ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: GÓRNICTWO z.89 Nr kol.576

JAN ORLACZ

PREDYKCJA WSKAŹNIKÓW TRWAŁOŚCI NIEKTÓRYCH ELEMENTÓW MASZYN GÓRNICZYCH NA PODSTAWIE WYNIKÓW BADAŃ PRZYSPIESZONYCH

Związki pomiędzy parametrami rozkładu uszkodzeń i obciążeń dla pewnej grupy elementów maszyn górniczych podlegają klasycznemu modelowi wykładniczemu [5].
Estymacja parametrów funkcji tego modelu dokonywana jest na podstawie wyników badań przyśpieszonych próbki obciętej.
Modyfikacja formy funkcyjnej modelu pozwala otrzymywać estymatory nieobciążone wskaźników trwałości.
Jako wynik rozważań wyznaczono przykładowo zależności dla współczynników korelacji poszczególnych parametrów modelu wykładniczego także dla czasów poprawnej pracy w eksploatacji niektórych elementów maszyn górniczych.

1. Wprowadzenie

W niektórych badaniach żywotności rozpowszechnione są metody polegające na przeciążaniu badanych elementów. Badania takie nazywane są przyśpieszonymi. Potrzeba tego typu badań wynika w sytuacjach, kiedy oczekiwanie na uszkodzenie w normalnych warunkach eksploatacji byłoby zbyt długie.
W niektórych przypadkach możliwe jest sformułowanie związków pomiędzy parametrami rozkładu uszkodzeń i obciążeń.
Jedną z często stosowanych w praktyce postaci tego związku jest model wykładniczy, np. w zastosowaniu do badań łożysk tocznych, ogniw szybkozłącznych, gwiazd łańcuchowych itp. [4].

Przyjmując wykładniczy model czasu pracy do uszkodzenia, prowadzi się badania dla wybranych poziomów obciążenia.
Przeciętna trwałość T będzie tu proporcjonalna do wykładnika n obciążenia P, gdzie n jest nieznane i musi być wyznaczone.

Model ten został opisany szczegółowo w pracy [6] przy założeniu, że wartość poziomu obciążenia nie wpływa na postać rozkładu trwałości, lecz tylko na wartość jego parametrów. W oparciu o wyniki badań trwałości pod przeciążeniami / P_i/ $i = 1,2..k$, możliwa jest predykcja średniej trwałości /T_e/ pod obciążeniem eksploatacyjnym / P_e/.

2. Postawienie zagadnienia

Z powyższego wynika, że model wykładniczy może być opisany formułą:

$$T_i = c\, P_i^{-n} \qquad /1/$$

dla wszystkich $i = 1,2 \ldots k$, gdzie c - jest stałą proporcjonalności, wyznaczoną na podstawie wyników badań.

Zakłada się, że /k/ wartości / P_i/, przy których prowadzi się badania przyśpieszone, wystarcza do wywołania uszkodzeń.
Dla zapewnienia niezależności poszczególnych prób, wskazany jest wybór /P_{is}/ wg tablicy liczb losowych i przeprowadzenie badań zgodnie z taką sekwencją losową. Jeżeli badaniom poddano / n_i/ elementów pod ustalonym obciążeniem / P_i/ i badanie zostało przerwane po wystąpieniu / r_i/ uszkodzeń, to zgodnie z [1] można wyznaczyć estymatory obciążone i nieobciążone T_i z zależności:

$$\hat{T}_i = \left[\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij} + \left(n_i - r_i\right) t_i \quad r_i\right] \Big/ r_i \qquad /2/$$

gdzie t_{ij}, $j = 1,2 \ldots r_i$, są zaobserwowanymi czasami uszkodzeń.

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa g/ $\hat{T}_i$/ jest opisana równaniem:

$$g/\hat{T}_i/ = \frac{\exp\left(-\, r_i\ \hat{T}_i / T_i\right)}{\Gamma\ /r_i/} \left(r_i/T_i\right)^{r_i} \left(\hat{T}_i\right)^{r_i - 1} \begin{cases} \hat{T}_i > 0 \\ r_i > 1 \end{cases} \qquad /3/$$

Badanie to jest powtarzane dla wszystkich /k/ wartości / P_i/ i na podstawie wyników / $\hat{T}_i$, P_i, n_i, r_i/, $i = 1,2 \ldots k$, wyznaczane są estymatory / T_e/ średniej trwałości pod obciążeniem eksploatacyjnym / P_e/.

3. Estymatory największej wiarygodności

Celem otrzymania estymatorów /n/ i /c/, które są asymptotycznie niezależne, model wykładniczy musi być nieco zmodyfikowany, z pozostawieniem jego podstawowego sensu

$$T_i = C \cdot \left(P_i / P\right)^{-n} \qquad /4/$$

dla wszystkich /i/, gdzie P jest średnią geometryczną z / P_{is}/, tzn.

$$P = \prod_{i=L}^{k} \left(P_i\right)^{r_i} / \sum_{i}^{k} r_i \qquad /5/$$

gdzie jak poprzednio / r_i/ - zaobserwowana liczba uszkodzeń pod obciążeniem / P_i/.

Dla wyjaśnienia należy zaznaczyć, że zmodyfikowany model ma stałą C różną od modelu oryginalnego $C = c \cdot P^n$.

Funkcję wiarygodności dla C i n można napisać [7] jako

$$L/C,n|/ \hat{T} = \prod_{i=1}^{k} \left[\Gamma / r_i\right]^{-1} \left[\frac{r_i}{C}\left(P_i/P\right)^n\right]^{r_i} \hat{T}_i \left(r_i - 1\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{r_i T_i}{C}\left(P_i/P\right)^n\right] \qquad /6/$$

Estymatorami największej wiarygodności dla N i C będą odpowiednio $\hat{n}$ i $\hat{C}$ otrzymane dla maksimum log. L. Rozwiązanie zadania zostało podane w pracy [2], stąd:

$$\hat{C} = \frac{\sum^{k} r_i \hat{T}_i \left(P_i \; P\right)^{\hat{n}}}{\sum^{k} r_i} \qquad /7/$$

a wariancja i kowariancja dla $\hat{N}$ i $\hat{C}$ będą

$$V_{ar} \hat{n} = \sigma_n^2 = \left[\sum^{k} r_i \left(\log P_i/P\right)^2\right]^{-1}$$

$$V_{ar} \hat{C} = \sigma_c^2 = c^2\left(\sum^{k} r_i\right)^{-1} \qquad /8/$$

$$C_{oV} \hat{n} = C_{oV} \hat{C} = 0$$

Otrzymane tą drogą estymatory n i c mają normalne rozkłady gęstości i są zmiennymi niezależnymi.

3. Wnioskowanie o przeciętnej trwałości w warunkach eksploatacyjnych

Estymatorem średniej trwałości pod obciążeniem eksploatacyjnym /P_e/ będzie:

$$T_e = \hat{C} \cdot \left(/ P_e/P\right)^{-n} \qquad /9/$$

Nawiązując do poprzedniego rozdziału, można napisać dla dużych liczb /k/: $\hat{C} \sim N/C, \sigma^2/$ i $\hat{P} \sim N/n, \sigma_n^2/$, gdzie N - symbolizuje przybliżenie rozkładu normalnego.

Oznaczając $P_e/P = I_e$ i $I_e^{\hat{n}} = Y_e$ oraz $K_e = \log I_e$, można napisać dla danej wartości /P_e/, że:

$$K_e\ \hat{n} \sim N\left[K_e\, n,\ \left(K_e\, \sigma_n\right)^2\right] \qquad /10/$$

$$Y_e \sim \Lambda\left[K_e\, n,\ \left(K_e\, \sigma_n\right)^2\right]$$

gdzie Λ symbolizuje przybliżenie rozkładem lognormalnym.
Wykazano [7], że:

$$E/\,Y_e^{-1}/ = \exp\left[\frac{1}{2}\left(K_e\, \sigma_n\right)^2 - K_e \cdot n\right] \qquad /11/$$

Ponieważ $\hat{n}$ i $\hat{C}$ są zmiennymi niezależnymi, to

$$E\left(\bar{T}_e\right) \approx C\left(P_e/P\right)^{-n} \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma_n^2\left[\log\left(P_e/P\right)\right]^2\right\} \qquad /12/$$

Czas $\bar{T}_e$ jest estymatorem obciążonym, natomiast etymatorem nieobciążonym będzie [3] dla dużych liczb /k/

$$\hat{T}_e = \hat{C}\left(P_e/P\right)^{n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_n^2\left[\log\left(P_e/P\right)\right]^2\right\} \qquad /13/$$

oraz wariancja

$$V_{ar}\,/\,\hat{T}_e/ = \left(T_e/T\right)^{-2n}\left[\left(\sigma_c^2 + C^2\right)\exp\left\{\sigma_n^2\left[\log\left(P_e/P\right)\right]^2\right\} - C^2\right] \qquad /14/$$

Estymator / 14/ otrzymuje się, podstawiając za n i C odpowiednio $\hat{n}$ i $\hat{C}$.

3.1. Przybliżone przedziały ufności dla przeciętnej trwałości eksploatacyjnej

Przedziały ufności dla T_e można zbudować, zakładając, że estymatory mają rozkład normalny. Dla liczebnie dużych próbek, dopuszczalnymi są następujące przybliżenia [3].

$$E\left[\frac{\partial^2 \log L\,/\,T_e,\, n/}{\partial n^2}\right] = \sum r_i \log^2\left(P_i\,/\,P_e\right) \qquad /15/$$

$$E\left[\frac{\partial^2 \log L\,/\,T_e,\, n/}{\partial T_e^2}\right] = \sum r_i\,/\,T_e^2$$

$$E\left[\frac{\partial^2 \log L\,/\,T_e,\, n/}{\partial n \cdot \partial T_e}\right] = -\sum\left(r_i/\,T_e\right)\log\left(P_i/P_e\right)$$

Poziom ufności dla T_e może być dobierany zgodnie z ogólnie przyjętymi zasadami.
Wartości współczynników korelacji r/n/, r/c/ i $r/T_e/$ mogą być wyznaczone [7] z zależności:

$$r/n/ = \frac{1}{J} \prod_{i=1}^{k} \Gamma^{-1} /r_i/ \left[\frac{r_i}{\hat{c}\,/n/} \left(P_i/P\right)^{n} \right]^{r_i} \cdot$$

$$/\hat{T}_i/^{\,r_i - 1} \exp \left[- \frac{r_i \hat{T}_i}{\hat{c}\,/n/} \left(P_i/P\right)^{n} \right]$$

$$r/c/ = \frac{1}{J} \prod_{i=1}^{k} \Gamma^{-1} /r_i/ \left[\frac{r_i}{c} \left(P_i/P\right)^{\hat{n}/c/} \right]^{r_i} \cdot$$

$$/\hat{T}_i/^{\,r_i - 1} \exp \left[- \frac{r_i \hat{T}_i}{c} \left(P_i/P\right)^{\hat{n}/c/} \right]$$

$$r/T_e/ = \frac{1}{J} \prod_{i=1}^{k} \Gamma^{-1} /r_i/ \left[\frac{r_i}{T_e} \left(P_i/P\right)^{\hat{n}/T_e/} \right]^{r_i} \cdot$$

$$/T_e/^{\,r_i - 1} \exp \left[- \frac{r_i \hat{T}_i}{T_i} \left(P_i/P\right)^{\hat{n}/T_e/} \right]$$

Ilustrację tych zależności przedstawiono na rys. 1 do 3.

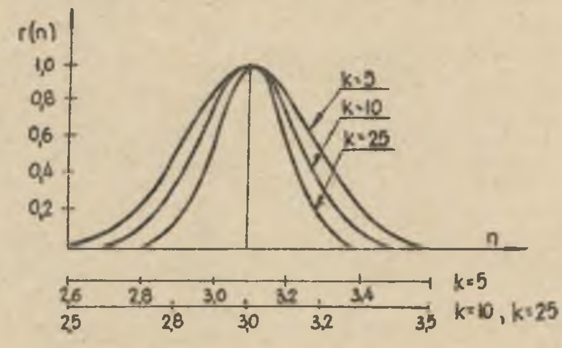
4. Podsumowanie

Z równań /16/ i wykresów (Rys. 1 do 2) wynika, że w miarę wzrostu /k/ poprawia się ich symetria i maleje szerokość.
Skala rzędnych na wykresach jest różna, o ile dla r /n/ osiąga maksimum n = 3,01 dla k = 5, to n = 3,0 dla k = 10 i k = 25.

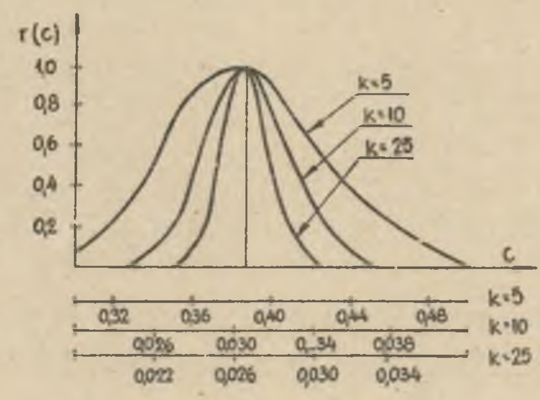
Podobnie zmiana skali odciętych na wykresie r/c/ potwierdza wyraźnie tę prawidłowość.

Jak wspomniano w p. 3, estymatory / n/ i / c/ mogą być wykorzystane do predykcji / T_e/ przy innych wartościach / P_e/ / $e \neq i$ /.
Zależność taką przedstawia Rys. 3. dla $P_e = 7$, dając r /T_e/ = 1 przy T_e = 2,5 i 4 dla k = 5 i T_e = 2,5 i 3,6 przy k = 25.

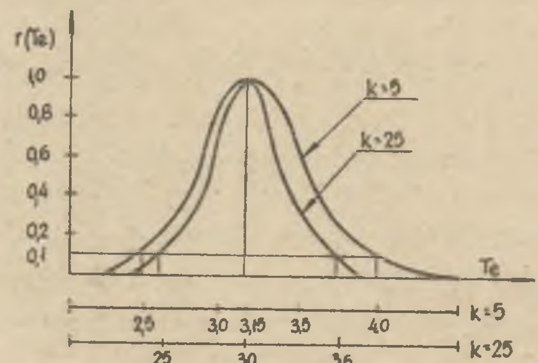
Ponieważ wykres r / T_e/ dla k = 25 jest symetryczny, to przedział ufności dla / T_e/ można otrzymać drogą normalnej aproksymacji.



Rys. 1. Zmiana współczynnika korelacji dla wskaźnika przeciążenia /przyśpieszenia/ n



Rys. 2. Zmiana współczynnika korelacji stałej C



Rys. 3. Zmiana współczynnika korelacji trwałości eksploatacyjnej T_e

LITERATURA

[1] Epstein B., Sobel M.: Some Theorems Relevant to Life Testing from an Exponential Distribution. Annals of Mathematical Statisties No 2/1954

[2] Hildebrand F.: Introduction to Numerical Analysis Mc Graw - - Hill Book CO, New York 1956

[3] Hudson D.J.: Interval Estimation from the Likolihood Function. Technical Hcmorandum BTL Inc. Holmdel. New Jersey / 1968

[4] KOMAG Gliwice Podniesienie niezawodności i trwałości eksploatacyjnej przenośników zgrzebłowych produkowanych seryjnie nr 3641. Praca nie publik. Gliwice 1976

[5] Orlacz J.E.: Zastosowanie Badań Przyśpieszonych do Oceny Niezawodności Maszyn Górniczych. Zeszyty Nauk. Polit. Sl. Gliwice Górnictwo Z.78/1977

[6] Pieruschka E.: Principles ot Reliability. Prentice - Holl Inc. Englewood Cliffs, New York /1963.

[7] Sprott D.A.: Kalbfleisch J.D.: Examples of Likelihoods and Comparison with Point Estimates ard Large Sample Approximations. Journal of the American Statistical Association No 326/1969

Прогнозирование показателей прочности, некоторых элементов горных машин на основе результатов ускоренных исследований

Связи между параметрами распределения повреждений и нагрузок для определенной группы элементов горных машин, характеризуются классической экспоненциальной моделью 5 . оценка параметров функции этой модели проводится на основании результатов ускоренных исследований отрезанного образца. Модифицирование функциональной формы модели дает возможность получать несмещенные оценки показателей прочности. Результатом рассуждений была основанная на примерах зависимость коэффициента корреляции соответствующих параметров экспоненциальной модели , также для времени правильной работы в эксплуатации некоторых деталей горных машин.

A PREDICTION OF DURABILITY INDICES OF SOME MINING MACHINE ELEMENTS ON THE BASIS OF THE RESULTS OF ACCELERATED STUDIES

The relations between the parameters of failures and loads distribution for certain groups of mining machines elements are subject to the classical exponential model 5. The estimation of the parameters of the function of this model is made on the basis of the results of accelerated studies of a cut sample. A modification of the form of the function model permits obtaining unloaded estimates of the durability indices. As a result of the considerations the dependances for the correlation coefficients of particular parameters of the exponential model have been determined as an example also for the periods of efficient work in the exploitation of some elements of mining machines.