ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978
Seria: GÓRNICTWO z.89 Nr kol.576

JAN KOSZELSKI

ANALIZA OBLICZANIA MAKSYMALNEGO MOMENTU W POWŁOCE WIELOLINOWEGO KOŁA PĘDNEGO

W pracy przeprowadzono analizę równania określającego rozkład momentów równoleżnikowych na okręgu powłoki wielolinowego koła pędnego. W wyniku tej analizy otrzymano równanie, którym posługując się można w sposób prosty obliczyć moment maksymalny.

1. Wstęp

Na początku lat sześćdziesiątych w górnictwie krajowym wprowadzono do eksploatacji wielolinowe koło pędne, które charakteryzuje się cylindrycznym płaszczem stalowym, wzmocnionym żebrami pierścieniowymi i podpartym na brzegach o tarcze kołowe.

Płaszcz jest obciążony linami przeważnie czterema. Wzdłuż tworzących płaszcza liny są ułożone w odpowiednich odstępach i opasują płaszcz na łukach o długości πr, lub nieco większych niż πr. Stąd wynika, że rozkład obciążenia na powierzchni płaszcza przebiega skokowo, zarówno wzdłuż tworzących jak i na okręgach.
Pierwsze opracowanie metody teoretycznego określania momentów i sił wewnętrznych w płaszczu wielolinowego koła pędnego opublikował Prof. O. Popowicz [5,6,7]. Metodą Prof. Popowicza była kilkakrotnie weryfikowana drogą doświadczalną, na różnych modelach płaszcza [1,2,3,8]. W każdym przypadku badań otrzymano wystarczającą zgodność wyników teoretycznych, w porównaniu z wynikami doświadczalnymi.

2. Wprowadzenie

W obliczeniach stereomechanicznych płaszcz koła rozpatrujemy jako kolisto-walcową powłokę zamkniętą. Zgodnie z istniejącą momenklaturą, tworzące powłoki określa się jako południki, a okręgi jako równoleżniki.

Płaszczyzny przechodzące przez oś powłoki i dowolne tworzące przyjęto za południkowe, a do nich prostopadłe płaszczyzny za równoleżnikowe.

W celu określenia dowolnego punktu leżącego na powierzchni powłoki przyjęto współrzędne walcowe. Na rys. 1 przedstawiono przyjęty układ: oś współrzędnych jest równocześnie osią powłoki, a punkt zerowy leży na przecięciu się osi x z osiami z i y.

Kąt α przyjęto równy zero na dodatniej osi z, a jego dodatni kierunek oznaczono zgodnie z ruchem wskazówek zegara w płaszczyźnie y - z.

Momenty zginające południki i równoleżniki powłoki określa się odpowiednio: momentami południkowymi i momentami równoleżnikowymi. Siły wewnętrzne w powłoce, skierowane prostopadle do płaszczyzny południkowej i płaszczyzny równoleżnikowej, określa się odpowiednio: błonowymi siłami południkowymi i błonowymi siłami równoleżnikowymi.

W pracy rozważania ograniczone są do analizy równań określających momenty równoleżnikowe, a celem ich jest opracowanie wyrażenia uproszczonego na wyznaczenie maksymalnego momentu równoleżnikowego.

3. Momenty równoleżnikowe

Wartość momentów równoleżnikowych M w powłoce użebrowanej [7].

$$M\left(\frac{1}{2},\alpha\right) = -0{,}132\, z_1 \cdot \sqrt[4]{\frac{\bar{E}^3}{R^2 E}} \Bigg[0{,}00916 \cdot 1^3 \cdot \frac{\bar{E}^2}{R_E} \cdot$$

$$\cdot \sqrt[4]{\frac{E\bar{E}}{R^2}} \cdot \cos\alpha - \frac{1 - 8\cos 3\alpha}{22{,}62} \cdot \Phi_3\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1 - 24\cos 5\alpha}{117{,}58} \cdot$$

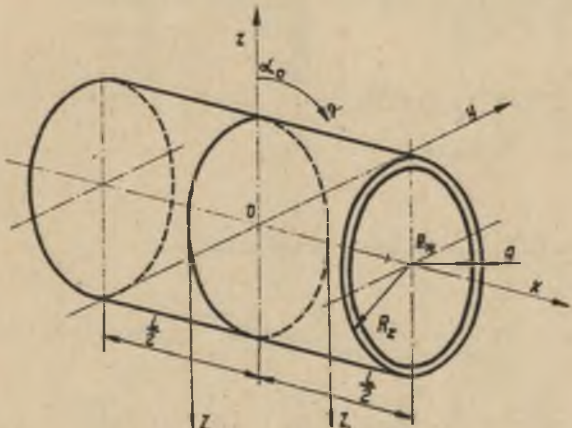
$$\cdot \Phi_5\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1 - 48\cos 7\alpha}{332{,}5} \cdot \Phi_7\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1 - 80\cos 9\alpha}{715{,}5} \cdot$$

$$\cdot \Phi_9\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1 - 120\cos 11\alpha}{1313} \cdot \Phi_{11}\left(\frac{1}{2}\right) + \ldots \Bigg], \qquad /1/$$

gdzie:

$\Phi_n\left(\frac{1}{2}\right)$ - funkcja położenia:

$$\Phi_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mathrm{Sh}\, m_n l - \sin m_n l}{\mathrm{Ch}\, m_n l + \cos m_n l}. \qquad /2/$$



Rys. 1. Układ współrzędnych

$$m_n = n\sqrt[4]{\frac{/n^2 - 1/^2\,\bar{g}^3}{48 g\, R^2}} \qquad /3/$$

gdzie: $\bar{g}$ - oznacza równowartną grubość blachy

$$\bar{g} = \sqrt{\frac{12 I}{L}} \qquad /4/$$

g - grubość blachy,
I - moment bezwładności liczony na całej długości powłoki, z uwzględnieniem żeber,
l - wartość bezwymiarowa,

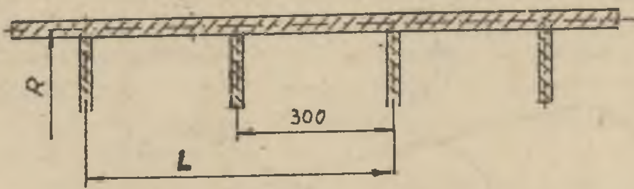
$$l = \frac{L}{R}$$

oznaczenie wielkości L wynika z rys. 2,

$$n = 2i + 1 \text{ dla } i = 1,2,3,4,\ldots$$

R - promień środkowy płaszcza,
Z_1 - obciążenie liny,
α - kąt określony na rys. 1.

Dla tarcz przyjętych jako nieodkształcalne względem osi koła przyjmujemy współczynnik przy pierwszym wyrazie szeregu 0,00229 w miejsce 0,00916 [7].



Rys.2. Płaszcz koła czterolinowego

Dla gładkiej powłoki $g = \bar{g}$, a wówczas wyrażenie /1/ nieco się upraszcza i przyjmuje postać:

$$M\,/\tfrac{1}{2},\alpha/ = -\,0{,}132\,Z_1 \cdot \sqrt{\frac{g}{R}}\left[\,0{,}00916\,.\,1^3\,.\,\frac{g}{R}\sqrt{\frac{g}{R}}\,.\,\cos\alpha\;-\right.$$

$$-\,\frac{1-8\cos 3\alpha}{22{,}62}\cdot\Phi 3/\tfrac{1}{2}/+\frac{1-24\cos 5\alpha}{117{,}58}\cdot\Phi 5/\tfrac{1}{2}/-\frac{1-48\cos 7\alpha}{332{,}5}\cdot\Phi 7/\tfrac{1}{2}/\;+$$

$$\left.+\,\frac{1-80\cos 9\alpha}{715{,}5}\cdot\Phi 9/\tfrac{1}{2}/-\ldots\right]. \qquad /5/$$

Upraszcza się również równanie /3/

$$m_n = \frac{n}{2{,}63}\sqrt{\frac{/n^2-1/g}{R}}\,, \qquad /6/$$

L - liczy się według oznaczenia podanego na rys. 1.

Przykładowo na rys. 3 przedstawiono rozkład momentów równoleżnikowych w powłokach o grubościach: 11,9 i 7 . 10^{-3} m, obciążonych w odległości L/2 od krawędzi brzegu, dla R = 0,5 m i L = 1 m.
Do obliczeń zastosowano maszynę cyfrową typu Odra 1204.

Analizując wykresy momentów przedstawione na rys.3, zauważa się, że maksymalny moment występuje w otoczeniu 16/11,5 rad.
Natomiast wyniki badań przeprowadzonych na trzech modelach powłok wykazują, że moment maksymalny występuje w pobliżu skoku obciążenia [3].

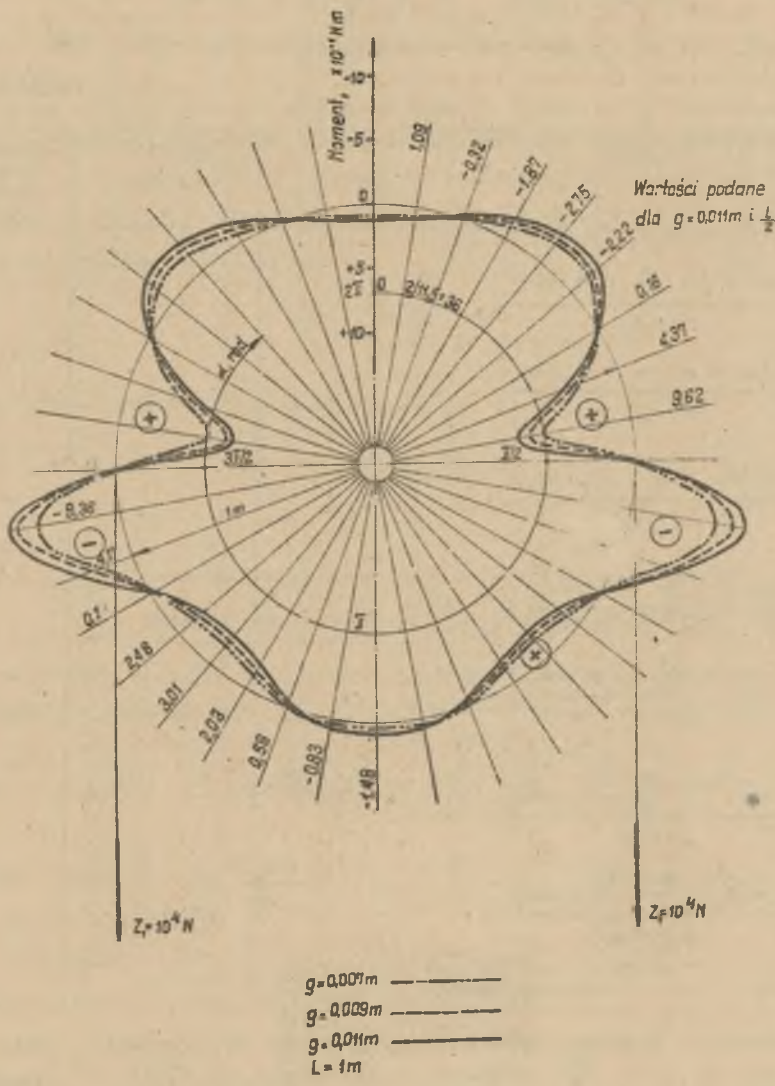
4. Analiza równań określających momenty równoleżnikowe

We wzorach /1/ i /5/ elementy zawarte w nawiasach są iloczynami utworzonymi z wyrazów szeregów: funkcji położenia, przemiennego i trygonometrycznego. Uwaga ta nie dotyczy wyrazu pierwszego zawartego w nawiasie.

Funkcja położenia $\Phi_n/\frac{1}{2}/$ jest szybko zbieżna do jedności i dla $n > 13$ jest prawie stała, tak że dla celów praktycznych wystarczy w obliczeniach uwzględnić wyrazy do indeksu n = 13, [7].

Ciąg wyrazów szeregu przemiennego

$$- \frac{1}{22,62} + \frac{1}{117,58} - \frac{1}{332,5} + \ldots \frac{1}{/\sqrt{n^2-1}/^3} \sin \frac{\pi n}{2} . \qquad /7/$$



Rys. 3. Rozkład równoleżnikowych momentów 1/

1/ Układ współrzędnych przyjęto skażony

szybko dąży do zera, więc szereg ten jest zbieżny [4] i do obliczeń wytrzymałościowych wystarczy przyjąć wyrazy szeregu /7/ do indeksu n = 13. Wyrazy szeregu trygonometrycznego:

$$\frac{8\cos 3\alpha}{22{,}62} - \frac{24\cos 5\alpha}{117{,}58} + \frac{48\cos 7\alpha}{332{,}5} \ldots \frac{/n^2-1/\cos n\alpha\ /}{/\sqrt{n^2-1}/^3}, \qquad /8/$$

dla kąta $\alpha = /\ \frac{\pi}{2} - d\alpha\ /$ zestawiono w kolumnie pionowej tabl.1.

Tablica 1

Wyrazy szeregu	Znaki cos nα	Znaki wyrazów szeregu /8/
$\frac{8\cos/3\frac{\pi}{2} - 3\,d\alpha/}{22{,}62}$	-	-
$-\frac{24\cos/5\frac{\pi}{2} - 5\,d\alpha/}{117{,}58} = -\frac{24\cos/\frac{\pi}{2} - 5\,d\alpha/}{117{,}58}$	+	-
$\frac{48\cos/7\frac{\pi}{2} - 7\,d\alpha/}{332{,}5} = \frac{48\cos/3\frac{\pi}{2} - 7\,d\alpha/}{332{,}5}$	-	-
$-\frac{80\cos/9\frac{\pi}{2} - 9\,d\alpha/}{715{,}5} = \frac{80\cos/\frac{\pi}{2} - 9\,d\alpha/}{715{,}5}$	+	-
....	....	....
gdzie: $d\alpha$ różniczka kąta α .		

Na rys. 4 przedstawiono wartości wyrazów szeregu /8/, przykładowo dla kąta $\alpha = /\ \frac{\pi}{2} - \frac{0{,}4}{11{,}5}\ /$ rad.

Z wyrazów szeregu /8/, które są jednakowego znaku, można utworzyć sumy cząstkowe. Znaki tych sum zmieniają się w zależności od wartości $n\frac{d\alpha}{2}$:

$$\pi > n\frac{d\alpha}{2} > 0 \qquad \text{znaki ujemne}$$

$$2\pi > n\frac{d\alpha}{2} > \pi \qquad \text{znaki dodatnie}$$

$$3\pi > n\frac{d\alpha}{2} > 2\pi \qquad \text{znaki ujemne}$$

$$4\pi > n\frac{d\alpha}{2} > 3\pi \qquad \text{znaki dodatnie}$$

....

Stąd możemy obliczyć ilość wyrazów S, które będą występować w sumach cząstkowych dodatnich lub ujemnych szeregu trygonometrycznego/8 /.

$$S = \frac{\pi}{d\alpha}. \qquad /9/$$

Dla pierwszej sumy cząstkowej

$$S = \frac{n_k - 1}{2}; \qquad /10/$$

a dla następnych sum cząstkowych

$$S = \frac{n_k - n_{kp}}{2}, \qquad /11/$$

gdzie:

n_k - ostatni wyraz występujący w sumie cząstkowej i,

n_{kp}- ostatni wyraz występujący w sumie cząstkowej i-1.

W sumach cząstkowych, oprócz pierwszej, istnieje maksymalna wartość bezwzględna licznika wyrazu, którą można wyznaczyć z warunków:

$$\cos /n_m \cdot \frac{\pi}{2} - n_m \cdot \frac{d\alpha}{2}/ = \cos /\frac{3}{2}\pi - n_m \cdot \frac{d\alpha}{2}/ \approx \cos\pi = -1; \qquad /12/$$

$$\cos /n_m \cdot \frac{\pi}{2} - n_m \cdot \frac{d\alpha}{2}/ = \cos /\frac{\pi}{2} - n_m \cdot \frac{d\alpha}{2}/ \approx \cos 0 \approx 1,$$

gdzie:

n_m - oznacza wyraz spełniający warunek

$$n_m \cdot \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{\pi}{2}. \qquad /13/$$

Z równań /9/ i /13/ wynika:

$$n_m \approx kS \qquad /14/$$

k = 0, 3, 5, 7, 9 ....
Wyrazy szeregu 0,3,5,7,9 .....oznaczają kolejne sumy cząstkowe.

Podstawiając /14/ do /12/

$$\cos / kS \frac{\pi}{2} - kS \frac{d\alpha}{2} / = |1|,$$

a następnie wyrazy szeregu o maksymalnych wartościach licznika

$$\frac{[/kS/^2-1] \cdot \cos /kS \frac{\pi}{2} - kS \cdot \frac{d\alpha}{2} /}{\left[\sqrt{/kS/^2 - 1}\right]^3} = \frac{[/kS/^2 - 1] \cdot |1|}{\left[\sqrt{/kS/^2 - 1}\right]^3} . \qquad /15/$$

Dla $S > 10$ można przyjąć $/ kS/^2$ zamiast $/kS/^2 - 1$, a wówczas wyrażenie /15/ przyjmie postać

$$\frac{\cos / kS \frac{\pi}{2} - kS \frac{d\alpha}{2} /}{kS} = \frac{|1|}{kS} \qquad /16/$$

Wyrazy o maksymalnych licznikach występujące w sumach cząstkowych tworzą szereg przemienny:

$$- \frac{1}{S} + \frac{1}{3S} - \frac{1}{5S} + \frac{1}{7S} - \dots \frac{1}{nS} / - \sin \frac{\pi \cdot n}{2} /. \qquad /17/$$

Sumy cząstkowe szeregu /8/ tworzą również szereg przemienny

$$\sum_{n=3}^{2S+1} \frac{\cos / n \frac{\pi}{2} - n \frac{\pi}{2S} /}{n} / -\sin \frac{\pi n}{2} / + \sum_{2S+3}^{4S+1} \frac{\cos / n \frac{\pi}{2} - n \frac{\pi}{2S} /}{n} \cdot$$

$$\cdot /-\sin \frac{\pi n}{2} / + \sum_{4S+3}^{6S+1} \frac{\cos / n \frac{\pi}{2} - n \frac{\pi}{2S} /}{n} / - \sin \frac{\pi n}{2} / + \dots \qquad /18/$$

Szereg /18/ jest zbieżny, ponieważ jego wyrazy maleją /4/.
Pierwsze cztery wyrazy szeregu /18/ obliczono dla przykładu podanego na rys. 4, tj. przy $S = 90$:

$$- 0,9085 + 0,2180 - 0,1286 + 0,0914 \dots$$

Obliczono również pierwsze sumy cząstkowe przy różnych ilościach wyrazów S.

S	Wartości pierwszych sum
90	-0,908 524
180	-0,917 244
360	-0,921 605
2000	-0,925 183
4000	-0,925 575
8000	-0,925 772

Obliczenie pierwszych sum cząstkowych wykonano przy zastosowaniu maszyny cyfrowej.

Zwiększając dwukrotnie ilość wyrazów S, otrzymano około dwukrotnie mniejszy przyrost wartości pierwszych sum cząstkowych.
Licząc w ten sposób, dla ilości wyrazów S wynoszącej milion otrzymano wartość - 0,926. Dalsze zwiększenie ilości wyrazów S daje przyrosty sum cząstkowych dążące do zera.
Jeżeli w równaniu /9/

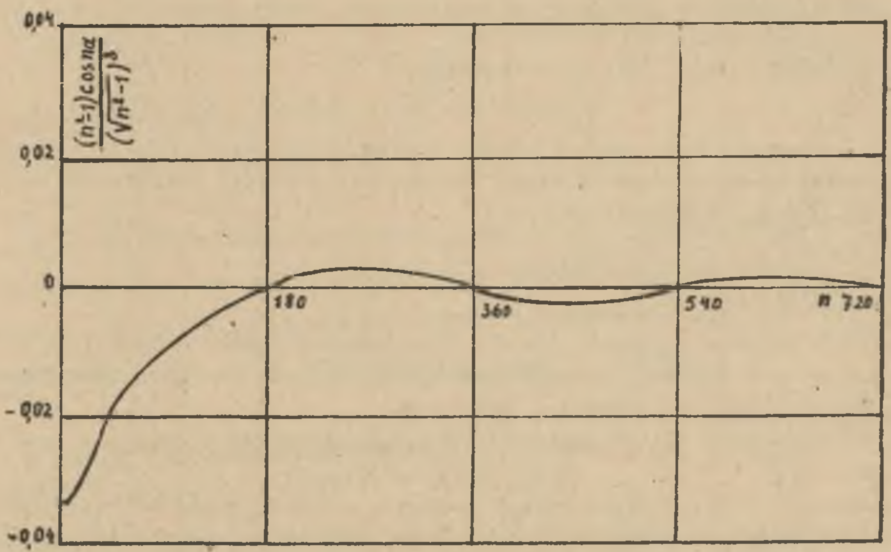
$$S = \frac{\pi}{d\alpha}; \qquad d\alpha \longrightarrow 0,$$

to

$$S \longrightarrow \infty$$

i wówczas granicą szeregów /8/ i /18/ jest pierwsza suma cząstkowa

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos/\, n\frac{\pi}{2} - n\frac{d\alpha}{2}/}{n} /-\sin\frac{\pi n}{2}/ = -0,926. \qquad /19/$$



Rys. 4. Wyrazy szeregu /8/ $\alpha = /\frac{\pi}{2} - \frac{0,4}{11,5}/$ rad

5. Maksymalny moment równoleżnikowy

Z rozważań w pkt. 4 wynika, że położenie maksymalnego momentu jest w odległości dowolnie małej od kąta $\pi/2$ rad, oczywiście jeśli przy tym kącie występuje skok obciążenia. W rzeczywistości położenie maksymalnego momentu jest oddalone o około 0,4/11,5 rad od kąta $\pi/2$ rad.

Wprowadzając wartość - 0,926 do równania /5/, określenie maksymalnego momentu przyjmuje postać:.

$$M\left/\tfrac{1}{2},\alpha\right/ = -0{,}132 \cdot z\sqrt{\frac{\varepsilon}{R}}\Bigg[0{,}00916 \,.\, 1^3\sqrt{\frac{\varepsilon}{R}} \,.\, \cos\alpha - \frac{1}{22{,}62} \,.\, \Phi 3\left/\tfrac{1}{2}\right/ + \frac{1}{117{,}58} \,.\, \Phi 5\left/\tfrac{1}{2}\right/ - \frac{1}{332{,}5} \,.\, \Phi 7\left/\tfrac{1}{2}\right/ + \frac{1}{719{,}9} \,.\, \Phi 9\left/\tfrac{1}{2}\right/ - \frac{1}{1313} \,.\, \Phi 11\left/\tfrac{1}{2}\right/ - 0{,}926\Bigg]. \qquad /20/$$

Podobnie upraszcza się równanie /1/.

Liczbę 0,926 otrzymano zakładając, że wartości pierwszych pięciu wyrazów funkcji położenia są równe jedności. Dla kąta / $\pi/2-d\alpha$ / rad, gdzie $d\alpha \rightarrow 0$, przyjęte uproszczenie jest bez znaczenia praktycznego. Natomiast dla $d\alpha = 0{,}4/11{,}5$ rad wymienione uproszczenie można pominąć, wprowadzając pierwsze wyrazy funkcji trygonometrycznej w równanie /20/ i jednocześnie zmniejszając liczbę 0,926, o wartość tych wyrazów.

$$M\left/\tfrac{1}{2},\alpha\right/ = -0{,}132\, z_1\sqrt{\frac{\varepsilon}{R}}\Bigg[0{,}00916\; 1^3\sqrt{\frac{\varepsilon}{R}} \,.\, \cos\alpha - \frac{1+8\cos\alpha}{22{,}62}\Phi 3\left/\tfrac{1}{2}\right/ + \frac{1-24\cos 5\alpha}{117{,}58} \,.\, \Phi 5\left/\tfrac{1}{2}\right/ - \frac{1+48\cos 7\alpha}{332{,}5} \,.\, \Phi 7\left/\tfrac{1}{2}\right/ + \frac{1-80\cos 9\alpha}{719{,}9}\,\Phi 9\left/\tfrac{1}{2}\right/ - \frac{1+120\cos 11\alpha}{1313} \,.\, \Phi 11\left/\tfrac{1}{2}\right/ - 0{,}751\Bigg]. \qquad /21/$$

W równaniu /21/ wartość -0,751 otrzymano odejmując od liczby -0,926 pięć pierwszych wyrazów szeregu trygonometrycznego, obliczonych dla kąta / $(\pi/2 - 0{,}4/11{,}5)$ rad.

6. Wnioski

Korzystając z wyrażeń / 20/ i /21/ można w sposób prosty, bez stosowania maszyny cyfrowej wyznaczyć maksymalny moment równoleżnikowy w powłoce wielolinowego koła pędnego, przy czym:

1. Równanie /20/ określa moment w oddaleniu dowolnie bliskim od kąta $\pi/2$ rad.
2. Równanie / 21/ określa moment oddalony o 0,4/11,5 rad od kąta $\pi/2$ rad.

Różnica między wynikami otrzymanymi przy korzystaniu z równań /20/ i /21/ mieści się w przedziale 4 - 8 % i wartość wypada większa w przypadku pierwszym.

LITERATURA

[1] Antoniak J., Dembnicki S.: Badania ugięć promieniowych płaszcza modelu bębna. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Górnictwo, Zeszyt 7, 1963

[2] Antoniak J., Koszelski J.: Równoleżnikowe naprężenia błonowe w powłoce wielolinowego koła pędnego w aspekcie badań modelowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Górnictwo, Zeszyt 72, 1976

[3] Koszelski J.: Badania stanu naprężenia powłoki walcowej wielolinowego koła pędnego maszyny wyciągowej. Praca Doktorska, Główny Instytut Górnictwa, Katowice 1973

[4] Pogorzelski W.: Analiza matematyczna tom 1. SWO Warszawa, 1951

[5] Popowicz O.: Beitrag zu den Festigkeitproblemen der Trommeln und Seilträger im Bergbau. Freiberger Forschungshefte 1961

[6] Popowicz O.: Problemy wytrzymałości powłokowej bębnów i kół pędnych. Materiały na Konferencję Naukowo Techniczną 1963 Wyd. Politechniki Śląskiej.

[7] Popowicz O.: Maszyny wyciągowe, bębny i koła pędne, Politechnika Śląska. Gliwice 1964

[8] Prace magisterskie Katedry Maszyn Górniczych Politechniki Śląskiej Gliwice.

Анализ расчета максимального момента в покрытии многоканатного приводного шкива.

В статье проведен анализ уравнения определяющего распределение параллельных моментов на округе покрытия многоканатного приводного шкива. Результатом этого анализа является уравнение, благодаря которому очень просто можно вычислять максимальный момент.

ANALYSIS OF CALCULATION OF THE MAXIMUM MOMENT IN THE COATING OF A MULTIROPE DRIVING SHEAVE

The analysis of an equation determining the distribution of parallel moments around the circumference of the coating of the multirope driving sheave was made.
This equation may be used for a simple calculation of the maximum moment.