, dt$$

Równanie / 2.3/$_1$ będzie słuszne w przypadku, gdy $u_i = \bar{u}_i = 0$, dla $(x,t) \in \partial \bar{\mathcal{P}} \times \mathcal{T}$ / utwierdzenie/ lub, gdy $\partial \bar{\mathcal{P}} = \phi$ / warunki brzegowe w naprężeniach/.
Równania / 2.3./ są wyrazem formalnym zasady przemieszczeń wirtualnych Lagrange'a, w przyjętym tutaj ujęciu.

Przejdziemy dalej do przekształcenia wyrażenia $\int \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij}\, dx$; przyjmując za wyjściowe równania $\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma\delta_{ij}$, $\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \varepsilon\delta_{ij}$, otrzymamy $\int \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij}\, dx = \int (s_{ij} \delta e_{ij} + 3\sigma\delta\varepsilon)\, dx$, podstawiając do ostatniego równania związek /1.1/$_2$ i wykonując szereg przekształceń przy uwzględnieniu / 1.2/$_2$, otrzymamy

$$\int_{\mathcal{P}} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij}\, dx = \frac{2}{3} \int_{\mathcal{P}} G^* \delta e^2 dx + \frac{9}{2} \int_{\mathcal{P}} K^* \delta\varepsilon^2 dx -$$

$$- 3\int_{\mathcal{P}} \gamma^* \Theta\, \delta\varepsilon\, dx = \int_{\mathcal{P}} G^* \delta(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})\, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \lambda^* \delta(\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ll})\, dx - \tag{2.5.}$$

$$- \int_{\mathcal{P}} \gamma^* \Theta\, \delta\varepsilon_{kk}\, dx$$

Jeżeli do wyrażenia $3G\delta\varepsilon$ podstawimy $G=3K^*\varepsilon-\gamma^*\circledH$ i uwzględnimy /1.2./, to otrzymamy $3G\delta\varepsilon=(9/2)\delta(\hat{K}^*\varepsilon^2)-3\gamma^*\circledH\,\delta\varepsilon$ w podobny sposób uzyskamy, że $S_{ij}\delta e_{ij}=(4/3)\delta(\hat{G}^*e)$ podstawiając ostatnie zależności do równania $G_{ij}\delta\varepsilon_{ij}=S_{ij}\delta e_{ij}+3G\delta\varepsilon$ i wykonując całkowanie po obszarze $\mathcal{P}$, dostaniemy

$$\int_{\mathcal{P}}G_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,dx=\delta\Big(\tfrac{2}{3}\int_{\mathcal{P}}\hat{G}^*e\,dx+\tfrac{9}{2}\int_{\mathcal{P}}K^*\varepsilon\,dx\Big)-3\int_{\mathcal{P}}\gamma^*\circledH\,d\varepsilon\,dx=$$

/2.6./

$$=\delta\Big(\int_{\mathcal{P}}\big[\hat{G}^*\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}+\tfrac{1}{2}\hat{\lambda}^*\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ll}\big]dx\Big)-\int_{\mathcal{P}}\gamma^*\circledH\,\delta\varepsilon_{kk}\,dx,$$

gdzie

$$\hat{G}^*=(1-\chi)G,\quad \hat{\lambda}^*=(1-\hat{\psi})\lambda,\quad \hat{\psi}=-\tfrac{2}{3}\tfrac{G}{\lambda}\hat{\chi}+\tfrac{k}{\lambda}\hat{\varphi},$$

/2.7./

$$\hat{\chi}=-\tfrac{3}{2G}\sum_{\gamma=2}^{Q}b_\gamma e^{\gamma-1},\quad \hat{\varphi}=\tfrac{2}{9K}\sum_{\beta=3}^{9}a_\beta\varepsilon^{\beta-2}$$

Funkcjonał, występujący pod operacją wariacji - w pierwszym wyrażeniu członu środkowego równania / 2.6/ przedstawia energię wewnętrzną sił sprężystości ośrodka; funkcjonał ten oznaczymy symbolem $W[u_i]$:

/2.8./ $$W[u]=\int_{\mathcal{P}}\big(\hat{G}^*\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}+\tfrac{1}{2}\lambda^*\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ll}\big)dx.$$

$$\delta W[u_i,\delta u_i]=\int_{\mathcal{P}}\big[G^*\delta(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})+\tfrac{1}{2}\lambda^*\delta(\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ll})\big]dx=$$

$$=\int_{\mathcal{P}}\big[2G^*\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{ij}+\lambda^*\varepsilon_{kk}\delta\varepsilon_{ll}\big]dx$$

/2.9./ $$\int_{\mathcal{P}}G_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,dx=\delta W[u_i]-\int_{\mathcal{P}}\gamma^*\circledH\,\delta\varepsilon_{kk}\,dx$$

Uwzględniając / 2.9/ w / 2.3/$_2$ otrzymujemy

/2.10/ $$\delta\Big(\int_{t_0}^{\tau}W[u_i]dt\Big)+\big\{\varrho\ddot{u}_i;\delta u_i\big\}-\big\{\gamma^*\circledH;\delta\varepsilon_k\varepsilon_k\big\}=$$

$$=\big\{\bar{X}_i;\delta u_i\big\}+\langle\hat{\mathfrak{X}}_i;\delta u_i\rangle+\delta(u_i-\tilde{u}_i;\mathfrak{X}_i)$$

Podstawiając do równania / 2.8/$_2$ związek $2\varepsilon_{ij}=u_{i,j}+u_{j,i}$ i wykorzystując wielokrotnie twierdzenie Greena, dostaniemy

/2.11/ $$\delta W[u_i,\delta u_i]=-\int_{\mathcal{P}}\mathcal{N}_{ik}u_k\delta u_i\,dx+\int_{\partial\hat{\mathcal{P}}}\mathcal{M}_{ik}u_k\delta u_i\,dx$$

Przekształcając w sposób analogiczny trzecie wyrażenie - po prawej stronie równania / 2.10/, a następnie podstawiając tam / 2.11/ i porządkując, otrzymamy

$$\{-\mathcal{N}_{ik}u_k+(\gamma^*\Theta)_{,i}+\varrho\ddot{u}_i-\bar{X}_i;\delta u_i\}+$$

/2.12./ $$+\langle\mathcal{M}_{ik}u_k-\gamma^*\Theta n_i-\hat{\mathfrak{X}}_i;\delta u_i\rangle-$$

$$-(u_i-\tilde{u}_i;\delta\mathfrak{X}_i)=0$$

Ze względu na to, że wariacje $\delta u_i(x,t),(x,t)\in(\mathcal{P}\cup\partial\hat{\mathcal{P}}\times\mathcal{T});\ \delta\mathfrak{X}_i,\ (x,t)\in\tilde{\mathcal{P}}\times\mathcal{T}$ są niezależne, z / 2.12./ uzyskujemy kolejno równania / 1.6/$_3$, /1.6/$_2$, / 1.4/$_4$, tj. równania przemieszczeniowe zagadnienia, naprężeniowe warunki brzegowe i warunki przemieszczeniowe zadania.

Przyjmując, że $\delta u_i(x,t_o)=\delta u_i(x,\tau)=0$, możemy człon $\{\varrho\ddot{u}_i;\delta u_i\}$ znanym sposobem sprowadzić do postaci

/2.13/ $$\{\varrho\ddot{u}_i;\delta u_i\}=-\delta\int_{t_o}^{\tau}\mathcal{K}\,dt$$

gdzie

/2.13.'/ $$\mathcal{K}=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{P}}\varrho\dot{u}_i\dot{u}_i\,dx$$

przedstawia energię kinetyczną ośrodka.

Wprowadzając dalej do / 2.10/ potencjał sił masowych, powierzchniowych i oddziaływań

/2.14./ $$-V[u_i]=-\int_{\mathcal{P}}\bar{X}_i\bar{u}_i\,dx-\int_{\partial\hat{\mathcal{P}}}\hat{\mathfrak{X}}_iu_i\,dx-\int_{\partial\tilde{\mathcal{P}}}(u_i-\tilde{u}_i)\mathfrak{X}_i\,dx$$

uzyskamy, po uwzględnieniu / 2.13/, równanie

/2.15/ $$\delta\left\{\int_{t_o}^{\tau}(W[u_i]-\mathcal{K}[u_i]-V[u_i]\,dt\right\}-$$
$$-\int_{t_o}^{\tau}\int_{\mathcal{P}}\gamma^*\Theta\,\delta\varepsilon_{kk}\,dx\,dt=0$$

Wprowadzając do / 2.15/ funkcjonał Lagrange'a

/2.16./ $$L[u_i]=-\mathcal{K}-W-V$$

uzyskamy

/2.17/ $$\delta I=\delta H-\int_{t_o}^{\tau}\int_{\mathcal{P}}\gamma^*\Theta\,\delta\varepsilon_{kk}\,dx\,dt=0$$

gdzie przez H oznaczono funkcjonał Hamiltona

$$H = \int_{t_0}^{\tau} L[u_i]\,dt \tag{2.18.}$$

Równanie wariacyjne / 2.15/, w przypadku pola niesprzężonego, przyjmuje postać

$$\delta\left\{\int_{t_0}^{\tau}\left(W[u_i] - \gamma^{*}\Theta\varepsilon_{kk} - \mathcal{K} - V\right)dt\right\} = 0 \tag{2.19}$$

Równanie / 2.15/ - dla zagadnień sprzężonych pól przemieszczeń i temperatur i zależności / 2.19/ - dla pól niesprzężonych, są podstawowymi związkami wariacyjnymi fizykalnie nieliniowej termosprężystości.

3. Równanie wariacyjne przewodnictwa ciepła dla zagadnienia sprzężonego

Jako równanie wyjściowe przyjmujemy równanie / 3.22/, podane w pracy [2] :

$$-\frac{\lambda_o}{T_o}\Theta_{,ii} + \gamma T_o\dot{\varepsilon}^{*} + \frac{c_e}{T_o}\dot{\Theta} - \frac{1}{T_o}\dot{\omega} = 0\,, \tag{3.1.}$$

gdzie

$$\dot{\omega} = q = Q\lambda_o\,, \quad \varepsilon^{*} = [(1-\bar{\varphi})u_{k,k}] = (1-\bar{\varphi})\varepsilon_{kk} \tag{3.1'}$$

Dla zbudowania równania wariacyjnego problemu, por. [14] , pomnożymy /3.1./ przez Θ i scałkujemy po obszarze $(t_0 \times \tau) \times \mathcal{P}$; po zastosowaniu twierdzenia Greena otrzymamy

$$\delta\bar{H} = \int_{t_0}^{\tau}\left\{\frac{T_o}{\lambda_o}\int_{\mathcal{P}}\dot{S}_i\,\delta S_i\,dx + \int_{\partial\mathcal{P}}\Theta n_i\,\delta S_i\,dx + \gamma\int_{\mathcal{P}}\Theta\,\delta\varepsilon^{*}dx + \frac{c_o}{T_o}\int_{\mathcal{P}}\Theta\,\delta\Theta\,dx - \frac{1}{T_o}\int\Theta\,\delta\omega\,dx\right\}dt = 0, \tag{3.2.}$$

gdzie

$$\delta\omega = \dot{\omega}\,dt, \quad \delta\varepsilon^{*} = \dot{\varepsilon}^{*}dt\,, \quad \delta\Theta = \dot{\Theta}\,dt, \tag{3.3}$$
$$\dot{S}_i = -\frac{\lambda_o}{T_o}\Theta_{,i}\,, \quad \delta S_i = \dot{S}_i\,dt$$

W równaniach / 3.2/, / 3.3/ przez $\dot{S}_i$ oznaczono strumień entropii.

W dalszych rozważaniach, por. [2] , przyjmiemy następujące warunki początkowo - brzegowe dla równania przewodnictwa ciepła

$$\Theta(x,t)=\Theta_{(1)} \quad ; \quad (x,t)\in\partial\mathcal{P}_{(1)}\times\mathcal{T}$$

/3.4./
$$\lambda_0\Theta_{,i}\cdot n_i+\varkappa\left(\Theta-\Theta_{(2)}\right)=0 \quad ; (x,t)\in\partial\mathcal{P}_{(2)}\times\mathcal{T}$$

$$\lambda_0\Theta_{,i}\cdot n_i=T_0\dot{q}_{(3)} \quad ; \quad (x,t)\in\partial\mathcal{P}_{(3)}\times\mathcal{T}$$

Uwzględniając warunki / 3.4/ w / 3.2.A wprowadzając kolejno funkcję dysypacji, potencjał termiczny brzegowy i - źródeł ciepła

/3.5./
$$D=\int_{t_0}^{T}\left\{\frac{T_0}{\lambda_0}\int_{\mathcal{P}}\dot{S}_i\dot{S}_i dx+\frac{T_0}{\varkappa}\int_{\partial\mathcal{P}_{(2)}}\dot{S}_k n_k n_i\dot{S}_i\cdot dx\right\}dt$$

$$\dot{D}=\frac{T_0}{\lambda_0}\int_{\mathcal{P}}\dot{S}_i\dot{S}_i\,dx+\frac{T_0}{\varkappa}\int_{\partial\mathcal{P}_{(2)}}\dot{S}_k n_k n_i\dot{S}_i\,dx=\frac{dD}{dt}\geqslant 0,$$

$$\tilde{\delta}D=\dot{D}\,dt=\frac{T_0}{\lambda_0}\int_{\mathcal{P}}\dot{S}_i\delta S_i\,dx+\frac{T_0}{\varkappa}\int_{\partial\mathcal{P}_{(2)}}\dot{S}_k n_k n_i\cdot\delta S_i\,dx;$$

$$P=\frac{c_e}{2T_0}\int_{\mathcal{P}}\Theta^2 dx\ ,\ \delta P=\frac{c_e}{T_0}\int_{\mathcal{P}}\Theta\delta\Theta\,dx;$$

$$\delta B=\int_{\partial\mathcal{P}_{(1)}}\Theta_{(1)}n_i\delta S_i\,dx+\int_{\partial\mathcal{P}_{(2)}}\Theta_{(2)}n_i\delta S_i\,dx+\int_{\partial\mathcal{P}_{(3)}}\Theta\delta q_{(3)}dx-$$
$$-\frac{1}{T_0}\int_{\mathcal{P}}\Theta\delta\omega\,dx$$

Otrzymamy ostatecznie

/3.6./
$$\delta\bar{H}=\int_{t_0}^{T}\delta\bar{L}\,dt=0$$

gdzie

/ 3.6.'/
$$\delta\bar{L}=\delta B+\delta D+\delta P+\gamma\int_{\mathcal{P}}\Theta\delta\varepsilon^{*}dx$$

W rozpatrywanym, najogólniejszym przypadku zagadnienia dynamicznego, sprzężonego dysponujemy układem równań wariacyjnych / 2.16/, / 3.6./, które stanowią układ zupełny dla problemu sprzężonego.

Wnioski końcowe

W pracy ograniczono się do wyprowadzenia podstawowego układu równań wariacyjnych problemu, przy możliwie ogólnym sformułowaniu zadania; nie zajmowano się natomiast problemami natury czysto matematycznej.

Pewne szczególne problemy były analizowane w pracy [3] . Stosowane tutaj oznaczenia są zgodne z literaturą [2,3] .

LITERATURA

[1] Biot M.A.: Variational principles in heat transfer, Clarendon Press 1970.

[2] Borkowski Sz.: Dynamical equations of physically nonlinear thermoelasticity, Bull. Acad.Polon.Sci.,Ser, sci.techn. 9,24/1976/,33-40.

[3] Borkowski Sz.: Variational principles in physically nonlinear thermoelasticity, ibid., 9,25/ 1977/, 73-78

[4] Fung Y.C.: Podstawy mechaniki ciała stałego, PWN Warszawa 1969.

[5] Kauderer H.: Nichtlineare Mechanik, Springer - Verlag 1958

[6] Nowacki W.: Dynamiczne zadania termosprężystości, PWN Warszawa 1964

[7] Nowacki W.: Teoria sprężystości PWN Warszawa 1970

[8] Rafalski P.; The Lagrangian formulation of the dynamic thermoelastic problem for mixed boundary conditions, Proc.Vibr. Probl., 1,9/1968/17-35

[9] Washizu K.: Variational method in elasticity and plasticity, Perg. Press 1974

[10] Encyclopedia of physics, Vol. VI a/2,Mech.of solids II, Springer - Verlag, Berlin New-York 1972.

[11] Kowalenko A.D.: Osnowy termouprugosti, izbrannyje trudy, 399-688, Kijew 1976

[12] Temis M.: Wariacjonnyj metod reszenija zadacz nieodnorodnoj teorii płasticznosti, Mech.Twierd. Tieła, 5, 1976, 74-81

[13] Szapowałow Ł.A.: Priłożenije metodow termodynamiki k niekotorym temperaturnym zadaczam uprugoj ustojczywosti, w zbiorze prac: Procznost i deformacija materiałow w nierawnomiernych fizyczeskich polach wyp.II, 131-169, Atomizdat 1968

[14] Michajłow W.Ł.: Differencjalnyje urawnienija w czastnych proizwodnych, Nauka 1976.

Вариационные уравнения физически нелинейной термоупругости

Принимая, что центр изотропный, однородный, но физически нелинейный - типа Каудерера, а тоже учитывая работу не-

стационарных термических полей и нагрузок – были сформулированы основные вариационные уравнения упругой термоупругости.

VARIATIONAL EQUATIONS IN PHYSICALLY NONLINEAR THERMOELASTICITY

Variational equations for physically nonlinear, coupled thermoelasticity are established.