P. 3361/62

MECHANIKA z. 14

CZESŁAW WOŹNIAK

RÓWNANIA AGREGATOWE NIEJEDNORODNYCH ANIZOTROPOWYCH POWŁOK CIENKICH

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYT NAUKOWY Nr 65 — GLIWICE 1962

SPIS TREŚCI

Wstęp 3
1. Geometria powłoki 5
2. Stan odkształcenia 7
3. Stan napięcia 11
4. Wpływ temperatury 15
5. Własności wyprowadzonych równań 17
6. Związki pomiędzy składowymi stanu napięcia i odkształcenia 20
7. Oznaczenia i operacje algebry C_2^+ 23
8. Zapis agregatowy wyprowadzonych równań 25
9. Warunki całkowalności na V_2 29
10. Warunki całkowalności w R_3 33
11. Dodatkowe związki algebraiczne 34
12. Zestawienie i podział równań agregatowych 37
13. Zupełne układy równań 40
14. Związek pomiędzy ujęciem agregatowym a zespolonym . . 45
Uwagi końcowe 47
Literatura 48
Streszczenie 50

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 65

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA w Gliwicach

P. 3361/62

CZESŁAW WOŹNIAK

RÓWNANIA AGREGATOWE NIEJEDNORODNYCH ANIZOTROPOWYCH POWŁOK CIENKICH

PRACA HABILITACYJNA Nr 20

Data otwarcia przewodu habilitacyjnego 5. III. 1962 r.
na Wydziale Mechanicznym Politechniki Śląskiej

GLIWICE 1962

REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Andrzej Grossman

Recenzenci:

Prof. dr STANISŁAW GOŁĄB
(Uniwersytet Jagielloński)

Prof. dr inż. MARIAN JANUSZ
(Politechnika Śląska)

Prof. dr inż. JAN SZMELTER
(Politechnika Łódzka)

Dział Nauki — Sekcja Wydawnictw Naukowych — Politechniki Śląskiej

Oddano do wyk. 22. VI. 1962 r. Zam. 982 G-20 Ark. druk. 3 2/16 Ark. wyd. 3
Papier offsetowy kl. V, 70x100, 70 g Nakład 300+55 Cena zł 3,75

Zakład Produkcji Pomocy Naukowych Politechniki Śląskiej w Gliwicach

WSTĘP

Jednorodne równania liniowej teorii powłok cienkich można podzielić na dwie grupy: każdemu równaniu należącemu do jednej grupy odpowiada w drugiej grupie równanie posiadające tę samą budowę. Własność ta, znana w literaturze przedmiotu pod nazwą analogii statyczno - geometrycznej, została sformułowana przez GOLDENWEJZERa w rozprawie [1] i monografii [2]; dla powłok walcowych SCHAEFER omówił ją w pracy [3]. Analogia statyczno - geometryczna jest typowa nie tylko dla równań teorii powłok; w pracy [4] ROGOZIŃSKI wykazał podobieństwo również pomiędzy równaniami stanu napięcia i odkształcenia klasycznej teorii sprężystości. Analogia formy warunków równowagi do formy warunków nierozdzielności odkształcenia, umożliwiła NOWOŻIŁOWowi wprowadzenie do teorii powłok tzw. sił zespolonych [5]. Przedstawienie zespolone zostało wykorzystane w całym szeregu dalszych opracowań, między innymi przez GOLDENWEJZERa i ŁURIEgo [6], [9], MUSZTARIego [7], KORNECKIEGO [8], CZERNYCHa [10] oraz rozszerzone na połwoki anizotropowe przez VISARIONa i STANESKU [11].

W pracy tej[x)] wykazano, że analogia statyczno - geometryczna nie jest jedyną analogią teorii powłok; oprócz niej istnieje analogia formy dwóch grup równań stanu napięcia oraz równań geometrii odkształcenia wewnętrznego i zewnętrznego powierzchni środkowej powłoki (została ona sformułowana, w nieco innym ujęciu, przez autora w [12]). Własność ta umożliwiła wprowadzenie do teorii powłok wielkości bardziej ogólnych od "sił zespolonych" Nowożiłowa. Są nimi agregaty afinorowe, określone na iloczynie powierzchni środkowej powłoki i dwuwymiarowej przestrzeni Euklidesa formalnie określonej (tj. nie posiadającej znaczenia fizykalnego). Zbiór agregatów zdefiniowano jako algebrę Clifforda drugie-

---

x) Rozprawa niniejsza stanowi rozszerzenie artykułu autora [26].

go rzędu. Ponadto w pracy uogólniono analogię statyczno - geometryczną na równania powłok niejednorodnych i poddanych dowolnemu obciążeniu powierzchniowemu. Wykazano, że geometrycznym analogonem tego obciążenia jest pole tzw. "odkształceń początkowych" powłoki. Przyjęcie takiego pola jest równoznaczne z uwzględnieniem wpływu temperatury na stan odkształcenia i napięcia powłoki. Odpowiednie równania, o ile autorowi wiadomo, były dotychczas wyprowadzone tylko dla niektórych typów powłok jednorodnych przez WŁASOWa [13], PARCUSa [14] i NOWACKIEGO [15].

Rozpatrzono powłoki niejednorodne, anizotropowe, dowolnie obciążone i poddane wpływowi temperatury. Pominięto siły bezwładności (zagadnienie quasi - statyczne) oraz zastosowano uproszczenia teorii Love'a - Kirchhoffa.
Założono ponadto, że

1° każda płaszczyzna styczna do powierzchni równooddalonej od powierzchni środkowej powłoki jest płaszczyzną symetrii sprężystej,

2° anizotropia jest jednowarstwowa (każda warstwa równooddalona od środkowej ma tą samą anizotropię),

3° niejednorodność jest dwuwymiarowa (wielkości fizykalne charakteryzujące materiał są stałe na każdej normalnej do powierzchni środkowej),

4° rozpatrywana jest tylko taka klasa niejednorodności, dla której znane założenia upraszczające powodują odchyłki w granicach dopuszczalnych teorią Love'a - Kirchhoffa.

Wszystkie rozważania przeprowadzono dla dowolnej parametryzacji powierzchni środkowej powłoki. Elementy algebry Clifforda oparto na pracy RASZEWSKIego [16]. Zapis tensorowy stosowano korzystając z monografii GOŁĄBA [17] i GREENA [20].

1. GEOMETRIA POWŁOKI

W rozdziale tym przedstawione zostaną niektóre pojęcia i oznaczenia geometryczne z których korzystano w dalszym tekście pracy.

Powierzchnię środkową powłoki oznaczono symbolem V_2 (w ogólnym przypadku jako dwuwymiarową przestrzeń R i e m a n n a) i parametryzowano ją współrzędnymi η_α (wskaźniki oznaczone literami alfabetu greckiego przebiegają ciąg 1, 2). Równanie tej powierzchni można przedstawić w postaci wektorowej:

$$r = r(\eta_1, \eta_2) .$$

Założono, że w każdym punkcie V_2 jest określona podstawa wektorowa

$$a_\alpha = \partial_\alpha r ,$$

a tym samym są określone składowe kowariantne pierwszego tensora podstawowego powierzchni środkowej powłoki

$$a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta .$$

Ponadto założono, że $\det a_{\alpha\beta} = a \neq 0$. Składowe kontrawiariantne pierwszego tensora podstawowego wynikają ze znanych zależności

$$a_{\alpha\beta} a^{\alpha\gamma} = \delta^\gamma_\beta .$$

Składowe dwuwektora Ricciego w przestrzeni V_2 oznaczono przez

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \sqrt{a}\, E_{\alpha\beta} \quad \text{i} \quad \epsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{a}} E^{\alpha\beta}; \quad E_{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{dla } \alpha = \beta \\ +1 & \text{dla } \begin{matrix}\alpha = 1 \\ \beta = 2\end{matrix} \\ -1 & \text{dla } \begin{matrix}\alpha = 2 \\ \beta = 1\end{matrix} \end{cases} . \tag{1.5}$$

gdzie $E_{\alpha\beta}$ i $E^{\alpha\beta}$ są symbolami Ricciego (por. [17], s.84).

Powierzchnię V_2 najeżono ortogonalnie wektorami jednostkowymi

$$a_3 = a^3 = \frac{a_1 \times a_2}{|a_1 \times a_2|}, \tag{1.6}$$

co wystarcza do określenia składowych kowariantnych drugiego i trzeciego tensora

$$\left.\begin{aligned} b_{\alpha\beta} &= a_3 \cdot \partial_\alpha a_\beta = -a_\alpha \cdot \partial_\beta a_3 \\ c_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha a_3 \cdot \partial_\beta a_3 . \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Pozostałe składowe tych tensorów uzyskano podnosząc wskaźniki za pomocą $a^{\alpha\beta}$.

Powierzchnia V_2 jest zanurzona w trójwymiarowej, euklidesowej przestrzeni powłoki R_3. Oznaczając przez η_3 odległość dowolnego punktu powłoki od V_2, określmy jego położenie wektorem

$$R = r(\eta_1, \eta_2) + \eta_3 a^3 . \tag{1.8}$$

Oznaczając następnie $g_i \overset{def.}{=} \partial_i R$ (wskaźniki oznaczone literami alfabetu łacińskiego przebiegają ciąg 1, 2, 3). otrzymamy, zgodnie z (1.7) i (1.8), składowe kowariantne tensora metrycznego R_3

$$\left.\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_\alpha \cdot g_\beta = a_{\alpha\beta} - 2\eta_3 b_{\alpha\beta} + (\eta_3)^2 c_{\alpha\beta} \\ g_{\alpha 3} &= g_\alpha \cdot g_3 = 0 \\ g_{33} &= g_3 \cdot g_3 = 1 \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

Dla powłok cienkich składowe kontrawariantne tego tensora, po rozłożeniu w szereg i zatrzymaniu tylko trzech pierwszych wyrazów, przyjmą postać (por. [19] lub [20] s.377):

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= a^{\alpha\beta} + 2\eta_3\, b^{\alpha\beta} + 3(\eta_3)^2\, c^{\alpha\beta} \\ g^{\alpha 3} &= 0 \\ g^{33} &= 1 . \end{aligned} \tag{1.10}$$

Znając składowe tensora metrycznego przestrzeni R_3, można obliczyć symbole Christoffella drugiego rodzaju

$$\left\{ {i \atop jk} \right\} = \frac{1}{2}\, g^{il}(\partial_j g_{kl} + \partial g_{lj} - \partial_l g_{jk}) , \tag{1.11}$$

a zgodnie z (1.9) i (1.10), kładąc $\eta_3 = 0$, otrzymamy ich wartości na V_2 (por. [20], s.36):

$$\left.\begin{aligned} \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} &= \frac{1}{2}\, a^{\alpha\delta}(\partial_\beta a_{\gamma\delta} + \partial_\gamma a_{\delta\beta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}) \\ \left\{ {3 \atop \alpha\beta} \right\} &= b_{\alpha\beta} \\ \left\{ {\alpha \atop \beta 3} \right\} &= -b^{\alpha}_{\beta} \\ \left\{ {3 \atop \alpha 3} \right\} &= \left\{ {3 \atop 33} \right\} = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

Grubość powłoki oznaczono przez 2δ; $\eta_3 = \pm\delta(\eta_1, \eta_2)$ są więc powierzchniami ograniczającymi powłokę.

Oprócz stosowanej w literaturze pochodnej kowariantnej na V_2 (którą oznaczono przez ∇_α) w pracy tej posługiwano się również pochodną kowariantną w R_3 dla $\eta_3 = 0$, oznaczając ją symbolem ∇_i.

2. STAN ODKSZTAŁCENIA

Niech $u = u_i a^i$ oznacza wektor przemieszczenia punktu leżącego na V_2. Stan odkształcenia infinitezymalnego w otoczeniu tego punktu przedstawia znana relacja

$$V = u_i\, a^i + \nabla_i u_j\, d\eta^j a^i . \tag{2.1}$$

Rozkładając afinor $\nabla_i u_j$ na część symetryczną (tensor odkształcenia) i antysymetryczną (dwuwektor obrotu)

$$\varepsilon_{ij} \overset{def.}{=} \nabla_{(i} u_{j)}$$
$$\omega_{ij} \overset{def.}{=} \nabla_{[i} u_{j]} \tag{2.2}$$

nadamy związkowi (2.1) postać

$$V = u_i a^i + \varepsilon_{ij} d\eta^j a^i + \omega_{ij} d\eta^j a^i. \tag{2.3}$$

Stan odkształcenia powłoki rozpatrzmy, wprowadzając dwa następujące założenia upraszczające:

1° Otoczenie V_2 odkształca się tak, że zachodzi

$$\varepsilon_{i3} = \varepsilon_{3i} = 0. \tag{2.4}$$

2° Cienkość powłoki pozwala zastąpić relację (2.3) związkiem

$$V_i = u_i + (\varepsilon_{i3} + \omega_{i3})\eta^3 + (\varepsilon_{i\alpha} + \omega_{i\alpha}) d\eta^\alpha. \tag{2.5}$$

Z pierwszego założenia wynika, że

$$\nabla_\alpha u_3 + \nabla_3 u_\alpha = 0, \tag{2.6}$$

co sprowadza relację

$$\omega_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha u_3 - \nabla_3 u_\alpha), \tag{2.7}$$

(określającą mały obrót elementu V_2 spoza płaszczyzny stycznej do V_2) do prostej postaci

$$\omega_{\alpha 3} = \nabla_\alpha u_3. \tag{2.8}$$

Kładąc w (2.4) $i=3$ otrzymamy

$$\nabla_3 V_3 = 0 \quad \text{tj.} \quad V_3 = u_3. \tag{2.9}$$

Korzystając z drugiego założenia oraz z (2.4), otrzymamy dla punktów leżących na normalnej do V_2, zależność

$$V_\alpha = u_\alpha + \omega_{\alpha 3}\, \eta^3. \tag{2.10}$$

Oba powyższe założenia są typowe dla przybliżonej teorii powłok cienkich (teorii Love'a - Kirchhoffa) i pozwalają na wyrażenie składowych tensora odkształcenia w dowolnym punkcie powłoki

$$e_{ij} \overset{def.}{=} \nabla_{(i} V_{j)}, \tag{2.11}$$

przez odkształcenia i obroty powierzchni środkowej powłoki:

$$\left.\begin{aligned} e_{\alpha\beta} &= \nabla_{(\alpha} V_{\beta)} = \nabla_{(\alpha} u_{\beta)} + \nabla_\beta \omega_{\alpha 3}\, \eta^3 \\ e_{\alpha 3} &= \nabla_{(\alpha} V_{3)} = \nabla_{(\alpha} u_{3)} = 0 \\ e_{33} &= \nabla_3 V_3 = \nabla_3 u_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

gdyż $\nabla_{(\beta} \omega_{\alpha)3} = \frac{1}{2}(\nabla_\beta \nabla_\alpha u_3 + \nabla_\alpha \nabla_\beta u_3) = \nabla_\beta \omega_{\alpha 3}$ z uwagi na przemienność różniczkowania kowariantnego w R_3. Zmianę geometrii wewnętrznej V_2 charakteryzuje tensor

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \nabla_{(\alpha} u_{\beta)} = \nabla_\alpha u_\beta - \omega_{\alpha\beta}; \tag{2.13}$$

w równaniu powyższym dwuwektor

$$\omega_{\alpha\beta} = \nabla_{[\alpha} u_{\beta]}, \tag{2.14}$$

określa obrót elementu powierzchni V_2 w płaszczyźnie do niej stycznej.

Zdefiniujemy w R_3, określony dla $\eta_3 = 0$, wektor $\gamma = \gamma_i a^i$ o składowych

$$\gamma_i \overset{def.}{=} a_{ij}\, \epsilon^{jkl}\, \omega_{kl}; \tag{2.15}$$

umożliwia to napisanie równania (2.13) w postaci

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha u_\beta - \epsilon_{\alpha\beta 3}\,\gamma^3, \quad \epsilon_{\alpha\beta 3} = \epsilon_{\alpha\beta} \quad \text{dla} \quad \eta_3 = 0 \tag{2.16}$$

Równania (2.8), (2.14) i (2.16) nazwijmy równaniami odkształcenia wewnętrznego powierzchni V_2.

Celem uzyskania symetrii w budowie równań stanu odkształcenia wprowadźmy wielkość zerową $\vartheta^3 = 0$. Zmianę geometrii zewnętrznej powierzchni V_2 określimy afinorem

$$\chi_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \gamma_\beta - \epsilon_{\alpha\beta 3}\,\vartheta^3. \tag{2.17}$$

Część antysymetryczną tego afinora oznaczmy przez

$$\zeta_{\alpha\beta} \overset{def.}{=} \nabla_{[\alpha}\,\gamma_{\beta]}, \tag{2.18}$$

oraz wprowadźmy wielkości

$$\zeta_{\alpha 3} \overset{def.}{=} \nabla_\alpha \gamma_3. \tag{2.19}$$

Równania (2.17), (2.18) i (2.19) nazwiemy równaniami odkształcenia zewnętrznego. Ponieważ, zgodnie z (2,15) i (2.17) zachodzi

$$\nabla_\beta\,\omega_{\alpha 3} = \epsilon_{3\mu\alpha}\,\nabla_\beta\,\gamma^\mu = a^{\mu\nu}\,\epsilon_{3\mu\alpha}\,\chi_{\beta\nu}\,, \tag{2.20}$$

można napisać pierwsze z równań (2.12) w postaci

$$e_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + a^{\mu\nu}\,\varepsilon_{3\mu\alpha}\,\chi_{\beta\nu}\,\eta^3. \tag{2.21}$$

W wyprowadzonych równaniach odkształcenia wewnętrznego i zewnętrznego występuje pochodna kowariantna ∇_α w R_3 określona dla $\eta_3=0$. Równaniom tym można nadać drugą postać, posługując się pochodną $'\nabla_\alpha$ na V_2 (ten sposób zapisu jest na ogół stosowany w literaturze). Ponieważ dla dowolnego wektora $X = X_i\,a^i$ zachodzi

$$\nabla_\alpha X_i = {}'\nabla_\alpha X_i - \left\{ {k \atop \alpha\, i} \right\} X_k\,, \tag{2.22}$$

to zgodnie z (1.12), otrzymujemy równania odkształcenia wewnętrznego w postaci

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= {}'\nabla_\alpha u_\beta - b_{\alpha\beta} u_3 - \epsilon_{\alpha\beta} \gamma_3 \\ \omega_{\alpha\beta} &= {}'\nabla_{[\alpha} u_{\beta]} \\ \omega_{\alpha 3} &= {}'\nabla_\alpha u_3 + b_\alpha^\mu u_\mu . \end{aligned}\right\} \qquad (2.23)$$

Analogiczną budowę posiadają równania odkształcenia zewnętrznego

$$\left.\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta} &= {}'\nabla_\alpha \gamma_\beta - b_{\alpha\beta} \gamma_3 - \epsilon_{\alpha\beta} \nu_3 \\ \zeta_{\alpha\beta} &= {}'\nabla_{[\alpha} \gamma_{\beta]} \\ \zeta_{\alpha 3} &= {}'\nabla_\alpha \gamma_3 + b_\alpha^\mu \gamma_\mu . \end{aligned}\right\} \qquad (2.24)$$

Wielkości u_3 i γ_3 stanowią w tym ujęciu pola skalarowe na V_2. Powyższy sposób zapisu ułatwia porównanie wprowadzonych wielkości i równań z wielkościami i równaniami znanymi w literaturze przedmiotu. Tensor odkształcenia wewnętrznego $\varepsilon_{\alpha\beta}$ został zdefiniowany tak jak tensor $\varepsilon_{(ik)}$ w [21] oraz tensor ε_{jk} w opracowaniach radzieckich [6], [9], [22]; pierwsze z równań (2.23) jest analogiczne do równań w cytowanych pracach. W podobny sposób jak w tej pracy, określono afinor odkształcenia zewnętrznego $\chi_{\alpha\beta}$ w [21] (gdzie pominięto ν_3). Afinor ten jest powiązany z afinorem zmiany krzywizny stosowanym np. w [6], [9], [22], związkami

$$\left.\begin{aligned} \mu_{\alpha\beta} &= \epsilon_{\alpha\mu} a^{\mu\nu} \chi_{\nu\beta} \\ \chi_{\nu\beta} &= -\epsilon_{\nu\mu} a^{\mu\alpha} \mu_{\alpha\beta} \end{aligned}\right\} \qquad (2.25)$$

3. STAN NAPIĘCIA

Niech τ^{ik} będą składowymi kontawiariantnymi tensora naprężenia w dowolnym punkcie powłoki. Składowe stanu napię-

cia w przekrojach poprzecznych powłoki (siły i momenty) wyniosą (por. np. [22]).

$$\left.\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= \int_{-\delta}^{\delta} (\tau^{\alpha\beta} - \eta_3 b^{\alpha}_{\mu} \tau^{\mu\beta}) \sqrt{\frac{g}{a}}\, d\eta_3 \\ M^{\alpha\beta} &= \int_{-\delta}^{\delta} \eta_3 (\tau^{\alpha\beta} - \eta_3 b^{\alpha}_{\mu} \tau^{\mu\beta}) \sqrt{\frac{g}{a}}\, d\eta_3 \\ T^{3\alpha} &= \int_{-\delta}^{\delta} \tau^{3\alpha} \sqrt{\frac{g}{a}}\, d\eta_3, \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

gdzie oznaczono

$$g = g(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \det g_{\alpha\beta}. \qquad (3.2)$$

Oznaczmy przez X^i składowe sił obciążenia powierzchniowego (przyłożonych do V_2), przez Y_α - składowe momentu tego obciążenia względem osi stycznych do V_2.
Różniczkowe warunki równowagi posiadają znaną postać:

$$\left.\begin{aligned} {}'\nabla_\mu T^{\mu\alpha} - b^{\alpha}_{\mu} T^{\mu 3} &= -X^{\alpha} \\ {}'\nabla_\mu T^{\mu 3} + T^{\mu\nu} b_{\mu\nu} &= X^3 \\ \epsilon_{\alpha\beta}\, {}'\nabla_\mu M^{\alpha\mu} - \epsilon_{\alpha\beta} T^{\alpha 3} &= Y_\beta \\ \epsilon_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \epsilon_{\alpha\beta} b^{\beta}_{\mu} M^{\alpha\mu} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

Stan napięcia powłoki będziemy w dalszym ciągu określać nie afinorami o składowych kontrawariantnych, określonych przez (3.1), lecz wielkościami o składowych kowariantnych, które są powiązane z poprzednimi za pomocą relacji

$$\left.\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= a^{\beta\nu} \epsilon^{\alpha\mu} \tilde{t}_{\mu\nu}, & \tilde{t}_{\mu\nu} &= -a_{\mu\alpha} \epsilon_{\nu\beta} T^{\alpha\beta} \\ T^{\alpha 3} &= \epsilon^{\alpha\mu} \tilde{t}_{\mu 3}, & \tilde{t}_{\mu 3} &= -\epsilon_{\mu\alpha} T^{\alpha 3} \\ M^{\alpha\beta} &= \epsilon^{\alpha\mu} \epsilon^{\beta\nu} \tilde{m}_{\mu\nu}, & \tilde{m}_{\mu\nu} &= \epsilon_{\mu\alpha} \epsilon_{\nu\beta} M^{\alpha\beta}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

Korzystając z (3.4) można nadać warunkom równowagi (3.3) drugą postać

$$\left.\begin{aligned} \epsilon^{\nu\mu} \nabla_\mu t_{\nu k} &= X_k \\ \epsilon^{\nu\mu} \nabla_\nu m_{\mu\alpha} + \tilde{t}_{\alpha 3} &= Y_\alpha \\ \epsilon^{\nu\mu} b^{\lambda}_{\nu} m_{\lambda\mu} + a^{\mu\nu} \tilde{t}_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

Przedstawmy teraz składowe napięcia w postaci sum

$$\left.\begin{aligned} \tilde{t}_{\alpha\beta} &= t_{\alpha\beta} + t^*_{\alpha\beta} \\ \tilde{m}_{\alpha\beta} &= m_{\alpha\beta} + m^*_{\alpha\beta} \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

w których $t^*_{\alpha\beta}$, $m^*_{\alpha\beta}$ są dowolnymi całkami szczególnymi układu:

$$\epsilon^{\nu\mu} \nabla_\mu t^*_{\nu\beta} = X_\beta, \quad \epsilon^{\nu\mu} b^\varrho_\mu t^*_{\varrho\nu} = X_3, \quad \epsilon^{\nu\mu} \nabla_\nu m^*_{\mu\alpha} = Y_\alpha; \qquad (3.7)$$

wielkości $t_{\alpha\beta}$, $m_{\alpha\beta}$ spełniają wtedy równania jednorodne:

$$\left.\begin{aligned} &\epsilon^{\nu\mu} \nabla_\mu t_{\nu k} = 0 \\ &\epsilon^{\nu\mu} \nabla_\nu m_{\mu\alpha} + t_{\alpha 3} = 0 \\ &\epsilon^{\nu\mu} b^\lambda_\nu m_{\lambda\mu} + a^{\mu\nu} t_{\mu\nu} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.8)$$

Pierwsze trzy z nich będą spełnione tożsamościowo, gdy przyjmiemy wektor $x = x_i a^i$ taki, że

$$t_{\nu k} = \nabla_\nu x_k, \qquad (3.9)$$

bowiem w R_3 zachodzi przemienność różniczkowania kowariantnego

$$\epsilon^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu x_k \equiv 0. \qquad (3.10)$$

Podstawiając do dalszych dwóch równań (3.8) zamiast $m_{\mu\alpha}$ wyrażenie

$$m_{\mu\alpha} = \nabla_\mu y_\alpha - \epsilon_{\mu\alpha 3} x_3 \qquad (3.11)$$

oraz korzystając z (3.9) otrzymamy ponownie tożsamość:

$$\epsilon^{\mu\nu}(\nabla_\mu \nabla_\nu y_\alpha - \epsilon_{\alpha\nu} \nabla_\mu x_3) + \nabla_\alpha x_3 = \epsilon^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu y_\alpha \equiv 0, \qquad (3.12)$$

gdyż $\epsilon^{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\nu} = a^\mu_\alpha = \delta^\mu_\alpha$.

Podstawiając prawe strony (3.9) i (3.11) do ostatniego z równań równowagi (3.8) nadamy mu postać

$$\nabla_\mu x_\mu - b^\mu_\mu x_3 = - \epsilon^{\nu\mu} b^\lambda_\nu \nabla_\lambda y_\mu , \tag{3.13}$$

która określa związek pomiędzy wektorami x i y. Związek ten, w ramach dokładności teorii przybliżonej, można zastąpić założeniem symetrii afinora $M^{\alpha\beta}$ skąd wynika symetria afinora $m_{\alpha\beta}$. Z (3.11) otrzymujemy (por. [9]) równanie

$$\nabla_{[\mu} y_{\alpha]} = \epsilon_{\mu\alpha 3} x_3 . \tag{3.14}$$

Ostatnim równaniem jest zależność

$$x^\mu = \epsilon^{\mu\nu 3} \nabla_\nu y_3 . \tag{3.15}$$

Wprowadźmy (dla uzyskania symetrii w budowie równań) wielkość $\Theta^3 = 0$. Równania (3.9) napiszmy w postaci

$$\left.\begin{aligned} t_{\alpha\beta} &= \nabla_\alpha x_3 - \epsilon_{\alpha\beta 3} \Theta^3 \\ k_{\alpha 3} &= \nabla_\alpha x_3 ; \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Wyraźmy następnie wektor x za pomocą dwuwektora v

$$\left.\begin{aligned} v_{\alpha i} &= \epsilon_{\alpha ik} x_k \\ x_k &= a_{ik} \epsilon^{\alpha ij} v_{\alpha j} ; \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

pozwala to na napisanie równań (3.14) i (3.15) jako

$$\left.\begin{aligned} v_{\alpha\beta} &= \nabla_{[\alpha} y_{\beta]} \\ v_{\alpha 3} &= \nabla_\alpha y_3 \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

Dołączając do równań (3.11), (3.16) i (3.18) równanie (3.19)

$$k_{\alpha\beta} = \nabla_{[\alpha} x_{\beta]} , \tag{3.19}$$

otrzymamy grupę równań "statycznych". Korzystając z (2.22), równaniom tym można nadać nieco inną postać, dzieląc je jednocześnie na dwie grupy:

$$\left.\begin{aligned} t_{\alpha\beta} &= {}'\nabla_\alpha x_\beta - b_{\alpha\beta} x_3 - \epsilon_{\alpha\beta} \Theta_3 \\ k_{\alpha\beta} &= {}'\nabla_{[\alpha} x_{\beta]} \\ t_{\alpha 3} &= {}'\nabla_\alpha x_3 + b_\alpha^\mu x_\mu , \end{aligned}\right\} \qquad (3.20)$$

$$\left.\begin{aligned} m_{\alpha\beta} &= {}'\nabla_\alpha y_\beta - b_{\alpha\beta} y_3 - \epsilon_{\alpha\beta} x_3 \\ v_{\alpha\beta} &= {}'\nabla_{[\alpha} y_{\beta]} \\ v_{\alpha 3} &= {}'\nabla_\alpha y_3 + b_\alpha^\mu y_\mu . \end{aligned}\right\} \qquad (3.21)$$

Składowe wektorów x i y pełnią rolę funkcji naprężeń. Różnią się one od funkcji naprężeń znanych w literaturze z powodu przyjęcia nieco odmiennej postaci afinorów stanu napięcia, określonych w niniejszej pracy związkami (3.4).

4. WPŁYW TEMPERATURY

Wpływ pola temperatury na stan odkształcenia i naprężenia powłoki uwzględnimy przez formalne określenie w R_3 tzw. pola "odkształceń początkowych". Niech $\bar{g}_{\alpha\beta}$ będą składowymi pierwszego tensora podstawowego powierzchni $\eta_3 =$ $=$ const po "odkształceniu początkowym", $d\bar{s}^2$ - elementem liniowym tej powierzchni oraz ds^2 - elementem liniowym powierzchni $\eta_3 =$ const przed odkształceniem. Przy tych oznaczeniach

$$\left.\begin{aligned} d\bar{s}^2 &= \bar{g}_{\alpha\beta}\, d\eta^\alpha d\eta^\beta , \\ ds^2 &= g_{\alpha\beta}\, d\eta^\alpha d\eta^\beta . \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

Powierzchnie $\eta_3 = \text{const.}$ przed odkształceniem i te same powierzchnie po odkształceniu są na siebie odwzorowane konforemnie (por. [24], s.176):

$$d\bar{s} = \exp(2p)\,ds, \qquad \exp(2p) \cong 1 + \alpha_t T. \tag{4.2}$$

Symbolem α_t oznaczono współczynnik rozszerzalności liniowej, T jest polem temperatury. Z (4.1) i (4.2) otrzymamy

$$\bar{g}_{\alpha\beta}\, d\eta^\alpha d\eta^\beta = g_{\alpha\beta}\, d\eta^\alpha d\eta^\beta (1 + \alpha_t T)^2, \tag{4.3}$$

co daje w przybliżeniu dla niezbyt wielkich temperatur

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = (1 + 2\alpha_t T) g_{\alpha\beta}. \tag{4.4}$$

Składowe tensora "odkształcenia początkowego" w dowolnym punkcie powłoki wynoszą

$$\overset{*}{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}) = \alpha_t T g_{\alpha\beta}. \tag{4.5}$$

Pozostałe składowe, zgodnie z (2.12), pomijamy.

Dla powłok cienkich rzeczywiste pole temperatury można zastąpić z wystarczającą dokładnością polem

$$T = \tau_0(\eta_1, \eta_2) + \eta^3 \cdot \tau(\eta_1, \eta_2). \tag{4.6}$$

Funkcje τ i τ_0 (które mogą zależeć również od czasu) spełniać muszą na V_2 niejednorodne równania Helmholtza, analogicznie jak w przypadku płyty cienkiej (por. [14], s.48 i s.89). Podstawiając prawą stronę (4.6) do (4.5) otrzymamy

$$\overset{*}{e}_{\alpha\beta} = \alpha_t \tau g_{\alpha\beta} + \alpha_t \tau g_{\alpha\beta} \eta^3, \tag{4.7}$$

co po porównaniu z (2.21) daje

$$\overset{*}{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \alpha_t \tau_0 a_{\alpha\beta} \tag{4.8}$$

$$a^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\alpha} \overset{*}{\chi}_{\beta\nu} = \alpha_t \tau a_{\alpha\beta}. \tag{4.9}$$

Nasuwając na obie strony (4.9) wielkość $a_{\lambda\mu}\epsilon^{\mu\alpha}$ otrzymamy

$$\overset{*}{\chi}_{\alpha\beta} = \alpha_t \tau \epsilon_{\beta\alpha}. \tag{4.10}$$

Relacje (4.8) i (4.10) określają pole odkształcenia wewnętrznego i zewnętrznego powierzchni V_2 wywołane samym tylko wpływem temperatury (tj. w stanie beznaprężeniowym).

Oznaczając przez $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ i $\tilde{\chi}_{\alpha\beta}$ składowe odkształcenia wywołane tylko wpływami mechanicznymi, można napisać relacje

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \overset{*}{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \alpha_t \tau_0 a_{\alpha\beta} \\ \chi_{\alpha\beta} &= \tilde{\chi}_{\alpha\beta} + \overset{*}{\chi}_{\alpha\beta} = \tilde{\chi}_{\alpha\beta} + \alpha_t \tau \epsilon_{\beta\alpha}; \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

odkształcenie całkowite jest bowiem sumą odkształcenia "mechanicznego" i "początkowego".
Równania (4.11) określają składowe całkowitego odkształcenia $\varepsilon_{\alpha\beta}$ i $\chi_{\alpha\beta}$, omówionego w rozdz. 2 tej pracy.

5. WŁASNOŚCI WYPROWADZONYCH RÓWNAŃ

Wprowadzając nową postać niektórych afinorów określających stan odkształcenia i napięcia powłoki, w rozdziałach 2, 3 i 4 tej pracy otrzymano układ (niezupełny[x]) równań teorii powłok. Układ składa się z równań odkształcenia wewnętrznego (2.23), odkształcenia zewnętrznego (2.24), dwóch grup równań statycznych (3.20) i (3.21) oraz związków (3.6)

---

[x] Tj. nie mogący stanowić podstawy poprawnego sformułowania zagadnienia brzegowego.

i (4.11). Przytoczone równania posiadają własność, która nie cechuje zapisu spotykanego w znanej autorowi literaturze przedmiotu. Mianowicie, jeżeli zachodzi związek pomiędzy wielkościami należącymi do jednej z kolumn poniższej macierzy

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_{\alpha\beta} & m_{\alpha\beta} & t_{\alpha\beta} & \chi_{\alpha\beta} \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} & \tilde{m}_{\alpha\beta} & \tilde{t}_{\alpha\beta} & \tilde{\chi}_{\alpha\beta} \\ \overset{*}{\varepsilon}_{\alpha\beta} & -\overset{*}{m}_{\alpha\beta} & -t^{*}_{\alpha\beta} & \overset{*}{\chi}_{\alpha\beta} \\ \omega_{\alpha i} & v_{\alpha i} & k_{\alpha i} & \vartheta_{\alpha i} \\ u_i & y_i & x_i & \gamma_i \\ \gamma_3 & x_3 & \Theta_3 & \vartheta_3 \end{Vmatrix}, \qquad (5.1)$$

to zachodzi analogiczny związek pomiędzy wielkościami należącymi do pozostałych trzech.
Oznacza to możliwość wyodrębnienia z przedstawionych równań, czterech grup o identycznej formie. Każda grupa zawiera trzy równania różniczkowe (tensorowe) i jedno równanie algebraiczne. Te cztery równania można napisać przy użyciu kolumn macierzy otrzymanej przez transpozycję macierzy (5.1); równania te opiewają

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_{\alpha\beta} \\ m_{\alpha\beta} \\ t_{\alpha\beta} \\ \chi_{\alpha\beta} \end{Vmatrix} = {}'\nabla_\alpha \begin{Vmatrix} u_\beta \\ y_\beta \\ x_\beta \\ \gamma_\beta \end{Vmatrix} - b_{\alpha\beta} \begin{Vmatrix} u_3 \\ y_3 \\ x_3 \\ \gamma_3 \end{Vmatrix} - \epsilon_{\alpha\beta} \begin{Vmatrix} \gamma_3 \\ x_3 \\ \Theta_3 \\ \vartheta_3 \end{Vmatrix} \qquad (5.2)$$

$$\begin{Vmatrix} \omega_{\alpha\beta} \\ v_{\alpha\beta} \\ k_{\alpha\beta} \\ \vartheta_{\alpha\beta} \end{Vmatrix} = {}'\nabla_{[\alpha} \begin{Vmatrix} u_{\beta]} \\ y_{\beta]} \\ x_{\beta]} \\ \gamma_{\beta]} \end{Vmatrix} \qquad (5.3)$$

$$\begin{Vmatrix} \omega_{\alpha 3} \\ v_{\alpha 3} \\ k_{\alpha 3} \\ \vartheta_{\alpha 3} \end{Vmatrix} = {}'\nabla_\alpha \begin{Vmatrix} u_3 \\ y_3 \\ x_3 \\ \gamma_3 \end{Vmatrix} + b^{\mu}_{\alpha} \begin{Vmatrix} u_\mu \\ y_\mu \\ x_\mu \\ \gamma_\mu \end{Vmatrix} \qquad (5.4)$$

$$\left\| \begin{matrix} \varepsilon_{\alpha\beta} \\ m_{\alpha\beta} \\ t_{\alpha\beta} \\ \chi_{\alpha\beta} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} \\ \tilde{m}_{\alpha\beta} \\ \tilde{t}_{\alpha\beta} \\ \tilde{\chi}_{\alpha\beta} \end{matrix} \right\| - \left\| \begin{matrix} -\alpha_t \tau_0 a_{\alpha\beta} \\ \overset{*}{m}_{\alpha\beta} \\ \overset{*}{t}_{\alpha\beta} \\ -\alpha_t \tau \epsilon_{\alpha\beta} \end{matrix} \right\| . \qquad (5.5)$$

Symetria budowy równań (5.2) - (5.5) jest uogólnieniem znanej analogii statyczno-geometrycznej. Dotyczy ona nie tylko zagadnienia jednorodnego (jak analogia statyczno-geometryczna) lecz obejmuje również wpływ obciążenia powierzchniowego i temperatury. Należy zaznaczyć, że symetrię tą można zauważyć również w zapisie nie tensorowym (por. [2], s.38 i 53)[x].

Elementy kolumn w (5.2) i (5.4) nie są niezależne; zachodzą pomiędzy nimi związki algebraiczne postaci

$$\left.\begin{aligned} \gamma_\alpha &= a_{\alpha\mu}\, \epsilon^{\mu\nu 3} \omega_{\nu 3} \\ \gamma_3 &= \gamma^3 = \epsilon^{\mu\nu 3} \omega_{\mu\nu} \\ \omega_{\alpha\beta} &= \epsilon_{\alpha\beta 3}\, \gamma_3 \\ \omega_{\alpha 3} &= \epsilon_{\alpha 3\mu}\, \gamma^\mu , \end{aligned}\right\} \qquad (5.6)$$

$$\left.\begin{aligned} x_\alpha &= a_{\alpha\mu}\, \epsilon^{\mu\nu 3} v_{\nu 3} \\ x_3 &= x^3 = \epsilon^{\mu\nu 3} v_{\mu\nu} \\ v_{\alpha\beta} &= \epsilon_{\alpha\beta 3}\, x^3 \\ v_{\alpha 3} &= \epsilon_{\alpha 3\mu}\, x_\mu . \end{aligned}\right\} \qquad (5.7)$$

Ponadto, elementy kolumny

$$\left\| \begin{matrix} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} \\ \tilde{m}_{\alpha\beta} \\ \tilde{t}_{\alpha\beta} \\ \tilde{\chi}_{\alpha\beta} \end{matrix} \right\| \qquad (5.8)$$

są powiązane równaniami fizycznymi, przedstawionymi w następnym rozdziale.

---

x) Gdzie jednakże na fakt ten nie zwrócono uwagi.

2. ZWIĄZKI POMIĘDZY SKŁADOWYMI STANU NAPIĘCIA I ODKSZTAŁCENIA

Niech pomiędzy składowymi kontrawariantnymi tensora naprężenia $\tau^{\alpha\beta}$ a składowymi tensora odkształcenia $\tilde{e}_{\mu\nu}$ w dowolnym punkcie powłoki będą dane związki

$$\tau^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta\mu\nu}\tilde{e}_{\mu\nu}. \tag{6.1}$$

Afinor sprężystości H, zgodnie z założeniem jednowarstwowości anizotropii[x)] i jednorodności w kierunku a_3, zależy tylko od η_1 i η_2. Składowe odkształcenia e_{i3} przyjęto (por. rozdz. 2) jako równe zeru. Podstawiając do (6.1) zależność (2.21)[xx)], otrzymujemy

$$\tau^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta\mu\nu}\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu} + H^{\alpha\beta\mu\nu}a^{\pi\varrho}\epsilon_{\pi\mu}\tilde{\chi}_{\nu\varrho}\eta^3. \tag{6.2}$$

Podstawiając prawe strony (6.2) do (3.1) i wykonując całkowanie, otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= 2\delta H^{\alpha\beta\mu\nu}\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu} - \tfrac{2}{3}\delta^3 b^{\alpha}_{\eta} H^{\eta\beta\mu\nu}a^{\pi\varrho}\epsilon_{\pi\mu}\tilde{\chi}_{\nu\varrho} \\ M^{\alpha\beta} &= \tfrac{2}{3}\delta^3 H^{\alpha\beta\mu\nu}a^{\pi\varrho}\epsilon_{\pi\mu}\tilde{\chi}_{\nu\varrho} - \tfrac{2}{3}\delta^3 b^{\alpha}_{\eta} H^{\eta\beta\mu\nu}\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Wprowadzając wielkości $\tilde{t}_{\alpha\beta}$ i $\tilde{m}_{\alpha\beta}$ zdefiniowane przez (3.4) nadamy równaniom (6.3) postać

$$\left.\begin{aligned} t_{\alpha\beta} &= -2\delta a_{\alpha\pi}\epsilon_{\beta\varrho}H^{\pi\varrho\mu\nu}\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu} + \tfrac{2}{3}\delta^3 a_{\alpha\pi}\epsilon_{\beta\varrho}b^{\pi}_{\eta}H^{\eta\beta\mu\nu}a^{\xi\varrho}\epsilon_{\xi\mu}\tilde{\chi}_{\nu\varrho} \\ \tilde{m}_{\alpha\beta} &= \tfrac{2}{3}\delta^3\epsilon_{\alpha\pi}\epsilon_{\beta\varrho}H^{\pi\varrho\mu\nu}a^{\lambda\theta}\epsilon_{\lambda\mu}\chi_{\nu\theta} - \tfrac{2}{3}\delta^3\epsilon_{\alpha\pi}\epsilon_{\beta\varrho}b^{\pi}_{\eta}H^{\eta\varrho\mu\nu}\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

Wprowadzając znane uproszczenia, pominiemy w (6.4) wyrazy zawierające składowe drugiego tensora podstawowego powierzchni V_2.

---

x) Anizotropia wielowarstwowa powłok została omówiona m.innymi w monografii AMBARCUMIANA [25].

xx) Zależność ta przyjmuje w tym przypadku postać:

$$\tilde{e}_{\alpha\beta} = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} + a^{\mu\nu}\epsilon_{3\mu\alpha}\tilde{\chi}_{\beta\nu}\eta^3.$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$Dd\,\overset{1}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} \overset{def.}{=} -a_{\alpha\pi}\,\epsilon_{\beta\varrho}\,H^{\pi\varrho\mu\nu} \tag{6.5}$$

$$Dd\,\overset{2}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} \overset{def.}{=} \epsilon_{\alpha\pi}\,\epsilon_{\beta\varrho}\,H^{\pi\varrho\theta\mu}\,a^{\lambda\nu}\epsilon_{\lambda\theta}, \tag{6.6}$$

w których $D=D(\eta_1,\eta_2)$ jest polem skalarowym na V_2 wyrażonym w jednostkach naprężenia, $d=d(\eta_1,\eta_2)$ jest polem skalarów bezwymiarowych.[x] Uproszczone równania (6.4) przyjmą teraz postać

$$\left.\begin{aligned} \tilde{t}_{\alpha\beta} &= 2\delta\,Dd\,\overset{1}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}\,\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu} \\ \tilde{m}_{\alpha\beta} &= \tfrac{2}{3}\delta^3\,Dd\,\overset{2}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}\,\chi_{\mu\nu}, \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

a odwracając powyższe relacje, napiszemy

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2\delta}\,\frac{d}{D}\,\overset{1}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}\,\tilde{t}_{\mu\nu} \\ \tilde{\chi}_{\alpha\beta} &= \frac{2}{2\delta^3}\,\frac{d}{D}\,\overset{2}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}\,\tilde{m}_{\mu\nu}, \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

przy czym

$$\left.\begin{aligned} d^2\,\overset{1}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}\,\overset{1}{K}{}^{\cdot\cdot\pi\varrho}_{\mu\nu} &= a^{\pi}_{\alpha}\,a^{\varrho}_{\beta} \\ d^2\,\overset{2}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}\,\overset{2}{K}{}^{\cdot\cdot\pi\varrho}_{\mu\nu} &= a^{\pi}_{\alpha}\,a^{\varrho}_{\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

Dla ciał izotropowych afinor sprężystości ma postać

$$H^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(a^{\alpha\beta}a^{\mu\nu} + \nu\alpha^{\alpha\mu}a^{\beta\nu}\right), \tag{6.10}$$

---

x) Skalary D i d pełnią rolę stałych materiałowych przy przejściu do ośrodka izotropowego, por. (6.15).

a równania (6.4), po odrzuceniu wyrazów zawierających b^{α}_{η} sprowadzą się do

$$\left.\begin{aligned} \tilde{t}_{\alpha\beta} &= \frac{2\delta E}{1-\nu^2}\left(-a^{\mu}_{\alpha}\,\epsilon^{\cdot\nu}_{\beta} + \nu\, a^{\nu}_{\beta}\,\epsilon^{\cdot\mu}_{\alpha}\right)\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu} \\ \tilde{m}_{\alpha\beta} &= \frac{2\delta^3 E}{3(1-\nu^2)}\left(-a^{\mu}_{\alpha}\,\epsilon^{\cdot\nu}_{\beta} + \nu\, a^{\nu}_{\beta}\,\epsilon^{\cdot\mu}_{\alpha}\right)\tilde{\chi}_{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.11)$$

Literą E oznaczono, jak zwykle, moduł Y o u n g a, literą ν - współczynnik P o i s s o n a, Równania odwrotne do (6.11) mają kształt

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2\delta E}\left(a^{\mu}_{\alpha}\,\epsilon^{\cdot\nu}_{\beta} + \nu\, a^{\nu}_{\beta}\,\epsilon^{\cdot\mu}_{\alpha}\right)\tilde{t}_{\mu\nu} \\ \tilde{\chi}_{\alpha\beta} &= \frac{3}{2\delta^3 E}\left(a^{\mu}_{\alpha}\,\epsilon^{\cdot\nu}_{\beta} + \nu\, a^{\nu}_{\beta}\,\epsilon^{\cdot\mu}_{\alpha}\right)\tilde{m}_{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.12)$$

Porównując (6.7) i (6.8) z (6.11) i (6.12) przyjmiemy

$$\left.\begin{aligned} \overset{1}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} &= -a^{\mu}_{\alpha}\,\epsilon^{\cdot\nu}_{\beta} + \nu\, a^{\nu}_{\beta}\,\epsilon^{\cdot\mu}_{\alpha}, \qquad \overset{1}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} = \overset{2}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} \\ \overset{1}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} &= a^{\mu}_{\alpha}\,\epsilon^{\cdot\nu}_{\beta} + \nu\, a^{\nu}_{\beta}\,\epsilon^{\cdot\mu}_{\alpha}, \qquad \overset{1}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} = \overset{2}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.13)$$

otrzymując następnie z równań

$$Dd = \frac{E}{1-\nu^2}, \qquad \frac{d}{D} = \frac{1}{E}, \qquad (6.14)$$

następujące wartości D i d dla powłoki izotropowej:

$$d = \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}}, \quad D = \frac{E}{\sqrt{1-\nu^2}}. \qquad (6.15)$$

Składowe stanu odkształcenia występujące w powyższych równaniach (oznaczające je symbole zaopatrzone u góry tildą) określają tylko tę część odkształcenia, która jest wywołana siłami lub momentami. Gdy pominiemy działanie na powłokę pola temperatury, zachodzi $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}$ i $\tilde{\chi}_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta}$ zgodnie z (4.11). Gdy nie działa obciążenie powierzchniowe, także $\tilde{t}_{\alpha\beta} = t_{\alpha\beta}$ i $\tilde{m}_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta}$.

7. OZNACZENIA I OPERACJE ALGEBRY C_2^+

Wprowadzimy do rozważań dwuwymiarową przestrzeń euklidesową R_2^+; przestrzeń tę wprowadzamy formalnie nie przypisując jej żadnego znaczenia fizyklanego. Niech wektory e_1, e_2 tworzą w R_2^+ bazę ortonormalną

$$e_{(\alpha} \cdot e_{\beta)} = \delta_{\alpha\beta} ; \tag{7.1}$$

$\delta_{\alpha\beta}$ jest symbolem Kroneckera. Oznaczmy przez e_{12} prosty dwuwektor utworzony z e_1 i e_2. Agregatem w przestrzeni R_2^+ nazwijmy za RASZEWSKIM zbiór skalara, pary wektorów i dwuwektora (por. [16]; termin ten został po raz pierwszy wprowadzony przez G.Cantora). Każdy agregat A można przedstawić w postaci sumy

$$A = \alpha + \beta e_1 + \gamma e_2 + \delta e_{12} . \tag{7.2}$$

Wielkości α, β, γ, δ nazwiemy składnikami agregatu, oznaczając go również bardziej zwięzłym symbolem $(\alpha; \beta; \gamma; \delta)$.

Określimy podstawowe działania na agregatach. Sumą agregatów niech będzie agregat otrzymany przez dodanie do siebie odpowiednich składników a mnożenie agregatu przez liczbę określimy jako mnożenie przez tą liczbę wszystkich składników agregatu:

$$(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \delta_1) + (\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \delta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2; \beta_1 + \beta_2; \gamma_1 + \gamma_2; \delta_1 + \delta_2) \quad \text{oraz} \quad c(\alpha; \beta; \gamma; \delta) = (c\alpha; c\beta; c\gamma; c\delta).$$

Mnożenie agregatu przez agregat wykonujemy zgodnie z tablicą:

$$\left.\begin{aligned} e_1 e_2 &= -e_2 e_1 = e_{12}, & e_1^2 &= 1 \\ e_2 e_{12} &= -e_{12} e_2 = -e_1, & e_2^2 &= 1 \\ e_{12} e_1 &= -e_1 e_{12} = -e_2, & e_{12}^2 &= -1 \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

Przy powyższej definicji mnożenia, dla dowolnych agregatów A, B i C, zachodzi prawo lewej i prawej rozdzielności sumy względem iloczynu -

$$\left.\begin{aligned} A(B+C) &= AB + AC \\ (B+C)A &= BA + CA \end{aligned}\right\} \qquad (7.4)$$

oraz prawo łączności

$$(AB)C = A(BC). \qquad (7.5)$$

Agregaty $A_1 = (\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \delta_1)$ i $A_2 = (\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \delta_2)$ są równe $(A_1 = A_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma_2$ i $\delta_1 = \delta_2$.

Zbiór agregatów, przy powyższym określeniu działań, jest algebrą Clifforda C_2^+ (obszerne omówienie tych algebr por. [16]).

Dla potrzeb tej pracy wprowadzmy dodatkowe pojęcia i oznaczenia. Agregatem s t o w a r z y s z o n y m z danym agregatem $A = (\alpha; \beta; \gamma; \delta)$ nazwiemy agregat

$$\bar{A} = e_1 A e_1 = (\alpha; \beta; -\gamma; -\delta). \qquad (7.6)$$

Ponieważ $e_1^2 = 1$ zachodzi tożsamość

$$\bar{\bar{A}} \equiv A \qquad (7.7)$$

Sumę i różnicę agregatu danego i stowarzyszonego z nim oznaczymy przez

$$\left.\begin{aligned} A^{(+)} &= A + \bar{A} \\ A^{(-)} &= A - \bar{A}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.8)$$

są to agregaty postaci $(2\alpha; 2\beta; 0; 0)$ i $(0; 0; 2\gamma; 2\delta)$. W dalszym tekście pracy operację określoną przez (7.6) nazwano "kreskowaniem" agregatu; agregaty $A^{(+)}$ i $A^{(-)}$ nazwano kolejno "plusowym" i "minusowym". Pochodną agregatu jest agregat, którego składniki są pochodnymi agregatu pierwotnego.

8. ZAPIS AGREGATOWY WYPROWADZONYCH RÓWNAŃ

Afinory będące elementami macierzy (5.1) są określone w przestrzeni R_3 dla $\eta_3 = 0$ tj. na ortogonalnie najeżonej przestrzeni V_2. Utwórzmy iloczyn tej przestrzeni i przestrzeni euklidesowej R_2^+ (wprowadzonej w poprzednim rozdziale). Na tym iloczynie zdefiniujemy kolumnę agregatów, których składnikami są elementy macierzy (5.1) pomnożone przez D lub δ_0; δ_0 posiada wymiar długości. Grubość powłoki będziemy określać funkcją $\lambda(\eta_1, \eta_2) = \delta/\delta_0$.

Niech równanie macierzowe

$$\left\| \begin{matrix} B_{\alpha\beta} \\ \tilde{B}_{\alpha\beta} \\ \overset{*}{B}_{\alpha\beta} \\ A_{\alpha 3} \\ A_{[\alpha\beta]} \\ A_i \\ K_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \varepsilon_{\alpha\beta} & m_{\alpha\beta} & t_{\alpha\beta} & \chi_{\alpha\beta} \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} & \tilde{m}_{\alpha\beta} & \tilde{t}_{\alpha\beta} & \tilde{\chi}_{\alpha\beta} \\ -\alpha_t \tau_0 a_{\alpha\beta} & m^*_{\alpha\beta} & t^*_{\alpha\beta} & -\alpha_t \tau \epsilon_{\alpha\beta} \\ \omega_{\alpha 3} & v_{\alpha 3} & k_{\alpha 3} & \varsigma_{\alpha 3} \\ \omega_{\alpha\beta} & v_{\alpha\beta} & k_{\alpha\beta} & \varsigma_{\alpha\beta} \\ u_i & y_i & x_i & \gamma_i \\ \gamma_3 & x_3 & \Theta_3 & \nu_3 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 2\delta^2 D \\ \sqrt{3}\, e_1 \\ \delta_0 e_2 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \delta_0 \delta^2 D e_{12} \end{matrix} \right\| \qquad (8.1)$$

określa kolumnę agregatów afinorowych.[x] Korzystając z (8.1) nadanym równaniom (5.2) - (5.5) poniższą postać

$$B_{\alpha\beta} = {}'\nabla_\alpha A_\beta - b_{\alpha\beta} A_3 - \epsilon_{\alpha\beta} K_3 \qquad (8.2)$$

$$A_{\alpha\beta} = {}'\nabla_\alpha A_\beta - b_{\alpha\beta} A_3 \qquad (8.3)$$

$$A_{\alpha 3} = {}'\nabla_\alpha A_3 + b_\alpha^\mu A_\mu \qquad (8.4)$$

$$B_{\alpha\beta} = \tilde{B}_{\alpha\beta} - \overset{*}{B}_{\alpha\beta} \qquad (8.5)$$

---

[x] Tj. agregatów których składnikami są składowe afinorów.

Równania (8.2) - (8.4) napisano stosując pochodną kowiariantną na V_2; wskaźnik "3" jest w powyższych równaniach wskaźnikiem martwym. Drugi, bardziej zwięzły, zapis tych równań można otrzymać wprowadzając pochodną kowariantną w R_3 (dla $\eta_3 = 0$):

$$B_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \epsilon_{\alpha\beta 3} K^3 \qquad (K^3 = K_3) \tag{8.6}$$

$$A_{\alpha i} = \nabla_\alpha A_i . \tag{8.7}$$

Spośród trzech agregatów afinorowych: $B_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta}$ i $\tilde{B}_{\alpha\beta}$, dwa można wyeliminować, zgodnie z (8.5) oraz z tożsamością

$$B_{\alpha i} = A_{\alpha i} - \epsilon_{\alpha i 3} K^3 . \tag{8.8}$$

Określenie "agregat afinorowy" zastąpimy w dalszym ciągu określeniem "agregat".

Ponieważ pomiędzy elementami macierzy (8.1) istnieją związki (5.6) i (5.7), agregaty $A_{\alpha i}$ oraz A_i i K_3 są z sobą powiązane. Zachodzi

$$\left.\begin{aligned} A^{(+)}_{[\alpha\beta]} &= 2(2\delta^2 D\omega_{\alpha\beta}\,;\ \sqrt{3}\,v_{\alpha\beta}\,;\ 0\,;\ 0) \\ A^{(-)}_3 &= 2\delta_0 (0;\ 0;\ \varphi_3\,;\ \tfrac{2}{\sqrt{3}}\delta^2 D\gamma_3)\,; \end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

mnożąc pierwsze z tych równań prawostronnie przez e_{12} otrzymujemy

$$A^{(+)}_{[\alpha\beta]} e_{12} = 2(0;\ 0;\ \sqrt{3}\,v_{\alpha\beta}\,;\ 2\delta^2 D\omega_{\alpha\beta}) , \tag{8.10}$$

co zgodnie z (5.6) i (5.7) daje

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{3}A^{3(-)} &= \delta_0\, \epsilon^{\mu\nu 3} A^{(+)}_{[\mu\nu]} e_{12} \\ \delta_0 A^{(+)}_{[\alpha\beta]} &= -\sqrt{3}\,\epsilon_{\alpha\beta 3} A^{3(-)} e_{12}\,, \quad A^3 = A_3 \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

Analogicznie zachodzi

$$\left.\begin{aligned} A^{(+)}_{\alpha 3} &= 2(2\delta^2 D\,\omega_{\alpha 3}\,;\ \sqrt{3}\,v_{\alpha 3}\,;\ 0,\ 0) \\ A^{(-)}_{\alpha} &= 2\delta_0(0;\ 0;\ x_\alpha\,;\ \tfrac{2}{\sqrt{3}}\,\delta^2 D\,\gamma_\alpha)\,; \end{aligned}\right\} \qquad (8.12)$$

pomnożenie prawostronne przez e_{12} pierwszego z równań daje

$$A^{(+)}_{\alpha 3}\, e_{12} = 2(0\,;\ 0;\ \sqrt{3}\,v_{\alpha 3}\,;\ 2\delta^2 D\,\omega_{\alpha 3}), \qquad (8.13)$$

a zgodnie z (5.6) i (5.7) otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{3}\,A^{(-)}_{\alpha} &= \delta_0\, a_{\alpha\mu}\, \epsilon^{\mu\nu 3}\, A^{(+)}_{\nu 3}\, e_{12} \\ \delta\, A^{(+)}_{\alpha 3} &= \sqrt{3}\, \epsilon_{\alpha 3\mu}\, a^{\mu\nu}\, A^{(-)}_{\nu}\, e_{12}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (8.14)$$

Zachodzi również związek pomiędzy A_3 i K_3. Ponieważ

$$\left.\begin{aligned} A^{(-)}_{3} &= 2\delta_0(0;\ 0;\ x_3;\ \tfrac{2}{\sqrt{3}}\,\delta D\gamma) \\ K^{(+)}_{3} &= 2(2\delta^2 D\gamma_3\,;\ \sqrt{3}\,\alpha_3;0;0), \end{aligned}\right\} \qquad (8.15)$$

związek ten posiada postać

$$\delta_0\, K^{(+)}_3 e_{12} = 2\delta K_3\, e_{12} = \sqrt{3}\, A^{(-)}_3\,, \qquad (8,16)$$

gdyż $K^{(+)}_3 = 2K_3$ i $K^{(-)}_3 = 0$ z uwagi na $\Theta_3 = \vartheta_3 = 0$.

Ostatnią grupę równań wyjściowych (obok równań różniczkowych i związków (8.5), (8.8), (8.11), (8.14) i (8.16) stanowią równania fizyczne. Równania tensorowe (6.8) przyjmą w zapisie agregatowym postać

$$2\tilde{B}^{(+)}_{\alpha\beta} = \lambda d[(\overset{1}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu} + \overset{2}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta})\,\tilde{B}^{(-)}_{\mu\nu}\, e_2 + (\overset{1}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} - \overset{2}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta})\, e_2\, \tilde{B}^{(-)}_{\mu\nu}], \qquad (8.17)$$

gdyż

$$\left.\begin{aligned} \tilde{B}^{(+)}_{\alpha\beta} &= 2(2\delta^2 D\,\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}\,;\ \sqrt{3}\,\tilde{m}_{\alpha\beta}\,;\ 0\,;\ 0) \\ \lambda\tilde{B}^{(-)}_{\mu\nu}\,e_2 &= 2(\delta\,\tilde{t}_{\mu\nu}\,;\ \tfrac{2}{\sqrt{3}}\,\delta^3 D\,\tilde{\chi}_{\mu\nu}\,;\ 0\,;\ 0) \\ \lambda\,e_2\,B^{(-)}_{\mu\nu} &= 2(\delta\,\tilde{t}_{\mu\nu}\,;\ -\tfrac{2}{\sqrt{3}}\,\delta^3 D\chi_{\mu\nu}\,;\ 0\,;\ 0). \end{aligned}\right\} \qquad (8.18)$$

Analogicznie dla równań (6.7) otrzymamy poniższy zapis agregatowy

$$2\tilde{B}^{(-)}_{\alpha\beta} = \lambda^{-1} d\left[(\overset{2}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} + \overset{1}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta})\,\tilde{B}^{(+)}_{\mu\nu}\,e_2 - (\overset{2}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} - \overset{1}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta})\,e_2\,\tilde{B}^{(-)}_{\mu\nu}\right]. \qquad (8.19)$$

Wprowadzając oznaczenia

$$2\,S^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} = \overset{1}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} + \overset{2}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}\,;\quad 2R^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} = \overset{1}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} - \overset{2}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} \qquad (8.20)$$

$$2\,\bar{S}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} = \overset{2}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} + \overset{1}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}\,;\quad 2\bar{R}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} = \overset{2}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} - \overset{1}{K}{}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}, \qquad (8.21)$$

równaniom (8.17) i (8.19) nadamy postać

$$\left.\begin{aligned} \tilde{B}^{(+)}_{\alpha\beta} &= \lambda d(S^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}\,\tilde{B}^{(-)}_{\mu\nu}\,e_2 + R^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}\,e_2\,\tilde{B}^{(-)}_{\mu\nu}) \\ \tilde{B}^{(-)}_{\alpha\beta} &= \lambda^{-1} d(\bar{S}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}\,\tilde{B}^{(+)}_{\mu\nu}\,e_2 - \bar{R}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}\,e_2\,\tilde{B}^{(+)}_{\mu\nu}). \end{aligned}\right\} \qquad (8.22)$$

Dla powłok izotropowych z (6.13), (8.20) i (8.21) otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} S^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} &= \bar{S}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} = \nu\,a^{\nu}_{\beta}\,\epsilon^{\cdot\mu}_{\alpha} \\ R^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} &= \bar{R}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} = a^{\mu}_{\alpha}\,\epsilon^{\cdot\nu}_{\beta} \end{aligned}\right\} \qquad (8.23)$$

Zgodnie z (6.15) możemy równania fizyczne dla powłoki izotropowej napisać w postaci

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{1-\nu^2}\,\tilde{B}^{(+)}_{\alpha\beta} &= \lambda(\epsilon_\beta^{\cdot\nu} e_2 \tilde{B}^{(-)}_{\alpha\nu} + \nu\epsilon_\alpha^{\cdot\mu} \tilde{B}^{(-)}_{\mu\beta} e_2) \\ \sqrt{1-\nu^2}\,\tilde{B}^{(-)}_{\alpha\beta} &= \lambda^{-1}(-\epsilon_\beta^{\cdot\nu} e_2 \tilde{B}^{(+)}_{\alpha\nu} + \nu\epsilon_\alpha^{\cdot\mu} \tilde{B}^{(+)}_{\mu\beta} e_2). \end{aligned}\right\} \quad (8.24)$$

Równania fizyczne w ujęciu (8.22) (lub (8.24)) określają agregat "minusowy" przez "plusowy" i odwrotnie.

9. WARUNKI CAŁKOWALNOŚCI NA V_2

W tym rozdziale zostaną podane warunki, które muszą spełniać agregaty $B_{\alpha\beta}$ i $A_{\alpha 3}$, aby równania różniczkowe (8.2) - (8.4) były całkowalne. Punktem wyjścia niech będzie tożsamość ([17], s.207).

$$'\nabla_{[\gamma}\,'\nabla_{\alpha]} A_\beta = -\frac{1}{2} R_{\gamma\alpha\beta}^{\cdot\cdot\varrho} A_\varrho , \qquad (9.1)$$

w której $R_{\gamma\alpha\beta}^{\cdot\cdot\varrho}$ jest afinorem krzywiznowym przestrzeni V_2 (tensorem Riemanna - Christoffela). Zgodnie z (9.1), warunek całkowalności równania (8.2) ma postać

$$'\nabla_{[\gamma}(B_{\alpha]\beta} + b_{\alpha]\beta} A_3 + \epsilon_{\alpha]\beta} K_3) = -\frac{1}{2} R_{\gamma\alpha\beta}^{\cdot\cdot\varrho} A_\varrho . \qquad (9.2)$$

Korzystając z równań Gaussa i Mainardi - Codazzi dla powierzchni V_2 zanurzonej w R_3 (por. [17], s.276):

$$\left.\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= a_{\delta\mu} R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\mu} = -2b_{\gamma[\delta} b_{\beta]\alpha} \\ '\nabla_{[\gamma} b_{\beta]\gamma} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (9.3)$$

można (9.2) napisać w postaci

$$'\nabla_{[\gamma} B_{\alpha]\beta} - b_{\beta[\alpha}\,'\nabla_{\gamma]} A_3 + \epsilon_{\beta[\alpha}\,'\nabla_{\gamma]} K_3 = b_{\alpha[\varrho} b_{\beta]\gamma} A^\varrho . \qquad (9.4)$$

Warunek powyższy przekształćmy, wyrażając agregaty A_i oraz K_3 za pomocą $A_{\alpha 3}$. Z równań (8.4) i (8.16) otrzymamy

$$'\nabla_\gamma A_3 = A_{\gamma 3} - b_{\gamma\varrho} A^\varrho \tag{9.5}$$

$$'\nabla_\gamma K_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2\delta_0}\, '\nabla_\gamma A_3^{(-)} e_{12} = -\frac{\sqrt{3}}{2\delta_0}\left(A_{\gamma 3}^{(-)} - b_\gamma^\mu A_\mu^{(-)}\right) e_{12}\,, \tag{9.6}$$

a korzystając następnie z (8.14)

$$3A_\mu^{(-)} = \delta_0\, \epsilon_\mu^{\cdot\pi} A_{\pi 3}^{(+)} e_{12}\,, \tag{9.7}$$

związek (9.6) napiszemy w postaci

$$'\nabla_\gamma K_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2\delta_0} A_{\gamma 3}^{(-)} e_{12} - \frac{1}{2} b_{\gamma\nu}\, \epsilon^{\nu\pi} A_\pi^{(+)}\,. \tag{9.8}$$

Podstawiając prawe strony (9.5) i (9.8) do (9.4), po przeprowadzeniu redukcji, otrzymujemy

$$'\nabla_{[\gamma} B_{\alpha]\beta} - b_{\beta[\alpha} A_{\gamma]3} - \frac{\sqrt{3}}{2\delta_0}\, \epsilon_{\beta[\alpha} A_{\gamma]3}^{(-)} e_{12} - \frac{1}{2}\, \epsilon_{\beta[\alpha} b_{\gamma]\nu} \epsilon^{\nu\pi} A_{\pi 3}^{(+)} = 0 \tag{9.9}$$

Ponieważ

$$-\epsilon_{\beta[\alpha} b_{\gamma]\nu}\, \epsilon^{\nu\pi} A_{\pi 3}^{(+)} = b_{\beta[\alpha} A_{\gamma]3}^{(+)} \tag{9.10}$$

oraz

$$-b_{\beta[\alpha} A_{\gamma]3} + \frac{1}{2} b_{\beta[\alpha} A_{\gamma]3}^{(+)} = -\frac{1}{2} b_{\beta[\alpha} A_{\gamma]3}^{(-)}\,, \tag{9.11}$$

równanie (9.9) przyjmie postać

$$2\delta_0\, '\nabla_{[\gamma} B_{\alpha]\beta} + A_{[\gamma 3}^{(-)} \left(\epsilon_{\alpha]\beta} \sqrt{3}\, e_{12} + b_{\alpha]\beta} \delta_0\right) = 0 \tag{9.12}$$

stanowiącą szukany warunek całkowalności równania różniczkowego (8.2). Warunkowi temu można nadać inny kształt; w tym

celu pomnóżmy (9.12) ze strony lewej i prawej przez e_1. Ponieważ dla dowolnego agregatu A zachodzi

$$\left.\begin{aligned} e_1 A^{(-)} e_1 &= \bar{A} - \bar{\bar{A}} = \bar{A} - A = -A^{(-)} \\ e_1 A^{(-)} e_{12} e_1 &= -e_1 A^{(-)} e_1 e_{12} = A^{(-)} e_{12} \end{aligned}\right\} \qquad (9.13)$$

w wyniku mnożenia otrzymamy

$$2\delta_0 \, {}'\nabla_{[\gamma} B^{(+)}_{\alpha]\beta} + A^{(-)}_{|\gamma 3} (\epsilon_{\alpha]\beta} \sqrt{3}\, e_{12} - b_{\alpha]\beta} \delta_0) = 0. \qquad (9.14)$$

Odejmując i dodając stronami (9.12) i (9.14), otrzymamy zapis warunków całkowalności równania (8.2) przy pomocy agregatów "plusowych" i "minusowych":

$$\left.\begin{aligned} \delta_0 \, {}'\nabla_{[\gamma} B^{(+)}_{\alpha]\beta} + A^{(-)}_{[\gamma 3} \epsilon_{\alpha]\beta} \sqrt{3}\, e_{12} &= 0 \\ {}'\nabla_{[\gamma} B^{(-)}_{\alpha]\beta} + A^{(-)}_{[\gamma 3} b_{\alpha]\beta} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9.15)$$

Warunki całkowalności równania (8.3) wynikają od razu z (8.8) i drugiego z powyższych równań:

$${}'\nabla_{[\gamma} A^{(-)}_{\alpha]\beta} + A^{(-)}_{[\gamma 3} b_{\alpha]\beta} = 0, \qquad (9.16)$$

gdyż $K^{(-)}_3 \equiv 0$.

Ponieważ pochodne kowariantne występujące w niniejszej pracy są określone przy pomocy symboli Christoffela (pochodna kowariantna wrodzona), afinor skręcenia jest równy tożsamościowo zeru i zachodzi

$${}'\nabla_{[\beta} \, {}'\nabla_{\alpha]} A_3 = 0. \qquad (9.17)$$

Związek ten pozwala na napisanie warunków całkowalności równania (8.4) w postaci

$${}'\nabla_{[\beta} A_{\alpha|3} + b^{\mu}_{[\alpha} \, {}'\nabla_{\beta]} A_{\mu} = 0. \qquad (9.18)$$

Ponieważ z (8.2) wynika

$$'\nabla_\beta A_\mu = B_{\beta\mu} + b_{\beta\mu} A_3 + \epsilon_{\beta\mu} K_3 \tag{9.19}$$

oraz zachodzi

$$b^\mu_{[\alpha} b_{|\mu|\beta]} = c_{[\alpha\beta]} = 0, \tag{9.20}$$

równanie (9.18) przyjmuje postać

$$'\nabla_{[\beta} A_{\alpha]3} + b^\mu_{[\alpha} (\bar{B}_{|\mu|\beta]} - \epsilon_{\beta]\alpha} \bar{K}_3) = 0. \tag{9.21}$$

Podobnie jak w przypadku warunku (9.12), również i powyższemu warunkowi nadamy drugą postać. W tym celu dokonamy "kreskowania" agregatów równania (9.21)

$$'\nabla_{[\beta} \bar{A}_{\alpha]3} + b^\mu_{[\alpha} (\bar{B}_{|\mu|\beta]} - \epsilon_{\beta]\alpha} \bar{K}_3) = 0; \tag{9.22}$$

odejmując i dodając następnie stronami (9.21) i (9.22) otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} &'\nabla_{[\beta} A^{(+)}_{\alpha]3} + b^\mu_{[\alpha} B^{(+)}_{|\mu|\beta]} - 2b^\mu_{[\alpha} \epsilon_{\beta]\mu} K_3 = 0 \\ &'\nabla_{|\beta} A^{(-)}_{\alpha]3} + b^\mu_{[\alpha} B^{(-)}_{|\mu|\beta]} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.23}$$

Drugie z równań jest równoważne warunkowi

$$'\nabla_{[\beta} A^{(-)}_{\alpha]3} + b^\mu_{[\alpha} A^{(-)}_{|\mu|\beta]} = 0. \tag{9.24}$$

Na zakończenie tego rozdziału przedstawmy znaczenie fizykalne wyprowadzonych warunków całkowalności. Wyrażając agregaty $A_{\alpha\beta}$ i $A_{\alpha 3}$ przez agregaty $\tilde{B}_{\alpha\beta}$ i $\tilde{\tilde{B}}_{\alpha\beta}$ a następnie przez ich składniki, łatwo stwierdzić, że (9.12) oraz (9.24) są wspólnym ujęciem różniczkowych niejednorodnych warunków równowagi oraz warunkow nierozdzielności odkształcenia uwzględniających wpływ pola temperatury. Zastosowanie ujęcia agregatowego nadało tym równaniom bardzo zwięzłą formę.

10. WARUNKI CAŁKOWALNOŚCI W R_3

W poprzednim rozdziale przedstawiono warunki całkowalności równań różniczkowych (8.2) - (8.4). Obecnie podane zestaną warunki całkowalności równoważnych im równań (8.6) lub (8.7). Ponieważ występujące w tych równaniach wielkości i pochodne kowariantne są określone w R_3, nie potrzeba korzystać z równań Gaussa i Mainardiego - Codazzi (9.3). Z uwagi na zerowanie się afinora krzywiznowego R_3, zachodzi przemienność różniczkowania kowariantnego

$$\nabla_{[\beta} \nabla_{\alpha]} A_i = 0 . \tag{10.1}$$

Umożliwia to napisania warunków całkowalności (8.7) w prostej postaci

$$\nabla_{[\gamma} A_{\alpha]i} = 0 ; \tag{10.2}$$

dla równania (8.6) otrzymamy zgodnie z (8.8)

$$\nabla_{[\gamma} B_{\alpha]\beta} + \epsilon_{\beta[\alpha 3} \nabla_{\gamma]} K^3 = 0 . \tag{10.3}$$

Łatwo wykazać, że warunki (10.2) lub (10.3) są równoważne warunkom całkowalności (9.12) i (9.21). Kładąc w (10.2) $i = 0$, otrzymujemy

$$\nabla_{[\beta} A_{\alpha]3} = \nabla_{[\beta} A_{\alpha]3} + b^{\mu}_{[\alpha} A_{\mu|\beta]} = 0 . \tag{10.4}$$

Rugując z (10.4) agregat $A_{\mu\beta}$ przy pomocy (8.8), ponieważ dla $\eta_3 = 0$ jest $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta 3}$, otrzymujemy od razu warunek całkowalności (9.21).

Eliminując z (10.3) pochodną $\nabla_{\gamma} K^3$ zgodnie z (9.8)

$$2\delta_0 \nabla_{[\gamma} B_{\alpha]\beta} - \epsilon_{\beta]\alpha} (\sqrt{3} A^{(-)}_{\gamma]3} e_{12} + \delta_0 b_{\gamma]\nu} \epsilon^{\nu\pi} A^{(+)}_{\pi 3}) = 0 , \tag{10.5}$$

oraz ponieważ

$$\nabla_{[\gamma} B_{\alpha]\beta} = {}^{\prime}\nabla_{[\gamma} B_{\alpha]\beta} - b_{\beta[\alpha} B_{\gamma]3} , \qquad (10.6)$$

otrzymujemy (ponieważ $B_{\gamma 3} \equiv A_{\gamma 3}$) warunek (9.9) z którego wynika bezpośrednio (9.12).

Porównanie zapisu w którym wielkości są określone w R_3 (dla $\eta_3 = 0$) z formą zapisu posługującą się pochodną kowariantną za V_2 (stosowanego w znanych autorowi opracowaniach) wskazuje na większą zwięzłość i operatywność pierwszego sposobu. Drugie ujęcie umożliwia natomiast łatwiejsze przejście do określonej parametryzacji V_2 i współrzędnych fizykalnych.

11. DODATKOWE ZWIĄZKI ALGEBRAICZNE

Oprócz równań różniczkowych podanych w rozdziale ósmym, równań fizycznych oraz warunków całkowalności, agregaty spełniać muszą dodatkowe związki algebraiczne, wynikające z uproszczenia nie różniczkowego warunku równowagi oraz z przyjętej postaci równań fizycznych. Związki te zostaną poniżej wyprowadzone.

Dokonajmy uskośnienia wskaźników w równaniu (8.8)

$$B_{[\alpha\beta]} = A_{[\alpha\beta]} - \epsilon_{\alpha\beta 3} K^3 . \qquad (11.1)$$

Ponieważ z (8.16) i (8.11) wynika

$$K_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2\delta_0} A_3^{(-)} e_{12} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} A^{(+)}_{[\mu\nu]} , \qquad (11.2)$$

rugując K_3 z (11.1) otrzymujemy

$$B_{[\alpha\beta]} = A_{[\alpha\beta]} - \frac{1}{2} A^{(+)}_{[\alpha\beta]} = A^{(-)}_{[\alpha\beta]} . \qquad (11.3)$$

Dokonując "kreskowania" równania (11.3) (por. (9.13))

$$\bar{B}_{[\alpha\beta]} = -A^{(-)}_{[\alpha\beta]}, \tag{11.4}$$

a następnie dodając i odejmując stronami (11.3) i (11.4) dochodzimy do poniższych zależności

$$\left.\begin{aligned} B^{(+)}_{[\alpha\beta]} &= 0 \\ B^{(-)}_{[\alpha\beta]} &= 2A^{(-)}_{[\alpha\beta]}. \end{aligned}\right\} \tag{11.5}$$

Pierwsze z równań jest warunkiem symetrii agregatu $B^{(+)}_{\alpha\beta}$, co jest zgodne z uprzednim założeniem symetrii afinorów $\varepsilon_{\alpha\beta}$ i $m_{\alpha\beta}$. Przyjmując ponadto $\overset{*}{m}_{[\alpha\beta]} = 0$, otrzymamy

$$\overset{*}{B}{}^{(+)}_{[\alpha\beta]} = 0 \tag{11.6}$$

skąd, z uwagi na (8.5), zachodzi także

$$\tilde{B}^{(+)}_{[\alpha\beta]} = 0. \tag{11.7}$$

Drugie z równań (11.5) określa znaczenie wprowadzonych w tej pracy wielkości $k_{\alpha\beta}$ i $\zeta_{\alpha\beta}$ jako

$$\left.\begin{aligned} k_{\alpha\beta} &= t_{[\alpha\beta]} \\ \zeta_{\alpha\beta} &= \chi_{[\alpha\beta]}. \end{aligned}\right\} \tag{11.8}$$

Dokonajmy uskośnienia wskaźników α, β w równaniu fizycznym (8.24). Z uwagi na (11.7) otrzymujemy

$$e_2\, \epsilon_{[\beta}{}^{\cdot\nu}\, \tilde{B}^{(-)}_{|\nu|\alpha]} + \nu\, \epsilon_{[\alpha}{}^{\cdot\nu}\, \tilde{B}^{(-)}_{\beta]\nu}\, e_2 = 0 \tag{11.9}$$

co prowadzi do

$$\epsilon_{[\alpha}{}^{\cdot\nu}\, \tilde{B}^{(-)}_{|\nu|\beta]} = 0. \tag{11.10}$$

Równanie powyższe wyraża symetrię agregatu $\epsilon_{\alpha}^{\cdot\nu}\tilde{B}^{(-)}_{\nu\beta}$ (lub agregatu $\epsilon_{\alpha}^{\cdot\nu}\tilde{B}^{(-)}_{\beta\nu}$). Otrzymujemy stąd

$$\tilde{t}_{11} + \tilde{t}_{22} = \tilde{\chi}_{11} + \tilde{\chi}_{22} = 0. \tag{11.11}$$

Przyjmując $\epsilon_{[\alpha}^{\cdot\nu} t^{*}_{|\mu|\beta]} = 0$, otrzymamy

$$\epsilon_{[\alpha}^{\cdot\nu} \overset{*}{B}{}^{(-)}_{|\mu|\beta]} = 0, \tag{11.12}$$

co z uwagi na (8.5) daje również

$$\epsilon_{[\alpha}^{\cdot\nu} B^{(-)}_{|\mu|\beta]} = 0. \tag{11.13}$$

Związek (11.11) prowadzi do symetrii stosowanych powszechnie afinorów $\Gamma^{\alpha\beta}$ i $\mu_{\alpha\beta}$; symetria ta jest założeniem stosowanym w teorii przybliżonej powłok i dotyczy również powłok anizotropowych.

Równania dodatkowe (11.5) - (11.7) oraz (11.10), (11.12) i (11.13) można napisać w postaci

$$\left.\begin{aligned} B^{(+)}_{[\alpha\beta]} + \epsilon_{[\alpha}^{\cdot\nu} B^{(-)}_{|\mu|\beta]} &= 0 \\ \tilde{B}^{(+)}_{[\alpha\beta]} + \epsilon_{[\alpha}^{\cdot\nu} \tilde{B}^{(-)}_{|\mu|\beta]} &= 0 \\ \overset{*}{B}{}^{(+)}_{[\alpha\beta]} + \epsilon_{[\alpha}^{\cdot\nu} \overset{*}{B}{}^{(-)}_{|\mu|\beta]} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{11.14}$$

Równania powyższe redukują ilość niezależnych składowych każdego z agregatów B, $\tilde{B}$, $\overset{*}{B}$ do trzech. Ponieważ

$$B^{(-)}_{\alpha\beta} = A^{(-)}_{\alpha\beta} \tag{11.15}$$

otrzymamy warunek dla $A^{(-)}_{\alpha\beta}$:

$$\epsilon_{[\alpha}^{\cdot\nu} A^{(-)}_{|\mu|\beta]} = 0. \tag{11.16}$$

12. ZESTAWIENIE I PODZIAŁ RÓWNAŃ AGREGATOWYCH

Podstawowe równania teorii powłok w ujęciu agregatowym można podzielić na cztery grupy. Poniżej dokonamy klasyfikacji i zestawienia uprzednio wyprowadzonych równań.

1. Pierwszą grupę równań niech stanowią związki pomiędzy składowymi afinorów stanu odkształcenia i napięcia z jednej strony a składowymi wektorów przemieszczenia, małego obrotu i funkcjami naprężeń z drugiej strony.
Związki te dane są równaniami

$$B_{\alpha\beta} = {}^{1}\nabla_{\alpha} A_{\beta} - b_{\alpha\beta} A_3 - \varepsilon_{\alpha\beta} K_3 \qquad (12.1.1)$$

$$A_{\alpha\beta} = {}^{1}\nabla_{\alpha} A_{\beta} - b_{\alpha\beta} A_3 \qquad (12.1.2)$$

$$A_{\alpha 3} = {}^{1}\nabla_{\alpha} A_3 + b^{\mu}_{\alpha} A_{\mu} \qquad (12.1.3)$$

Równania powyższe, posługując się pochodną kowariantną w R_3 przedstawiono również w zwięzłej postaci

$$A_{\alpha i} = \nabla_{\alpha} A_i \qquad (12.1.4)$$

2. Warunki całkowalności równań różniczkowych (12.1) są równoważne warunkom równowagi i warunkom nierozdzielności odkształcenia. Przedstawiono je w postaci

$$2\delta_0\, {}^{1}\nabla_{[\gamma} B_{\alpha]\beta} + A^{(-)}_{[\gamma 3} \left(e_{\alpha]\beta}\sqrt{3}\, e_{12} + b_{\alpha]\beta}\delta_0\right) = 0 \qquad (12.2.1)$$

$$ {}^{1}\nabla_{[\beta} A_{\alpha]3} + b^{\mu}_{[\alpha} \left(B_{|\mu|\beta]} - \varepsilon_{\beta]\mu} K_3\right) = 0, \qquad (12.2.2)$$

lub, stosując agregaty "plusowe" i minusowe", jako

$$\delta_0\, {}^{1}\nabla_{[\gamma} B^{(+)}_{\alpha]\beta} + A^{(-)}_{[\gamma 3}\, \varepsilon_{\alpha]\beta}\sqrt{3}\, e_{12} = 0 \qquad (12.2.3)$$

$$ {}^{1}\nabla_{[\gamma} \mathbf{B}^{(-)}_{\alpha]\beta} + \mathbf{A}^{(-)}_{[\gamma 3} b_{\alpha]\beta} = 0 \qquad (12.2.4) $$

$$ {}^{1}\nabla_{[\beta} \mathbf{A}^{(+)}_{\alpha]3} + b^{\mu}_{[\alpha} \mathbf{B}^{(+)}_{|\mu|\beta]} - 2b^{\mu}_{[\alpha} \epsilon_{\beta]\mu} K_3 = 0 \qquad (12.2.5) $$

$$ {}^{1}\nabla_{[\beta} \mathbf{A}^{(-)}_{\alpha]3} + b^{\mu}_{[\alpha} \mathbf{B}^{(-)}_{|\mu|\beta]} = 0. \qquad (12.2.6) $$

Warunki całkowalności równań (12.1.4) posiadają prostą postać

$$ \nabla_{[\gamma} \mathbf{A}_{\alpha]i} = 0 \qquad (12.2.7) $$

z której, jak wykazano, można uzyskać (12.2.1) i (12.2.2).

3. Równania, "fizyczne" przyjęto zgodnie z uproszczeniami teorii Love'a - Kirchhoffa. W zapisie agregatowym posiadają one postać

$$ \tilde{\mathbf{B}}^{(+)}_{\alpha\beta} = \tilde{\lambda} d\left(S^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{B}}^{(-)}_{\mu\nu} e_2 + R^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} e_2 \tilde{\mathbf{B}}^{(-)}_{\mu\nu} \right) \qquad (12.3.1) $$

$$ \tilde{\mathbf{B}}^{(-)}_{\alpha\beta} = \lambda^{-1} d\left(\bar{S}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{B}}^{(+)}_{\mu\nu} e_2 - \bar{R}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta} e_2 \tilde{\mathbf{B}}^{(+)}_{\mu\nu} \right) \qquad (12.3.2) $$

pozwalającą wyrazić agregat "plusowy" przez "minusowy" lub odwrotnie. Dla powłok izotropowych równania powyższe sprowadzają się do postaci

$$ \sqrt{1-\nu^2}\, \tilde{\mathbf{B}}^{(+)}_{\alpha\beta} = \lambda\left(\epsilon^{\cdot\nu}_{\beta} e_2 \tilde{\mathbf{B}}^{(-)}_{\alpha\nu} + \nu \epsilon^{\cdot\mu}_{\alpha} \tilde{\mathbf{B}}^{(-)}_{\mu\beta} e_2 \right) \qquad (12.3.3) $$

$$ \sqrt{1-\nu^2}\, \tilde{\mathbf{B}}^{(-)}_{\alpha\beta} = \lambda^{-1}\left(-\epsilon^{\cdot\nu}_{\beta} e_2 \tilde{\mathbf{B}}^{(+)}_{\alpha\nu} + \nu \epsilon^{\cdot\mu}_{\alpha} \tilde{\mathbf{B}}^{(+)}_{\mu\beta} e_2 \right) \qquad (12.3.4) $$

4. Ostatnią grupę równań niech stanowią pozostałe związki algebraiczne. Zaliczymy tu równania

$$B_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - \epsilon_{\alpha\beta} K^3 \tag{12.4.1}$$

$$B_{\alpha\beta} = \tilde{B}_{\alpha\beta} - \overset{*}{B}_{\alpha\beta} \tag{12.4.2}$$

Agregat $\overset{*}{B}_{\alpha\beta}$ ujmuje wpływ pola temperatury i obciążenia powierzchniowego powłoki. Dalsze równania należące do tej grupy, to związki pomiędzy $A_{\alpha i}$, A_3 i K_3

$$2\delta_0 K_3 e_{12} = \delta_0 K_3^{(+)} e_{12} = \sqrt{3} A_3^{(-)} \tag{12.4.3}$$

$$\sqrt{3} A_\alpha^{(-)} = \delta_0 a_{\alpha\mu} \epsilon^{\mu\nu 3} A_{\nu 3}^{(+)} e_{12} \tag{12.4.4}$$

$$\sqrt{3} A^{3(-)} = \delta_0 \epsilon^{\mu\nu 3} A_{[\mu\nu]}^{(+)} e_{12} \tag{12.4.5}$$

Zaliczamy tutaj wreszcie równania wyrażające własności budowy agregatów afinorowych $B_{\alpha\beta}$, $\tilde{B}_{\alpha\beta}$ i $\overset{*}{B}_{\alpha\beta}$, które napiszemy w postaci

$$\left.\begin{aligned} B_{12}^{(+)} &= B_{21}^{(+)}, \quad B_{11}^{(-)} = -B_{22}^{(-)} \\ \tilde{B}_{12}^{(+)} &= \tilde{B}_{21}^{(+)}, \quad \tilde{B}_{11}^{(-)} = -\tilde{B}_{22}^{(-)} \\ \overset{*}{B}_{12}^{(+)} &= \overset{*}{B}_{21}^{(+)}, \quad \overset{*}{B}_{11}^{(-)} = -\overset{*}{B}_{22}^{(-)} \end{aligned}\right\} \tag{12.4.6}$$

Z równań agregatowych wyprowadzonych w tej pracy i zestawionych w czterech powyższych grupach, można utworzyć różne zupełne układy równań. Niektóre z nich przedstawiono w następnym rozdziale.

13. ZUPEŁNE UKŁADY RÓWNAŃ

Wśród zupełnych układów równań[x)] teorii powłok, najczęściej można spotkać w literaturze przedmiotu układ dający rozwiązanie dla sił i momentów oraz układ w którym niewiadomymi są przemieszczenia i funkcje naprężeń (por.[9]). W rozdziale tym zostaną przedstawione odpowiedniki tych układów w sformułowaniu agregatowym oraz takież równanie dla powłoki mało wyniosłej.

Wyprowadźmy na wstępie układ zupełny dla agregatu $\tilde{B}_{\alpha\beta}$ Wykorzystamy w tym celu warunki całkowalności, równania fizyczne i zależności (12.4.2).

Wyznaczmy naprzód z (12.2.3) agregat $A^{(-)}_{\gamma 3}$, nasuwając na to równanie $\epsilon^{\gamma\alpha}$ i mnożąc je prawostronnie przez e_{12}

$$A^{(-)}_{\beta 3} = -\frac{\delta_0}{\sqrt{3}}\,\epsilon^{\gamma\alpha}\,{}^{1}\nabla_{\gamma} B^{(+)}_{\alpha\beta}\, e_{12} \tag{13.1}$$

Rugując z (12.2.4) i (12.2.6) agregat $A^{(-)}_{\alpha 3}$ przy pomocy (13.1), otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} &{}^{1}\nabla_{[\gamma} B^{(-)}_{\alpha]\beta} - \frac{\delta_0}{\sqrt{3}}\,\epsilon^{\mu\nu}\,{}^{1}\nabla_{\mu} B^{(+)}_{\nu[\gamma}\, b_{\alpha]\beta}\, e_{12} = 0 \\ &-\frac{\delta_0}{\sqrt{3}}\,\epsilon^{\mu\nu}\,{}^{1}\nabla_{[\beta}\,{}^{1}\nabla_{|\mu} B^{(+)}_{\nu|\alpha]}\, e_{12} + b^{\mu}_{[\alpha} B^{(-)}_{|\mu|\beta]} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

Podstawmy do (13.2) zamiast $B_{\alpha\beta}$ różnicę $\tilde{B}_{\alpha\beta} - \overset{*}{B}_{\alpha\beta}$, zgodnie z (12.4.2). Wprowadźmy oznaczenia

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} P_{\gamma} &= {}^{1}\nabla_{[\alpha} \overset{*}{B}{}^{(-)}_{\beta]\gamma} - \frac{\delta}{\sqrt{3}}\,\epsilon^{\mu\nu}\,{}^{1}\nabla_{\mu} \overset{*}{B}{}^{(+)}_{\nu[\alpha}\, b_{\beta]\gamma}\, e_{12} \\ \epsilon_{\alpha\beta} P_{3} &= -\frac{\delta}{\sqrt{3}}\,\epsilon^{\mu\nu}\,{}^{1}\nabla_{[\beta}\,{}^{1}\nabla_{|\mu} \overset{*}{B}{}^{(+)}_{\nu|\alpha]}\, e_{12} + b^{\mu}_{[\alpha} \overset{*}{B}_{|\mu|\beta]}. \end{aligned}\right\} \tag{13.3}$$

Z (8.1) wynika, że agregat $\overset{*}{B}_{\alpha\beta}$ ma postać

$$\overset{*}{B}_{\alpha\beta} = -\sqrt{3}\, D\alpha_t \tau_0 a_{\alpha\beta} + \sqrt{3}\, \overset{*}{m}_{\alpha\beta} e_1 + \delta_0 \overset{*}{t}_{\alpha\beta} e_2 - \delta_0 D\alpha_t \tau \epsilon_{\alpha\beta} e_{12}. \tag{13.4}$$

---

x) Por. str. 17, odsyłacz.

Podstawiając (13,4) do (13.3), otrzymamy

$$\left.\begin{aligned}
\epsilon_{\alpha\beta}P_\gamma &= 2\delta_0\left[{}'\nabla_{[\alpha}\overset{*}{t}_{\beta]\gamma} - \epsilon^{\mu\nu}{}'\nabla_\mu \overset{*}{m}_{\nu[\alpha}b_{\beta]\gamma}\right]e_2 - \\
&- 2\delta_0\left[\epsilon_{[\beta|\gamma|}{}'\nabla_{\alpha]}(Dx_t\tau) + a_{\nu[\alpha}b_{\beta]\gamma}\epsilon^{\mu\nu}{}'\nabla_\mu(Dx_t\tau_0)\right]e_{12} \\
\epsilon_{\alpha\beta}P_3 &= 2\delta_0\left[h^\mu_{[\alpha}\overset{*}{t}_{\beta]\mu} - \epsilon^{\mu\nu}{}'\nabla_{[\beta}{}'\nabla_{|\mu|}(\overset{*}{m}_{\alpha]\nu})\right]e_2 \\
&- 2\delta_0\left[Dx_t b^\mu_{[\alpha}\epsilon_{\beta]\mu}\tau + \epsilon^{\mu\nu}a_{\nu[\alpha}{}'\nabla_{\beta]}{}'\nabla_\mu(Dx_t\tau_0)\right]
\end{aligned}\right\} \quad (13.5)$$

Ale $\overset{*}{t}_{\alpha\beta}$ i $\overset{*}{m}_{\alpha\beta}$ są całkami szczególnymi układu (3.6). Stosując w (3.6) pochodną kowariantną na V_2, otrzymamy

$$\left.\begin{aligned}
2\,{}'\nabla_{[\mu}\overset{*}{t}_{\nu]\alpha} &= \epsilon_{\nu\mu}X_\alpha \\
2\,h_{[\mu}{}^\varrho\overset{*}{t}_{|\varrho|\nu]} &= \epsilon_{\nu\mu}X_3 \\
\epsilon^{\mu\nu}\nabla_\mu\overset{*}{m}_{\nu\alpha} &= Y_\alpha
\end{aligned}\right\} \quad (13.6)$$

Korzystając z (13.6) można związki (13.5) napisać w postaci

$$\left.\begin{aligned}
\epsilon_{\alpha\beta}P_\gamma &= \delta_0(\epsilon_{\beta\alpha}X_\gamma - Y_{[\alpha}b_{\gamma]\beta})e_2 + 2\delta_0\left[\epsilon_{\gamma[\beta}{}'\nabla_{\alpha]}(Dx_t\tau) - \right. \\
&\left. - \epsilon^{\mu\nu}a_{\nu[\alpha}b_{\beta]\gamma}{}'\nabla_\mu(Dx_t\tau_0)\right]e_{12} \\
\epsilon_{\alpha\beta}P_3 &= \delta_0(\epsilon_{\beta\alpha}X_3 - {}'\nabla_{[\beta}Y_{\alpha]})e_2 - 2\delta_0\left[b^\mu_{[\alpha}\epsilon_{|\mu|\beta]}Dx_t\tau + \right. \\
&\left. + \epsilon^{\mu\nu}a_{\nu[\alpha}{}'\nabla_{\beta]}{}'\nabla_\mu(Dx_t\tau_0)\right]
\end{aligned}\right\} \quad (13.7)$$

W tym przypadku, uprzednie wyznaczenie całek szczególnych $\overset{*}{t}_{\alpha\beta}$ i $\overset{*}{m}_{\alpha\beta}$ niejednorodnych warunków równowagi nie jest konieczne.
Równania (13.2) przyjmują postać

$$\left.\begin{aligned}
{}'\nabla_{[\gamma}\tilde{B}^{(-)}_{\alpha]\beta} - \frac{\delta_0}{\sqrt{3}}\epsilon^{\mu\nu}{}'\nabla\tilde{B}^{(+)}_{\nu[\gamma}b_{a]\beta}e_{12} &= \epsilon_{\gamma\alpha}P_\beta \\
-\frac{\delta_0}{\sqrt{3}}\epsilon^{\mu\nu}{}'\nabla_{[\beta}{}'\nabla_{|\mu}\tilde{B}^{(+)}_{\nu|\alpha]}e_{12} + b^\mu_{[\alpha}\tilde{B}^{(-)}_{|\mu|\beta]} &= \epsilon_{\alpha\beta}P_3
\end{aligned}\right\} \quad (13.8)$$

Korzystając z równań fizycznych (12.3.1) możemy w (13.8) wyrazić $\tilde{B}^{(+)}_{\alpha\beta}$ przez $\tilde{B}^{(-)}_{\alpha\beta}$. Po podstawieniu otrzymamy

$$\left.\begin{aligned}
{}'\nabla_{[\gamma}\tilde{B}^{(-)}_{\alpha]\beta} - \frac{\delta_0}{\sqrt{3}}\epsilon^{\mu\nu}{}'\nabla_\mu\left[\lambda d(S^{\cdot\cdot\pi\varrho}_{|\nu|\alpha]}\tilde{B}^{(-)}_{|\pi\varrho|}e_2 + R^{\cdot\cdot\pi\varrho}_{\nu[\gamma}e_2\tilde{B}^{(-)}_{|\pi\varrho|}\right]b_{\alpha]\beta} &= \epsilon_{\gamma\alpha}P_\beta \\
-\frac{\delta_0}{\sqrt{3}}\epsilon^{\mu\nu}{}'\nabla_{[\beta}{}'\nabla_{|\mu}\left[\lambda d(S^{\cdot\cdot\pi\varrho}_{|\nu|\alpha]}\tilde{B}^{(-)}_{\pi\varrho}e_2 - R^{\cdot\cdot\pi\varrho}_{|\nu|\alpha]}e_2\tilde{B}^{(-)}_{\pi\varrho})\right] + b^\mu_{[\alpha}\tilde{B}^{(-)}_{|\mu|\beta]} &= \epsilon_{\alpha\beta}P_3
\end{aligned}\right\} \quad (13.9)$$

Układ powyższy jest zupełnym układem trzech równań dla trzech agregatów $\tilde{B}^{(-)}_{11} = -\tilde{B}^{(-)}_{22}$, $\tilde{B}^{(-)}_{12}$ i $\tilde{B}^{(-)}_{21}$.

Rugując z równań (13.8) $\tilde{B}^{(-)}_{\alpha\beta}$ przy pomocy (12.3.2), otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} &{}^{1}\nabla_{[\gamma}\left[\lambda^{-1}d\left(\bar{S}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha]\beta}\tilde{B}^{(+)}_{\mu\nu}e_2-\bar{R}^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha]\beta}e_2\tilde{B}^{(+)}_{\mu\nu}\right)\right]-\frac{\delta_0}{\sqrt{3}}\varepsilon^{\mu\nu}{}^{1}\nabla_{\mu}\tilde{B}^{(+)}_{\nu[\gamma}b_{\alpha]\beta}e_{12}=e_{\gamma\alpha}P_{\beta}\\ &-\frac{\delta_0}{\sqrt{3}}\varepsilon^{\mu\nu}{}^{1}\nabla_{[\beta}{}^{1}\nabla_{|\mu}\tilde{B}^{(+)}_{\nu|\alpha]}e_{12}+\lambda^{-1}db^{\mu}_{[\alpha}\left(\bar{S}^{\cdot\cdot\pi\varrho}_{|\mu|\beta]}\tilde{B}^{(+)}_{\pi\varrho}e_2-\bar{R}^{\cdot\cdot\pi\varrho}_{|\mu|\beta]}e_2\tilde{B}^{(+)}_{\pi\varrho}\right)=\varepsilon_{\alpha\beta}P_3 \end{aligned}\right\}\quad(13.10)$$

co stanowi zupełny układ równań dla agregatów $\tilde{B}^{(+)}_{11}$, $\tilde{B}^{(+)}_{22}$ i $\tilde{B}^{(+)}_{12}=\tilde{B}^{(+)}_{21}$. Gdy pominiemy wpływ temperatury i założymy, że powłoka jest obciążona tylko na brzegach, wtedy prawe strony (13.9) i (13.10) są równe zeru.

Aby otrzymać zupełny układ równań, któremu odpowiada rozwiązanie w przemieszczeniach i funkcjach naprężeń, wykorzystamy równania (12.1) oraz równania fizyczne. Te ostatnie, zgodnie z (12.4.2), napiszemy w postaci

$$B^{(+)}_{\alpha\beta}-\lambda d\left(S^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}B^{(-)}_{\mu\nu}e_2+R^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}e_2B^{(-)}_{\mu\nu}\right)=R_{\alpha\beta}\qquad(13.11)$$

w której $R_{\alpha\beta}$ jest znanym agregatem:

$$R_{\alpha\beta}=\lambda d\left(S^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}\overset{*}{B}{}^{(-)}_{\mu\nu}e_2+R^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}e_2\overset{*}{B}{}^{(-)}_{\mu\nu}\right)-\overset{*}{B}{}^{(+)}_{\alpha\beta}\qquad(13.12)$$

Z równań (12.1) wynikają związki

$$\left.\begin{aligned} B^{(+)}_{\alpha\beta}&=\nabla_{\alpha}A^{(+)}_{\beta}+\varepsilon_{\beta\alpha3}K^{3(+)}\\ B^{(-)}_{\alpha\beta}&=\nabla_{\alpha}A^{(-)}_{\beta} \end{aligned}\right\}\qquad(13.13)$$

Ponieważ z (12.4.4.) i (12.1.4) otrzymujemy

$$A^{(-)}_{\alpha}=\frac{\delta_0}{\sqrt{3}}a_{\alpha\mu}\varepsilon^{\mu\nu3}\nabla_{\nu}A^{(+)}_{3}e_{12},\qquad(13.14)$$

oraz z uwagi na $B^{(+)}_{[\alpha\beta]}=0$ (tj. $B^{(+)}_{\alpha\beta}=B^{(+)}_{(\alpha\beta)}$), równania (13.13) można napisać w postaci

$$\left.\begin{aligned} B^{(+)}_{\alpha\beta}&=\nabla_{(\alpha}A^{(+)}_{\beta)}\\ B^{(-)}_{\alpha\beta}&=\frac{\delta_0}{\sqrt{3}}a_{\beta\mu}\varepsilon^{\mu\nu3}\nabla_{\alpha}\nabla_{\nu}A^{(+)}_{3}e_{12} \end{aligned}\right\}\qquad(13.15)$$

Podstawiając (13.15) do (13.11) otrzymujemy zupełny układ trzech równań dla trzech składowych agregatu $\mathbf{A}_i^{(+)}$:

$$\nabla_{(\alpha}\mathbf{A}_{\beta)}^{(+)} - \frac{\delta d}{\sqrt{3}}\left(S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\mu\nu} a_{\nu\pi}\epsilon^{\pi\varrho 3}\nabla_\mu\nabla_\varrho \mathbf{A}_3^{(+)} e_1 + R_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\mu\nu} e_2 a_{\nu\pi}\epsilon^{\pi\varrho 3}\nabla_\mu\nabla_\varrho \mathbf{A}_3^{(+)} e_{12}\right) = \mathbf{R}_{\alpha\beta} \quad (13.16)$$

dla powłok izotropowych posiada on postać:

$$\nabla_{(\alpha}\mathbf{A}_{\beta)}^{(+)} - \frac{\delta}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\left(e_2\epsilon_\beta^{\cdot\nu}\epsilon_\alpha^{\cdot\mu}\nabla_\nu\nabla_\mu \mathbf{A}_3^{(+)} e_{12} - \nu\nabla_\beta\nabla_\alpha \mathbf{A}_3^{(+)} e_1\right) = \mathbf{R}_{\alpha\beta} \quad (13.17)$$

Z powyższego układu równań można wyrugować agregaty $\mathbf{A}_\alpha$ jeżeli wprowadzone zostaną dodatkowe założenia polegające na:

1° pominięciu wpływu przemieszczeń stycznych na kąty obrotu $\omega_{\alpha 3}$,

2° pominięciu wpływu wielkości ψ_α na $v_{\alpha 3}$. Oba powyższe założenia są typowe dla tzw. "technicznej" teorii powłok. W ujęciu przedstawionym w tej pracy są one równoznaczne z wprowadzeniem równości przybliżonej

$$\mathbf{A}_{\alpha 3}^{(+)} = {}^1\nabla_\alpha \mathbf{A}_3^{(+)} + h_\alpha^\mu \mathbf{A}_\mu^{(+)} \cong {}^1\nabla_\alpha \mathbf{A}_3^{(+)} = \nabla_\alpha \mathbf{A}_3^{(+)} \quad (13.18)$$

czyli zastąpieniem w R_3 pola wektorowego $\mathbf{A}_i^{(+)}$ polem wektorowym $\mathbf{A}_\alpha^{(+)}$ i polem skalarowym $\mathbf{A}_3^{(+)}$.

Celem otrzymania równania dla $\mathbf{A}_3^{(+)}$ nasuńmy na (13.16) operator $\epsilon^{\varrho\beta}\epsilon^{\pi\alpha}\nabla_\varrho\nabla_\pi$. Ponieważ

$$\epsilon^{\varrho\beta}\epsilon^{\pi\alpha}\nabla_\varrho\nabla_\alpha\left(\nabla_\alpha \mathbf{A}_\beta^{(+)} + \nabla_\beta \mathbf{A}_\alpha^{(+)}\right) = 0 \quad (13.19)$$

(różniczkowanie kowariantne w R_3 jest przemienne), otrzymamy

$$\epsilon^{\varrho\beta}\epsilon^{\pi\alpha}\nabla_\varrho\nabla_\pi\left[\lambda d a_{\nu\xi}\epsilon^{\xi\rho 3}\left(S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\rho \mathbf{A}_{(3)}^{(+)} e_1 + R_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\mu\nu} e_2\nabla_\mu\nabla_\rho \mathbf{A}_{(3)}^{(+)} e_{12}\right)\right] = \mathbf{S} \quad (13.20)$$

Stosując tę samą operację do (13.17), wobec

$$\epsilon^{\varrho\beta}\epsilon^{\pi\alpha}\nabla_\varrho\nabla_\pi\nabla_\beta\nabla_\alpha \mathbf{A}_{(3)}^{(+)} = 0 \quad (13.21)$$

równanie niejednorodnej powłoki izotropowej przyjmie postać

$$a^{\nu\varrho}a^{\pi\mu}\nabla_\varrho\nabla_\pi\left(\frac{\delta}{\sqrt{1-\nu^2}}V_\nu\nabla_\mu A^{(+)}_{(3)}\right) = S \tag{13.22}$$

W równaniach (13.20) i (13.22) oznaczono

$$S = e_2\sqrt{3}\,\epsilon^{\varrho\beta}\epsilon^{\pi\alpha}\nabla_\varrho\nabla_\pi R_{\alpha\beta}\,e_{12} \tag{13.23}$$

Wyjaśnimy budowę prawej strony równania (13.22). Agregat $R_{\alpha\beta}=R_{(\alpha\beta)}$ ma zgodnie z (13.7) oraz (13.4), poniżej przedstawioną postać

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} = {} & 2\left[\delta(\epsilon_\beta^{\cdot\nu}\overset{*}{t}_{\nu\alpha}+\nu\epsilon_\alpha^{\cdot\nu}\overset{*}{t}_{\beta\nu})+\sqrt{3(1-\nu^2)}\,D\alpha_t\tau_0 a_{\alpha\beta}\right]- \\ & -2\left[\delta(1+\nu)D\alpha_t\tau a_{\alpha\beta}+\sqrt{3(1-\nu^2)}\,\overset{*}{m}_{\alpha\beta}\right]e_1 \end{aligned} \tag{13.24}$$

Nasuwając na (13.24) operator $\Delta^{\alpha\beta}=\epsilon^{\varrho\beta}\epsilon^{\pi\alpha}\nabla_\varrho\nabla_\pi$ występujący po prawej stronie (13.23), otrzymamy (dla powłok izotropowych):

$$\left.\begin{aligned} S = {} & e_2\sqrt{3}\,\epsilon^{\varrho\beta}\epsilon^{\pi\alpha}\nabla_\varrho\nabla_\pi R_{\alpha\beta}\,e_{12} = -2\sqrt{3}\left\{\Delta\left[(1+\nu)\delta D\alpha_t\tau\right]+\right. \\ & \left.+\Delta^{\alpha\beta}\left(\sqrt{3(1-\nu^2)}\,\overset{*}{m}_{\alpha\beta}\right)\right\}-2\sqrt{3}\left\{\Delta^{\alpha\beta}\left[\delta\,\epsilon_\beta^{\cdot\nu}\overset{*}{t}_{\nu\alpha}+\nu\epsilon_\alpha^{\cdot\nu}\overset{*}{t}_{\beta\nu}\right]+\right. \\ & \left.+\Delta\left[\sqrt{3(1-\nu^2)}\,D\alpha_t\tau_0\right]\right\} \end{aligned}\right\} \tag{13.25}$$

gdzie $\Delta = a_{\alpha\beta}\Delta^{\alpha\beta} = a^{\varrho\pi}\nabla_\varrho\nabla_\pi$ jest operatorem Laplaca w R_3. Dla powłok jednorodnych wyrażenie powyższe z uwagi na warunki (13.6) przyjmie postać

$$\left.\begin{aligned} & -2\sqrt{3}\left\{\left[(1+\nu)\delta D\alpha_t\Delta\tau+\sqrt{3(1-\nu^2)}\,(\epsilon^{\varrho\beta}\nabla_\varrho Y_\beta - X_3)\right]+\right. \\ & \left.+\left[\sqrt{3(1-\nu^2)}\,D\alpha_t\Delta\tau_0+\delta(1+\nu)\,a^{\pi\varrho}\nabla_\pi X_\varrho\right]\right\} \end{aligned}\right\} \tag{13.26}$$

określoną przez składowe obciążenia i pole temperatury.

Na zakończenie rozdziału wyprowadzone zostanie równanie teorii powłok mało wyniosłych. Oprócz założenia (13.18), zakładamy euklidesowość powierzchni środkowej powłoki

$$V_2 = R_2 \tag{13.27}$$

skąd wynika przemienność różniczkowania kowariantnego $'\nabla_{[\alpha}{}'\nabla_{\beta]} = 0$. Punktem wyjścia niech będzie równanie (13.16), które napiszemy w postaci

$$\sqrt{3}\left({}'\nabla_{(\alpha}\mathbf{A}^{(+)}_{\beta)} + b_{\alpha\beta}\mathbf{A}^{(+)}_{3}\right) + \delta d\,\epsilon^{\cdot\varrho}_{\nu}\left(S^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}\,{}'\nabla_{\mu}{}'\nabla_{\varrho}\mathbf{A}^{(+)}_{3}e_{1} + R^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}e_{2}\,{}'\nabla_{\mu}{}'\nabla_{\varrho}\mathbf{A}^{(+)}_{3}e_{12}\right) = \sqrt{3}\,\mathbf{R}_{\alpha\beta} \tag{13.28}$$

Nasuwając na (13.28) operator $'\Delta^{\alpha\beta} = \epsilon^{\varrho\alpha}\epsilon^{\pi\beta}{}'\nabla_{\varrho}{}'\nabla_{\pi}$, wobec

$$\epsilon^{\varrho\alpha}\epsilon^{\pi\beta}{}'\nabla_{\varrho}{}'\nabla_{\pi}{}'\nabla_{(\alpha}\mathbf{A}^{(+)}_{\beta)} = 0 \tag{13.29}$$

otrzymamy równanie

$$'\Delta^{\alpha\beta}\left[\delta d\,\epsilon^{\cdot\varrho}_{\nu}\left(S^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}\,{}'\nabla_{\mu}{}'\nabla_{\varrho}\mathbf{A}^{(+)}_{3}e_{1} + R^{\cdot\cdot\mu\nu}_{\alpha\beta}e_{2}\,{}'\nabla_{\mu}{}'\nabla_{\varrho}\mathbf{A}^{(+)}_{3}e_{12}\right) + \sqrt{3}\,{}'\Delta^{\alpha\beta}\left(b_{\alpha\beta}\mathbf{A}^{(+)}_{3}\right)\right] = -e_{2}\mathbf{S}e_{12} \tag{13.30}$$

które dla powłoki izotropowej sprowadza się do

$$e_{2}\,{}'\Delta\left(\frac{\delta}{\sqrt{1-\nu^{2}}}\,{}'\Delta\mathbf{A}^{(+)}_{3}\right)e_{12} - \sqrt{3}\,{}'\Delta^{\alpha\beta}\left(b_{\alpha\beta}\mathbf{A}^{(+)}_{3}\right) = -e_{2}\mathbf{S}e_{12} \tag{13.31}$$

Symbol $'\Delta = a_{\alpha\beta}{}'\Delta^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}{}'\nabla_{\alpha}{}'\nabla_{\beta}$ jest operatorem Laplaca na $V_2(R_2)$ Dla powłoki jednorodnej oraz nie poddanej wpływowi temperatury łatwo zauważyć analogię pomiędzy powyższym równaniem a znanym równaniem powłoki mało wyniosłej w postaci zespolonej. Kładąc w (13.20) $\nabla_{\alpha} = {}'\nabla_{\alpha}$ lub w (13.30) $b_{\alpha\beta} = 0$ otrzymujemy równania niejednorodnej, anizotropowej płyty i tarczy.

14. ZWIĄZEK POMIĘDZY UJĘCIEM AGREGATOWYM I ZESPOLONYM

Algebra Clifforda C_2^+ jest izomorficzna z algebrą afinorów M_2; ustalając taki izomorfizm otrzymujemy reprezentację spinorową tej algebry w przestrzeni spinorowej S_2 (por.[16]). Na tej drodze można od razu określić związek zachodzący pomiędzy agregatowym i zespolonym sformułowaniem równań teorii powłok.

Oznaczmy symbolem K poniższą kolumnę agregatów:

$$\|K\| = \left\| \begin{matrix} B_{\alpha\beta} \\ \tilde{B}_{\alpha\beta} \\ \overset{*}{B}_{\alpha\beta} \\ A_{\alpha i} \\ A_i \\ K_3 \end{matrix} \right\| \tag{14.1}$$

Zgodnie z (8.1) możemy ją przedstawić w postaci sumy kolumn

$$\|K\| = \|K_0\| + \|K_1\| e_1 + \|K_2\| e_2 + \|K_{12}\| e_{12}$$

w której

$$\|K_0\| = \sqrt{3}\, D \left\| \begin{matrix} \varepsilon_{\alpha\beta} \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} \\ -\alpha_t \tau_0 a_{\alpha\beta} \\ \omega_{\alpha i} \\ u_i \\ \gamma_3 \end{matrix} \right\| \qquad \|K_1\| = \sqrt{3} \left\| \begin{matrix} m_{\alpha\beta} \\ \tilde{m}_{\alpha\beta} \\ \overset{*}{m}_{\alpha\beta} \\ v_{\alpha i} \\ y_i \\ x_i \end{matrix} \right\| \tag{14.3}$$

$$\|K_2\| = \delta_0 \left\| \begin{matrix} t_{\alpha\beta} \\ \tilde{t}_{\alpha\beta} \\ \overset{*}{t}_{\alpha\beta} \\ k_{\alpha i} \\ x_i \\ \Theta_3 \end{matrix} \right\| \qquad \|K_{12}\| = \delta D \left\| \begin{matrix} \chi_{\alpha\beta} \\ \tilde{\chi}_{\alpha\beta} \\ -\alpha_t \tau \varepsilon_{\alpha\beta} \\ \zeta_{\alpha i} \\ \gamma_i \\ \vartheta_i \end{matrix} \right\| \tag{14.3}$$

Kolumnie $\|K\|$ odpowiada macierz afinorów $\|a\|$ w dwuwymiarowej przestrzeni spinorowej S_2 o postaci (por.[16])

$$\|a\| = \left\| \begin{matrix} \|K_0\| + i\|K_{12}\|, & \|K_1\| - i\|K_2\| \\ \|K_1\| + i\|K_2\|, & \|K_0\| - i\|K_{12}\| \end{matrix} \right\| \tag{14.4}$$

Reprezentacja (14,4) przyporządkowywuje każdemu z agregatów występujących w kolumnie $\|K\|$ macierz kwadratową utworzoną z afinorów będących elementami kolumn (14.3). Elementami tej macierzy są wielkości zespolone.

UWAGI KOŃCOWE

Sformułowanie agregatowe równań teorii powłok cienkościennych można uznać za uogólnienie tzw. "zespolonego" przedstawienia tej teorii, zaproponowanego zwłaszcza przez Nowożiłowa. Zbiór wielkości zespolonych (nazywanych "siłami zespolonymi" Nowożiłowa) tworzy bowiem algebrę Clifforda pierwszego rzędu, natomiast zbiór agregatów wprowadzonych w tej pracy - algebrę Clifforda rzędu drugiego. Agregaty, podobnie zresztą jak i "siły zespolone", zostały wprowadzone formalnie, nie posiadając żadnego znaczenia fizykalnego. Formalizacja taka prowadzi jednak do zwięzłości zapisu, niespotykanej w notacjach stosowanych w bogatej literaturze przedmiotu. Wypływa to z wykorzystania pewnych prawidłowości zachodzących w budowie równań teorii, prawidłowości być może zauważanych niekiedy, lecz którym dotychczas - o ile autorowi wiadomo - nie nadano matematycznego wyrazu.

Praca niniejsza, między innymi, miała na celu wprowadzenie do teorii powłok nowego zapisu; w zapisie agregatowym przedstawiono tak poszczególne równania jak i ich układy. Pominięto natomiast problematykę związaną z formułowaniem i rozwiązywaniem zagadnień brzegowych, nie omawiano więc również konsekwencji stosowania nowego zapisu w technice obliczeniowej. Wynika to z faktu, że formułowanie agregatowe (podobnie zresztą jak i zespolone) zagadnień brzegowych nie w każdym przypadku szczególnym jest możliwe lub chociażby celowe; zależy to od kształtu powłoki, warunków brzegowych itp. Autor liczy się tu z koniecznością przeprowadzenia dalszych studiów w tym kierunku, niemniej jednak, z uwagi na podobieństwo ujęcia agregatowego i zespolonego, korzyści będą tego samego rodzaju jak omówione przez Nowożiłowa w jego monografii [11] (str.76-77).

LITERATURA

[1] A.L.GOLDENWEJZER: Urawnienija tieorii obołoczek, P.M.M. 2, 4 (1940).

[2] A.L.GOLDENWEJZER: Tieroria tonkich obołoczek, Moskwa, 1953.

[3] H.SCHAEFER: Die Analogie zwischen den Verschiebungen und den Spannungsfunktionen..., Ing. Arch. 2, 28 (1960).

[4] M.ROGOZIŃSKI: Analogia pomiędzy stanem napięcia i odkształcenia, AMS 5, 9 (1957).

[5] W.W.NOWOŻIŁOW: Nowyj mietod rascziota tonkich obołoczek, Izw.A.N. ZSRR, Otd.T.N. 1 (1946).

[6] A.L.GOLDENWEJZER, A.L.ŁURIE: O matematiczeskoj tieorii rawnowiesja uprogich obołoczek, P.M.M. 5, 11 (1947).

[7] H.M.MUSZTARI: Inwariantnyje urawnienija rawnowiesja..., P.M.M. 2, 12 (1948).

[8] A.KORNECKI: O równaniach teorii cienkich powłok sprężystych, AMS 4, 6 (1954).

[9] A.L.GOLDENWEJZER: Urawnienija tieorii obołoczek w pieremieszczenijach i funkcjach napriażenij, PMM 6,21 (1957).

[10] K.F.CZERNYCH: O wariacjonnom principie kompleksnoj tieorii obołoczek: P.M.M. 2, 22 (1958).

[11] V.VISARION, C.STANESCU: Statiko-geometriczeskaja anałogia dla tonkich uprugich obołoczek..., Revue de mecanique appliquee, 1, 3 (1958) Bucarest.

[12] Cz.WOŹNIAK: On the Equations of the General Theory of thin Shells, A.M.S. 3, 13 (1961).

[13] W.Z.WŁASOW: Niekotoryje zadaczi soprotiwlenija materiałow..., Izw. A.N, ZSRR, Otd. T.N. 9 (1950) s.1267-1325.

[14] E.MELAN, H.PARCUS: Warmespanungen infolge Stationärer Temperaturfelder, Wien, Springer - Verlag 1953.

[15] W.NOWACKI: Zagadnienia termosprężystości, Warszawa 1960.

[16] P.K.RASZEWSKIJ: Tieoria spinorow, Usp.M.N. 2, 10 (1955).

[17] S.GOŁĄB: Rachunek tensorowy, Warszawa 1956.

[18] W.W.NOWOŻIŁOW: Tieoria tonkich obołoczek, Sudpromgiz, 1951.

[19] W.ZERNA: Beitrag zur allgemeinen Schalenbiegetheorie, Ing. Arch. 17 (1949).

[20] A.E.GRENN, W.ZERNA: Theoretical Elasticity, Oxford 1954.

[21] W.GÜNTER: Analoge Systeme von Schalengleichungen, Ing. Arch. 3, (1961).

[22] A.L.GOLDENWEJZER: Kaczestwiennoje issliedowanie napriażennowo sostojania tonkoj obołoczki, P.M.M. 6, 9 (1945).

[23] M.JAKOB: Heat Transfer, New York and London 1958.

[24] A.P.NORDEN: Tieoria powierchnostiej, Moskwa, 1956.

[25] S.A.AMBARCUMIAN: Tieoria anizotropnych obołoczek, Moskwa, 1961.

[26] Cz.WOŹNIAK: The Aggregate Equations of Anisotropie Non - homogeneous Thin Shells, A.M.S. 4, 14 (1962) (w druku).

S t r e s z c z e n i e

W pracy przedstawiono w nowym ujęciu ogólne zagadnienie liniowej teorii powłok cienkościennych. Analizując stan napięcia i odkształcenia powłoki, uzyskano układ równań różniczkowych złożony z czterech podukładów o identycznej formie. Umożliwiło to przyjęcie jako nowych niewiadomych, agregatów utworzonych z afinorów opisujących stan napięcia, odkształcenia i przemieszczenia powłoki. Działania na agregatach określono tak, by ich zbiór był algebrą Clifforda drugiego rzędu. Podstawowe równania teorii przedstawiono w formie agregatowej wraz z warunkami ich całkowalności. Cechą tego ujęcia jest zwięzłość niespotykana w notacjach znanych w literaturze przedmiotu. Sformułowano również kilka wariantów zupełnych układów równań agregatowych. Określono związek zachodzący pomiędzy ujęciem agregatowym a zespoloną postacią równań teorii powłok, gdzie mamy do czynienia z algebrą Clifforda rzędu pierwszego. Korzyści wypływające ze stosowania ujęcia agregatowego, zdaniem autora, to możliwość dalszego rozszerzenia uproszczeń wynikających z przedstawienia "zespolonego", podanego przez Nowożiłowa.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA w Gliwicach

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
P 3361/62
Pol. Śl. 1684-60 60 000