

LUDWIK FÜLLER

UPROSZCZONA METODA POMIARÓW DYNAMICZNYCH
W KOLACH ZĘBATYCH

W pracy uzasadniono liczbowo możliwość zastąpienia pomiarów ugięć zębów metodami tensometrycznymi pomiarami przyspieszeń drgań kół. Badania doświadczalne potwierdziły przydatność tej metody badań.

Na skutek wielu przyczyn podczas pracy kół zębatych występują drgania powodujące chwilowe zmiany siły międzyzębnej, nawet w przypadku, gdy zewnętrzne obciążenie przekładni jest stałe. Częstotliwość zmian siły zależna jest od prędkości obrotowej. Orientacyjnie można przyjąć [L. V], że przy prędkości obwodowej

$$v = \frac{800}{z_1} \quad \text{m/s} \quad /1/$$

gdzie z_1 - liczba zębów w zębniku, częstotliwość zazębienia równa jest częstotliwości własnej. Tak więc w przekładniach wolnobieźnych na jedno zazębienie przypada kilka zmian obciążenia, a w przekładniach szybkobieźnych sytuacja jest odwrotna. Drgania mają złożony charakter, tylko w sporadycznych przypadkach zbliżone są do harmonicznych.

W czasie drgań siły zmienia się także miejsce jej przyłożenia, co znacznie utrudnia wyznaczenie najbardziej krytycznej chwili.

1/ W przypadku obliczania naprężeń u podstawy zęba przyjmuje się zgodnie z doświadczeniami prowadzonymi przy bardzo małych prędkościach, że najwyższe naprężenie u podstawy występuje w zewnętrznym punkcie jednoparowego zazębienia. W przypadku zmiennej w czasie siły maksymalne naprężenie może pojawić się wcześniej, pomimo mniejszego ramienia działania.

2/ W przypadku obliczania nacisków międzyzębnych przyjmuje się dwa punkty obliczeniowe: dla zębniaka wewnętrzny punkt współpracy jednoparowej, dla koła punkt toczny. Oscylacje siły międzyzębnej spowodują także w tym przypadku przesunięcie ekstremalnych nacisków.

3/ Podobne trudności występują w przypadku zacierania zębów, gdy do obliczeń przyjmuje się warunki panujące na głowie zęba.

Teoretycznie można sobie wyobrazić, że na podstawie pomiaru naprężeń u podstawy zęba i znajomości ramienia działania siły można wyliczyć jej wielkość w każdym położeniu i odpowiednio do potrzeb określić wartość w punkcie tocznym względnie na wierzchołku.

Praktycznie jednak występują znaczne trudności ze względu na małą dokładność oceny potrzebnych w takich obliczeniach parametrów.

Jeszcze większe trudności występują w przypadku kół o zębach śrubowych, między innymi dlatego, że tensometry naklejone u podstawy zęba śrubowego wchodzą do pracy w różnych fazach zazębienia.

Dodatkowe odkształcenia zębniaka i wałów powodują tak duże zmiany rozkładów naprężeń, że najczęściej uzyskane przy takich pomiarach wyniki są nie do przyjęcia.

Biorąc pod uwagę:

- 1/ trudności pomiarów tensometrycznych i stosunkowo małą ich dokładność przy stopie zęba,
- 2/ trudności wyliczenia wielkości miarodajnych dla pittingu i zatarcia,
- 3/ dodatkowe trudności wynikające z losowego charakteru zjawisk z uwagi na odchyłki wykonawcze,

stosowano równolegle drugi sposób pomiaru znacznie łatwiejszy w zastosowaniu i interpretacji. Polegał on na pomiarze przyspieszeń drgań, które są oczywiście pewnym odbiciem odkształceń.

Metoda pomiaru momentu dynamicznego

Metody tensometryczne / oporowe, indukcyjnościowe czy pojemnościowe/ pozwalają na badanie określonego zęba w poszczególnych fazach zazębienia. Jest to niewątpliwie najbardziej obiecujący sposób badania zębów, chociaż, jak się okazało w praktyce, nie zawsze dający pożądane rezultaty. Proponowana metoda pomiaru momentu dynamicznego nie daje możliwości śledzenia obciążenia w różnych fazach zazębienia, pozwala natomiast bardzo prosto określić wartości szczytowe obciążenia stanowiące najczęściej podstawę obliczeń wytrzymałościowych.

Tak więc, chociaż teoretycznie metoda ta nie może zastąpić analizy stanu naprężeń w poszczególnych zębach, to jednak w wielu przypadkach, szczególnie w kołach o zębach śrubowych, daje chwilowe lepsze rezultaty niż pozornie dokładniejsza metoda tensometryczna.

Zasada metody dynamicznej

Poszukiwany współczynnik dynamiczności określa się następująco:

$$K_d = \frac{M_{st} + M_{dyn}}{M_{st}} = 1 + \frac{M_{dyn}}{M_{st}} \quad /2/$$

gdzie: M_{st} - moment statyczny przenoszony przez przekładnię,

M_{dyn} - moment dynamiczny obliczany z zależności

$$M_{dyn} = J\varepsilon \quad /3/$$

J - masowy moment bezwładności koła,

ε - przyspieszenie kątowe badanego koła.

Tak więc badanie sprowadza się do wyznaczenia wartości przyspieszenia kąowego drgań koła, którego moment bezwładności jest znany.

Warunkiem poprawności stosowania wzoru /3/ jest takie zamontowanie przekładni, aby towarzyszące przyspieszeniom kątowym odkształcenia wału były pomijalne z odkształceniami wywołanymi momentem M_{st} . Oznacza to, że dynamiczny kąt skręcenia musi być pomijalnie mały w porównaniu ze statycznym kątem skręcenia. Konieczne jest więc stosowanie wałów skrętnych względnie rachunkowe wprowadzanie poprawek.

Przyspieszenie kątowe wylicza się na podstawie znajomości promienia osadzenia czujnika przyspieszeń liniowych. Do pomiaru takich przyspieszeń nadają się najlepiej przetworniki piezoelektryczne. Teoretycznie należy stosować dwa przetworniki rozmieszczone co 180° . Sumując napięcia wytworzone przez czujniki, uzyskuje się dwukrotne zwiększenie sygnału pochodzącego od skręcania, przy jednoczesnym zmniejszeniu sygnału pochodzącego od zginania wału. W badaniach pilotujących, względnie w przypadku dużej sztywności wałów na zginanie, wystarczy stosować jeden czujnik.

Zestaw aparatury do pomiaru przyspieszeń skrętnych

Czujniki drgań

Do pomiaru przyspieszeń stycznych / obwodowych/ nadają się najlepiej przetworniki piezoelektryczne. Przenoszą one bowiem dostatecznie szerokie pasmo drgań i mają dużą skuteczność napięciową, co znacznie ułatwia prowadzenie pomiarów. Wybór czujnika zależy od zakresu spodziewanych częstotliwości drgań. Dolna granica przenoszenia zależy od oporności wejściowej przedwzmacniacza. W kołach zębatych nie stanowi ona problemu i dlatego nie będzie bliżej omawiana. Z łatwością można uzyskać dolną granicę poniżej częstotliwości obrotów koła f_n .

Górna granica przenoszenia uzależniona jest od konstrukcji czujnika i musi być dobrana odpowiednio do spodziewanych częstotliwości drgań. Wystarczy tak dobrać szerokość pasma, aby obejmowała jeszcze szóstą harmoniczną częstotliwość zazębiania f_z , tj. wg równania

$$f_G \gg 6 f_z = \frac{n_1 z_1}{10} \quad /4/$$

Oczywiście częstotliwość rezonansowa czujnika musi być znacznie wyższa od górnej granicy pasma. Metryki przetworników zawierają dane dotyczące zarówno górnej granicy przenoszenia jak też częstotliwości własnej czujnika

Przez odpowiedni dobór filtrów można w przypadkach granicznych wyeliminować wpływ częstotliwości własnej czujnika.

Wzmacniacze

Do przetworników piezoelektrycznych stosuje się najczęściej specjalnie przystosowane wzmacniacze o bardzo dużej oporności wejściowej.

W przypadku, gdy zachodzi potrzeba budowy wzmacniacza we własnym zakresie, konieczne jest uzyskanie oporności wejściowej R_{we} spełniającej zależność

$$R_{we} \gg \frac{1}{Cf_d} \quad /5/$$

Tak np. w przypadku gdy czujnik posiada pojemność $C = 1 \text{ nF}$, i ma przenosić sygnały do częstotliwości dolnej $f_d = 1 \text{ Hz}$, oporność wejściowa wzmacniacza R_{we} , jak wynika z wzoru /5/, musi być większa od 10^9 omów.

Wzmacniacz sumujący

W przypadku stosowania dwóch czujników drgań sumuje się sygnały zwykle po wstępnym wzmocnieniu, co nie stawia wysokich wymagań odnośnie oporności wejściowej wzmacniacza sumującego.

Miernik drgań

Jako miernik drgań może być użyty woltomierz wartości szczytowych, lub wartości skutecznych. Zwykle woltomierze reagujące na wartość średnią, cechowane w wartościach skutecznych, nadają się tylko dla sygnałów harmonicznym i nie powinny być stosowane w tego rodzaju badaniach.

Analizator amplitudowo-częstotliwościowy

Dla zweryfikowania uzyskanych rezultatów i kontroli pomiarów konieczne jest przynajmniej sporadyczne prowadzenie analizy amplitudowo-częstotliwościowej. Pozwala to nie tylko na wysnucie dodatkowych wniosków odnośnie otrzymanego sygnału, ale też ułatwia wykrycie ewentualnych zakłóceń. Analizę należy prowadzić od f_n do 20 kHz.

Oscyloskop

Wskazane jest równoczesne obserwowanie na oscyloskopie przebiegu sygnału. Chodzi w tym przypadku o wykrycie ewentualnych usterek w przesyłaniu sygnału wywołanych brakiem kontaktu lub zwarciami.

Łatwo także można zauważyć pojawienie się zakłóceń sieciowych.

Uzasadnienie metody badań

Jakościowe uzasadnienie metody przedstawiono w [L.2], liczne prace eksperymentalne prowadzono równoległe dwoma sposobami oceny dynamiki potwierdzały również jakościowo zgodność wyników [L.3, L.4]. Obecnie po opracowaniu nowego modelu dynamicznego kół zębatych [L.5] można było przeprowadzić analityczne badania korelacji wyników uzyskanych za pomocą obu metod pomiarowych.

Dla wygody obliczeń układ równań opisujących drgania kół zębatach wprowadzono do przypadku drgań linowych bryły o masie M wspierającej się na sprężynach o sztywności c . Liczba sprężyn podpierających bryłę obciążoną siłą P zmienia się stosownie do liczby zębów w zazębieniu. Wywołuje to drgania środka ciężkości bryły wg równania [L.6]

$$\ddot{x} + 2 \varphi \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 u = \frac{P}{M} = A \quad /6/$$

gdzie:

$\ddot{x}' = a$ - przyspieszeniu drgań,

$\dot{x} = v$ - prędkość drgań

u - jest sumą ugięć sprężyn będących aktualnie w kontakcie z zarysem bryły.

W przypadku zębów modyfikowanych lub obarczonych odchyłkami zarysu lub podziału obowiązują następujące zależności wiążące przemieszczenie x z wielkością sumarycznego ugięcia u .

$$u = u_1 + u_2$$

$$u_1 = x - \Delta x_{11} \geq 0$$

$$u_2 = x - \Delta x_{12} \geq 0$$

/7/

gdzie oprócz poprzednio podanych oznaczeń

Δx_{11} - głębokość modyfikacji lub odchyłka zarysu w miejscu kontaktu ze sprężyną 1, / zębem 1/,

Δx_{12} - głębokość modyfikacji lub odchyłka zarysu w miejscu kontaktu ze sprężyną 2 oddaloną σ podziałkę p_0 ,

$i = 1, 2, 3 \dots$ kolejne położenie sprężyny w stosunku do krawędzi bryły / od chwili wejścia w kontakt/.

Przeprowadzono bardzo szerokie badania numeryczne za pomocą kieszonkowego kalkulatora programowanego MP-29C. Niektóre wyniki obliczeń konfrontowano z wynikami uzyskanymi za pomocą maszyny matematycznej ODRA. Opis sposobu postępowania i pewne rezultaty obliczeń podano w [L.6].

W dalszej części podane będą częściowe wyniki badań przekładni o zębach śrubowych, której parametry opisane za pomocą równania /6/ zmieniały się następująco:

Zewnętrzne obciążenie $A = 7000$ było wielkością stałą w czasie badań, prędkość kątowna ω_0 w przypadku zazębienia o najmniejszej sztywności wynosiła 15, natomiast w okresie, gdy sztywność osiągała największą wartość, prędkość kątowna wzrastała do 16,5. Odpowiednio do zmiany sztywności w stosunku 1 : 1,21 zmieniała się statyczna strzałka ugięcia zęba wg zależności $x_{st} = A/\omega^2$ od 31,1111 do 25,7116.

Zęby obarczone były błędami podziału o rozkładzie przypadkowym, skrajne wartości odchyłek podziału wynosiły ± 10 , co stanowiło ok. 32 % ugięcia statycznego.

Odchylenie standardowe odchyłek podziału wynosiło $s_x = 5,17$, wartość średnia $\bar{x} = 0$. W obliczeniach wyznaczano:

\bar{a}_{\min} - średnią wartości szczytowych / ujemnych/ przyspieszenia drgań,

\bar{u}_{\max} - średnią wartości szczytowych ugięć zęba 1 lub 2,

$s_{a\min}$ - odchylenie standardowe przyspieszeń ekstremalnych,

$s_{u\max}$ - odchylenie standardowe maksymalnych ugięć,

ρ - współczynnik korelacji / na podstawie ponad 500 prób/
pomiędzy \bar{u}_{\max} oraz \bar{a}_{\min} .

Tablica 1

h	\bar{a}_{\min}	\bar{u}_{\max}	$s_{a\min}$	$s_{u\max}$	ρ	W	W'
0,005	-1539	30,70	1663	7,31	0,93	278	268
0,008	-3505	37,20	2792	11,84	0,97	282	271
0,010	-4724	48,05	1724	6,17	0,54	243	248
0,012	-2385	37,29	1601	4,41	0,71	252	263
0,013	-2148	35,67	1385	3,98	0,72	256	265
0,015	-2158	34,60	1406	3,98	0,88	265	274
0,018	-4613	42,48	1356	4,66	1,00	278	279
0,020	-4053	43,11	1244	2,04	0,85	256	272
0,022	-3119	40,29	998	2,75	0,45	251	258
0,025	-3710	42,52	1249	4,13	0,62	252	256
0,026	-3939	43,48	1294	4,15	0,68	251	257
0,027	-3919	44,15	1226	4,31	0,72	247	250
0,028	-3425	43,66	1153	4,60	0,82	249	240
0,031	-2288	38,65	510	3,67	0,77	240	232

W tablicy 1 zestawiono fragment wyników obliczeń dla kilku prędkości obwodowych kół, charakteryzujących się okresem próbkowania h. Im większy jest okres h, tym mniejsza prędkość obwodowa. Główny rezonans przypada przy $h = 0,020$, natomiast przy $h = 0,027$ występują drgania odpowiadające prędkości $v/v_0 = 2/3$, lub $v/v_0 = 3/4$.

W tej tablicy podano jeszcze wartości dwóch stosunków

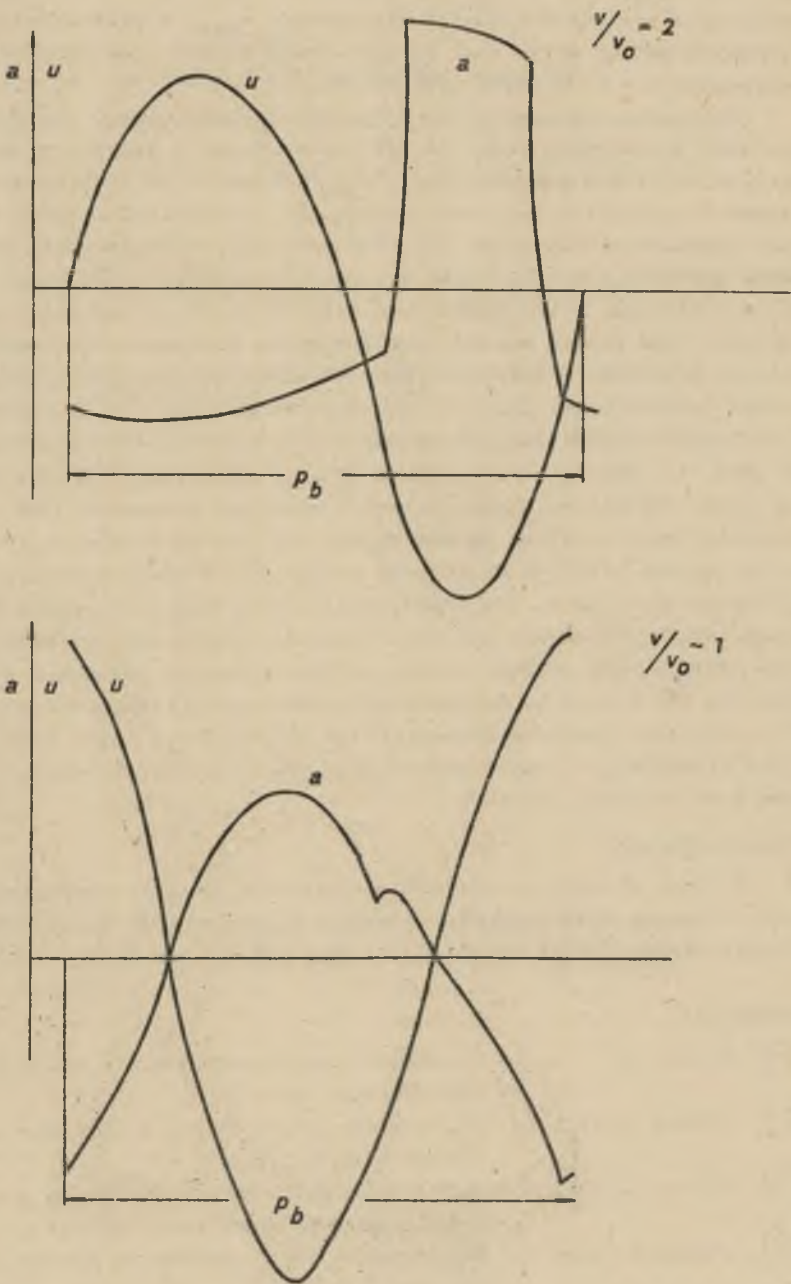
$$W = \frac{-\bar{a}_{\min} + A}{\bar{u}_{\max}} \quad \text{oraz} \quad \frac{-\bar{a}_{\min} + s_{a\min} + A}{\bar{u}_{\max} + s_{u\max}} = W'$$

które wskazują na sposób przeliczenia wartości przyspieszeń na poszukiwane wartości ugięć.

W chwili gdy ugięcie u osiąga maksymalną wartość, prędkość $v = 0$, a równanie /6/ przybiera postać

$$a_{\min} + \omega_0^2 \cdot u_{\max} = A$$

/8/



Rys. 1. Zmiany ugięcia zęba i przyspieszenia drgań na odcinku przyporu, dla dwóch prędkości obwodowych:
 a/ $v/v_0 = 2$, b/ $v/v_0 = 1$

Praktycznie trudność wykorzystania równania /8/ polega na braku informacji odnośnie ω_0 , które zmienia się od 225 do 272 stosownie do liczby zębów będących w przyporze w chwili wystąpienia u_{\max} . W przekładniach o zębach śrubowych zmiany sztywności są stosunkowo małe i stąd przyjęcie wartości pośredniej nie wnosi istotnych błędów.

Nieco mniejsze wartości współczynnika korelacji i większy rozrzut wartości określonych równaniem /8/ stwierdzono w przypadku, gdy mierzono wartość skuteczną przyspieszeń a_{skt} , którą to wartość również można wyliczyć za pomocą kalkulatora. Wynika to z charakteru drgań oraz ograniczeń określonych równaniem /7/. Podczas, gdy przyspieszenia przyjmują zarówno wartości ujemne jak też dodatnie, to zgodnie z równaniem /7/ ugięcia są jednostronne. W przypadku rezonansu charakter zmian obu wielkości jest podobny, stąd wysoka wartość współczynnika korelacji, natomiast dla niektórych prędkości / zwłaszcza ponadkrytycznych / przebieg zmian przyspieszenia jest zupełnie inny niż przebieg zmian ugięć, stąd spadek współczynnika korelacji i dokładności oceny stanu dynamicznego za pomocą równania /8/. Rys. 1/ przedstawia w części dolnej zmiany ugięcia zęba /u/ i przyspieszenia /a/ dla prędkości bliskiej głównego rezonansu, jak widać, obie wielkości mają przebieg bliski sinusoidalnego. Natomiast w górnej części przedstawiono przebieg drgań przy prędkości dwukrotnie przekraczającej prędkość rezonansową. Jak widać, ugięcia mają nadal charakter zbliżony do sinusoidalnego, podczas gdy przyspieszenia zmieniają się zupełnie inaczej. Przy odczytywaniu wykresu należy zwrócić uwagę na położenia osi odczytych dla obu krzywych. W każdym przypadku przyjęto wartość średnią, która dla ugięć jest dodatnia, natomiast dla przyspieszeń równa zero. Rysunek dotyczy przekładni o innych parametrach niż to podano w tablicy 1, dlatego pominięto wartości liczbowe.

Wniosek końcowy

W pracy uzasadniono liczbowo możliwość zastąpienia pomiarów ugięć zębów metodami tensometrycznymi pomiarami przyspieszeń drgań kół. Badania doświadczalne potwierdziły przydatność tej metody postępowania.

LITERATURA

- [1] Müller L.: Przekładnie zębate-obliczenia wytrzymałościowe. WNT-Warszawa 1970
- [2] Müller L. Wilk A.: Pomiar sił dynamicznych w kołach zębatych. PAK nr 7/1971
- [3] Müller L. Wilk A.: Siły dynamiczne w kołach zębatych przy prędkościach rezonansowych. PM nr 2/1971
- [4] Müller L. Skoć A.: Siły dynamiczne w stożkowych kołach zębatych. PM 1978 / w druku/
- [5] Müller L.: Nowy model dynamiczny przekładni walcowej o zębach prostych. PM nr 21/1974
- [6] Müller L.: Dynamika przekładni szybkobieżnych. PM 1978 / w druku/

Упрощенный метод динамических измерений в зубчатых колесах

В статье доказаны количественные возможности замещения измерений изгибов зубьев тензометрическим методом ускорения колеблющихся колес. Опыт подтвердил пригодность этого метода исследований.

A SIMPLIFIED METHOD OF DYNAMIC MEASUREMENTS IN TOOTHED WHEELS

The possibility of replacing the measurements of teeth deflection with tensometric methods of accelerations of wheels vibrations has been justified in the paper. Experimental work ascertained the usability of this investigating method.