

JACEK M. CZAPLICKI

## O GOTOWOŚCI OBIEKTU

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono niekonwencjonalny - bayesowski sposób podejścia do współczynnika gotowości. Dzięki temu uzyskano nowe miary gotowości i bardziej wnikliwe spojrzenie na tę cechę obiektów technicznych.

## 1. Wstęp

Większość górniczych obiektów technicznych ma własność naprawialności. Posiadanie tej własności przez obiekt oznacza, że proces eksploatacji obiektu jest co najmniej dwustanowy: naprawa i nienaprawa (awaria - praca, sprawność - niesprawność itp.). Dla tej klasy obiektów technicznych jedną z najważniejszych cech jest gotowość.

Gotowość, w sensie deskryptywnym, jest to zdolność obiektu do pełnienia funkcji [7,12].

Podstawową miarą gotowości obiektu jest współczynnik gotowości. W klasycznym ujęciu jest to wielkość zdeterminowana, a w wyniku badań niezawodnościowych uzyskuje się oceny współczynnika gotowości, które lepiej lub gorzej, mniej lub bardziej dokładnie odzwierciedlają rzeczywistą jego wartość. Taki sposób podejścia prezentowały pionierskie prace z tego zakresu Baileya i Mikhaïla [2] czy Nagy'ego [10] i sposób ten na ogół prezentowany jest w niezmienionej formie do dziś. Rozszerzona jedynie została wnikliwość spojrzenia na ten problem poprzez prezentowanie estymacji przedziałowej współczynnika gotowości czy jego predykcji [6], rozważenie niektórych aspektów teoretycznych gotowości wybranych systemów [12] itp.

Jednakże eksploatacyjne badania niezawodności górniczych odnawialnych obiektów technicznych [1,5] zasugerowały nieco inny sposób podejścia do tej miary gotowości obiektów. Wyniki tego innego sposobu podejścia są omówione w niniejszym artykule.

## 2. Sformułowanie problemu

Rozważmy obiekt techniczny, który w eksploatacji podlega procesowi odnowy o skończonym czasie odnowy. Niech będą spełniane klasyczne założenia<sup>1/</sup> dla tego procesu.

Współczynnikiem gotowości obiektu nazywamy prawdopodobieństwo zdarzenia, że w dowolnej chwili t obiekt jest w stanie pracy (gotowości):

<sup>1/</sup> Patrz np. 8 § 31.

$$K(t) = P\{\tau(t) = 1\}, \quad (1)$$

gdzie:  $\psi(t)$  - proces odnowy o skończonym czasie odnowy,  
 $\langle 0, 1 \rangle$  - stany procesu: odnowa (naprawa), praca.

Jeżeli przez  $F(t)$  oznaczymy rozkład czasów trwania stanu pracy, a przez  $H(t)$  funkcję odnowy strumienia momentów odnowy obiektu, to można dowieść [8], że współczynnik gotowości dany jest wzorem:

$$K(t) = 1 - F(t) + \int_0^t [1 - F(t-x)] dH(x). \quad (2)$$

W praktyce posługujemy się graniczną wartością współczynnika gotowości dla  $t \rightarrow \infty$  i wtedy

$$K(t) = K = \frac{T_p}{T_p + T_a}, \quad (3)$$

gdzie:  $T_p, T_a$  - średnie czasy trwania stanów pracy i awarii.

W przypadku gdy rozkłady czasów trwania stanów mają charakter wykładniczy, z uwagi na to, że:

$$T_p = \lambda^{-1}, \quad T_a = \beta^{-1}, \quad (4)$$

gdzie:  $\lambda, \beta$  - parametry rozkładów czasów trwania stanów pracy i awarii, współczynnik gotowości (3) dany jest wzorem:

$$K = \frac{\beta}{\lambda + \beta}. \quad (5)$$

Dokonując oceny współczynnika gotowości w sposób permanentny w jednokowych przedziałach czasu i otrzymując za każdym razem nieco inny wynik (przy czym zakładamy, że ani sposób eksploatacji ani warunki eksploatacji obiektu nie uległy istotnym zmianom w czasie) można dojść do wniosku, że współczynnik gotowości jest zmienną losową. Idąc tym tokiem rozumowania łatwo zauważyć, że jeżeli współczynnik gotowości jest zmienną losową, to jest tak dlatego, iż parametry  $\lambda$  oraz  $\beta$  są zmiennymi losowymi. A zatem praktyka zasugerowała bayesowski sposób podejścia do tej miary gotowości obiektu.

Przyjmijmy zatem, że  $\lambda$  jest zmienną losową o rozkładzie  $L(\lambda; \psi)$  i funkcji gęstości  $l(\lambda; \psi)$  oraz  $\beta$  jest zmienną losową o rozkładzie  $G(\beta; \xi)$  i funkcji gęstości  $g(\beta; \xi)$ . Jeżeli tak, to współczynnik gotowości  $K$  (5) jest funkcją dwóch zmiennych losowych

$$K = K(\lambda, \beta)$$

i jest sam zmienną losową.

Przedmiotem rozważań niniejszej pracy są konsekwencje wynikłe z bayesowskiego ujęcia współczynnika gotowości.

### 3. Rozkład współczynnika gotowości i miary gotowości obiektu

Wyznaczymy rozkład współczynnika gotowości  $K$  zgodnie z procedurą satura-

zestowaną w [11]. Dla wyznaczenia dystrybuanty  $Z(k) = P\{K \leq k\}$  dla danego  $k$  musimy znaleźć prawdopodobieństwo zdarzenia  $\{K \leq k\}$ . Przez  $D_k$  oznaczymy taki obszar płaszczyzny  $\lambda\beta$ , że:  $K(\lambda, \beta) \leq k$ , tzn:

$$\{K \leq k\} = \{(\lambda, \beta) \in D_k\}.$$

Wystarczy zatem znaleźć masę prawdopodobieństwa w obszarze  $D_k$ .

Przeto

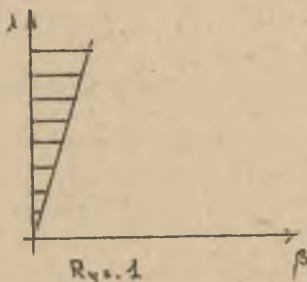
$$Z(k) = P\{K \leq k\} = P\{(\lambda, \beta) \in D_k\} = \iint_{D_k} f(\lambda, \beta) d\lambda d\beta.$$

Ponieważ zmienne  $\lambda$  oraz  $\beta$  są niezależne, więc  $f(\lambda, \beta) = l(\lambda; \sigma) \cdot g(\beta; \xi)$ .

Wyznamy obszar  $D_k$ . Jest on taki, że  $(\beta/\lambda) \leq k/(1-k)$  co uwidacznia rys. 1.

A więc

$$\begin{aligned} Z(k) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{\lambda k}{1-k}} g(\beta; \xi) \cdot l(\lambda; \sigma) d\lambda d\beta = \\ &= \int_0^{\infty} g\left(\frac{k}{1-k} \lambda; \xi\right) \cdot l(\sigma; \sigma) d\lambda \end{aligned} \quad /6a/$$



Postępując podobnie, ale redukując tym razem zmienną  $\lambda$ , otrzymujemy alternatywny wzór postaci:

$$Z(k) = \int_0^{\infty} \left[1 - l\left(\frac{1-k}{k} \beta; \sigma\right)\right] \cdot g(\beta; \xi) d\beta. \quad (6b)$$

Funkcję gęstości współczynnika gotowości uzyskujemy różniczkując względem  $k$  zależność (6), otrzymując:

$$\begin{aligned} z(k) &= \frac{1}{(1-k)^2} \int_0^{\infty} \lambda \cdot g\left(\frac{k}{1-k} \lambda; \xi\right) \cdot l(\lambda; \sigma) d\lambda = \\ &= \frac{1}{k^2} \int_0^{\infty} \beta \cdot l\left(\frac{1-k}{k} \beta; \sigma\right) \cdot g(\beta; \xi) d\beta. \end{aligned} \quad (7)$$

A zatem wzór (6) przedstawia funkcję dystrybuanty współczynnika gotowości, natomiast wzór (7) funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa tej zmiennej losowej.

Zazwyczaj przyjmuje się, że parametr rozkładu wykładniczego ma rozkład gamma, tzn:

$$\begin{aligned} l(\lambda; \sigma) &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} e^{-\lambda\sigma}; & \sigma, a > 0 \\ g(\beta; \xi) &= \frac{\beta^b}{\Gamma(b)} \beta^{b-1} e^{-\beta\xi}; & \xi, b > 0 \end{aligned} \quad (8)$$



W takim przypadku funkcja gęstości (7) przybiera postać

$$z(k) = \frac{\lambda^a \delta^b}{B(a,b)} \frac{k^{b-1} (1-k)^{a-1}}{[\lambda k + \delta(1-k)]^{a+b}}, \quad (9)$$

gdzie:  $B(a,b)$  - funkcja beta.

Jest to tzw. rozkład Eulera.

Warto zauważyć, że:

- na ogół  $\gamma \gg \delta$  albowiem  $\lambda \ll \beta$ ,
- dla  $b > 12$  oraz  $a > 12$  rozkład (9) można uważać jako rozkład współczynnika gotowości, gdzie  $\lambda$  oraz  $\beta$  mają rozkłady normalne,
- jeżeli  $\gamma = \delta$ , to rozkład Eulera przechodzi w rozkład beta,
- można wykazać, że dla zmiennej losowej

$$y = \frac{\lambda k}{\lambda k + \delta(1-k)} \quad (10)$$

funkcja dystrybuanty rozkładu beta

$$I_y(a,b) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^y t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt \quad (11)$$

równa się funkcji dystrybuanty rozkładu Eulera

$$Z(k) = \int_0^k z(x) dx \quad (12)$$

Pierwsza z uwag jest natury praktycznej. Dla prętośników taśmowych stosunek  $\beta: \lambda \approx 10^2$ , natomiast dla prętośników zgrzeblowych  $\beta: \lambda \approx 10$ . Tak też wahał się będzie stosunek parametrów  $\gamma$  i  $\delta$ . Druga z uwag ma bardzo duże znaczenie praktyczne. Zauważmy bowiem, że dotychczasowe nasze rozważania jako punkt wyjścia przyjmowały wzór (5), tzn. wykładniczy charakter czasów trwania stanów. Gdybyśmy odrzucili to założenie i przeprowadzili nasze rozważania wychodząc ze wzoru (3), to funkcje rozkładu zmiennych losowych  $T_p$  oraz  $T_a$  można byłoby przyjąć jako normalne (z uwagi na to, że rozkład średniej w dowolnym rozkładzie ma asymptotyczny rozkład normalny; jest to wniosek z twierdzenia Lindeberga - Levy'ego). Dystrybuanta oraz funkcja gęstości (6), (7) przedstawiałyby się następująco

$$z(k) = \int_0^{\infty} \phi_p \left( T_a \frac{k}{1-k} \right) \cdot \varphi_a (T_a) dT_a \quad (13)$$

$$z(k) = \frac{1}{(1-k)^2} \int_0^{\infty} T_a \cdot \varphi_p \left( T_a \frac{k}{1-k} \right) \cdot \varphi_a (T_a) dT_a$$

gdzie:  $\phi$  - dystrybuanta rozkładu normalnego,

$\varphi$  - funkcja gęstości rozkładu normalnego,

indeksy  $a$  i  $p$  oznaczają funkcję stanu awarii, pracy.

Wyznaczenie postaci analitycznej każdej z funkcji (7) przedstawia znaczne kłopoty. (Trzeba uciec się do szeregów). Gdy natomiast przejdzie-



analizy wstępnej informacji uzyskane z badania omawia artykuł [3].

Przyjmijmy, że dokonano badania niezawodnościowego  $N$  obiektów (np. przenośników) tego samego typu i w wyniku obserwacji otrzymano ciągi czasów trwania stanów awarii i pracy tych obiektów. Przeprowadzono także analizę wstępną tych ciągów i stwierdzono, że ciągi są stacjonarne, jednorodnie a czasy trwania stanów niezależne.

Dokonano więc oszacowania parametrów intensywności powstawania stanów  $\lambda$  oraz  $\beta$  estymatorami wyznaczonymi dla przyjętego w badaniu planu. Otrzymano w ten sposób  $N$  ocen każdego parametru  $\lambda$  oraz  $\beta$ . Następnym krokiem do osiągnięcia żądanych ocen miar gotowości obiektów jest estymacja parametrów rozkładów wskaźników  $\lambda$  oraz  $\beta$  (8). Parametry te oszacować można metodą największej wiarygodności, według której estymatory uzyskuje się jako rozwiązania układu równań:

$$\frac{a}{a-1} - \ln a = \ln N - \ln \sum \lambda_i + \frac{1}{N} \sum \ln \lambda_i \quad (18)$$

$$\delta = \frac{N a}{\sum \lambda_i} \quad a \neq 1$$

dla rozkładu wskaźnika intensywności powstawania stanu awarii oraz

$$\frac{b}{b-1} - \ln b = \ln N - \ln \sum \beta_i + \frac{1}{N} \sum \ln \beta_i \quad (19)$$

$$\delta = \frac{N b}{\sum \beta_i} \quad b \neq 1$$

dla rozkładu wskaźnika intensywności powstawania stanu pracy.

Ponieważ powyższe układy równań są nierozwiązalne analitycznie dlatego korzystnie jest jako pierwsze przybliżone rozwiązania potraktować oceny parametrów uzyskane metodą momentów, według której:

$$\delta = \frac{\bar{\lambda}}{S_\lambda^2}, \quad a = \frac{\bar{\lambda}^2}{S_\lambda^2} \quad (20)$$

$$\delta = \frac{\bar{\beta}}{S_\beta^2}, \quad b = \frac{\bar{\beta}^2}{S_\beta^2} \quad (21)$$

gdzie:  $\bar{\lambda}, \bar{\beta}$  - średnie arytmetyczne ocen  $\lambda_i$  oraz  $\beta_i$ ,

$S_\lambda^2, S_\beta^2$  - wariancje zmiennych  $\lambda$  oraz  $\beta$ ,

i następnie metodą iteracyjną znaleźć lepsze oceny interesujących parametrów.

Z chwilą uzyskania ocen parametrów rozkładów  $\lambda$  oraz  $\beta$  należy dokonać weryfikacji zgodności rozkładów empirycznych: teoretycznych dla tych wskaźników i, jeżeli brak będzie podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności, wówczas można szacować oceny miar gotowości obiektu.

Bardzo interesująco przedstawia się natomiast wyznaczenie ocen miar gotowości w dalszej eksploatacji badanych obiektów, albowiem jeżeli przez  $r_a$  oznaczymy liczbę zaobserwowanych awarii, przez  $r_p$  liczbę zaobserwowanych czasów trwania pracy, przez  $t_a$  sumaryczny czas trwania awarii a przez  $t_p$  sumaryczny czas trwania pracy obiektów, to zgodnie z zapre-



zestawianą w [4] procedurą bayesowską rozkład wskaźnika  $\lambda$  oraz  $\beta$  przedstawia się następująco:

$$l(\lambda; \mathcal{N}_1) = \frac{\lambda^{r_p} e^{-\lambda t_{z_p}} \cdot l(\lambda; \mathcal{N}_1)}{\int \lambda^{r_p} e^{-\lambda t_{z_p}} \cdot l(\lambda; \mathcal{N}_1) d\lambda} \quad (22)$$

$$g(\beta; \xi_1) = \frac{\beta^{r_a} e^{-\beta t_{z_a}} \cdot g(\beta; \xi_1)}{\int \beta^{r_a} e^{-\beta t_{z_a}} \cdot g(\beta; \xi_1) d\beta}$$

Ponieważ mianowniki są stałymi normowania, a rozkłady  $l(\lambda; \mathcal{N}_1)$  i  $g(\beta; \xi_1)$  dane są wzorami (8), więc rozkłady (22) okazują się też rozkładami gamma z parametrami:

$$\begin{aligned} a &= 1 + r_p; \quad \delta = t_{z_p} \\ b &= 1 + r_a; \quad \delta = t_{z_a} \end{aligned} \quad (23)$$

### 5. Niezawodność obiektu

Warto także zwrócić uwagę na to, że potraktowanie wskaźników  $\lambda$  oraz  $\beta$  w sposób bayesowski zmienia ocenę niezawodności obiektu.

Klasyczna ocena niezawodności obiektu przyjmuje funkcję niezawodności obiektu postaci:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}, \quad (24)$$

w rozważanym przez nas przypadku. Przyjęcie, że wskaźnik  $\lambda$  jest zmienną losową o rozkładzie  $L(\lambda)$  sprawia, że funkcja niezawodności staje się postaci [4]:

$$R(t) = \left( \frac{\delta}{\delta + t} \right)^a; \quad (25)$$

natomiast transformacja bayesowska (22) pozwala na ocenę funkcji niezawodności w sposób ciągły, albowiem

$$R(t) = \frac{(\delta + t_{z_p})^{a+r_p}}{(\delta + t + t_{z_p})^{a+r_p}}. \quad (26)$$

### 6. Zastosowanie

W celu ilustracji przeprowadzonych rozważań zaczerpnięto dane z pracy [9]. W trakcie trwania badania niezawodnościowego obserwowano między innymi 10 przenośników typu PTG na pewnej kopalni. Ze względu na to, że sposób i warunki eksploatacji tych przenośników były podobne, dlatego sformułowano hipotezę, iż czasy trwania stanów awarii i pracy tych prze-

nośników są jednorodnie<sup>2/</sup>, tzn. posiadają tę samą funkcję rozkładu. Badanie jednorodności testem  $\chi^2$  nie dało podstaw do odrzucenia głoszonej hipotezy. W związku z tym przyjęto, że wskaźniki niezawodnościowe - intensywności powstawania stanów  $\lambda$  oraz  $\beta$ , wyznaczone dla każdego przenośnika typu PTG, są realizacjami tych samych zmiennych losowych. Wartości wskaźników kształtowały się następująco:

$\lambda \cdot 10^{-3} [h^{-1}]$	2,34	3,36	3,96	3,90	2,70	2,64	4,86	7,44	3,30	0,90
$\beta [h^{-1}]$	0,54	0,72	0,90	1,02	0,90	1,32	1,02	1,08	0,54	1,74

Wyznaczono oceny parametrów rozkładów (8), otrzymując:

$$a = 4,13 \quad \gamma = 1168 \quad b = 7,38 \quad \delta = 7,54 .$$

Test zgodności Kołmogorowa na poziomie  $\alpha = 0,05$  nie dał podstaw do odrzucenia hipotezy głoszącej, iż rozkłady gamma o uzyskanych ocenach parametrów dobrze opisują dane empiryczne. Tak więc można było przystąpić do szacowania miar gotowości przenośników PTG.

1. Funkcja gęstości rozkładu współczynnika gotowości jest zatem postaci:

$$z(k) = \frac{1168^{4,13} \cdot 7,54^{7,38}}{\Gamma(4,13; 7,38)} \cdot \frac{k^{6,38} (1-k)^{1,13}}{[7,54k + 1168(1-k)]^{11,56}}$$

Ilustracja graficzna tej funkcji jest przedstawiona na rys.2

2. Wartość oczekiwana współczynnika gotowości

$$E(k) = 0,9959.$$

3. Odchylenie przeciętne

$$\sigma(k) = 2,0 \cdot 10^{-3}.$$

4. Oszacowanie wstępne współczynnika gotowości

$$\tilde{K} = 0,9964 .$$

5. Wartość modalna w rozkładzie współczynnika gotowości

$$M_0(k) = 0,9976 .$$

6. Funkcja niezawodności

$$R(t) = \left( \frac{1168}{1168+t} \right)^{4,13} .$$

Ilustracja graficzna funkcji niezawodności przedstawiona jest na rys.3. Na rysunku tym przedstawiono także funkcję niezawodności wykreśloną zgodnie z klasycznym wzorem

$$R(t) = e^{-\lambda t} ,$$

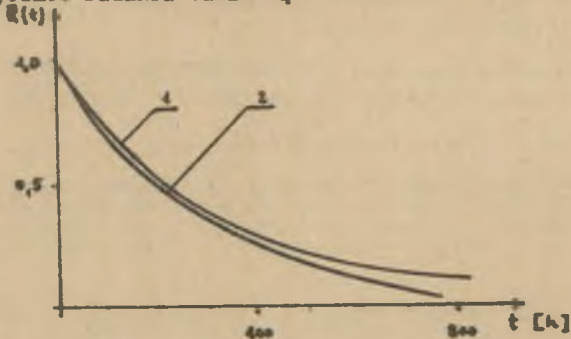


Rys. 2. Funkcja gęstości rozkładu współczynnika gotowości przenośnika PTG

<sup>2/</sup>Wiadomo było a priori, że są stacjonarne.



przy czym przyjęto jako estymator  $\lambda$  średnią arytmetyczną wartości wskaźników  $\lambda$ . Okazuje się, że funkcja niezawodności w ujęciu klasycznym leży poniżej funkcji niezawodności w ujęciu bayesowskim (z wyjątkiem punktu  $t = 0$ , gdzie obie funkcje przyjmują wartość równą 1). Wydaje się, iż interesujące byłoby dokonanie badania, która z tych dwóch funkcji lepiej opisuje dane empiryczne. Badania takie są w toku.



Rys. 3. Funkcja niezawodności przenośnika PTG  
1 - bayesowska, 2 - klasyczna

#### LITERATURA

- [1] Antoniuk J., Czaplicki J., Lutyński A. i inni: Analiza niezawodności pracy przenośnikowych układów transportowych dla kopalnianych poziomów o skoncentrowanej produkcji. Pol.Śl., IMG, Gliwice 1973-1975 (niepubl.).
- [2] Bailey J.H., Mikhail W.F.: Sequential testing of electronic systems. Proc. Ann. Symp. on Reliability, 1963.
- [3] Czaplicki J.M.: Analiza wstępna informacji uzyskanych z badania niezawodnościowego urządzeń transportu ciągłego. Transport Poziomy. Prace własne. IMG, Pol.Śl. Gliwice 1977.
- [4] Czaplicki J.M.: Estymacja przy informacjach a priori parametrów funkcji gęstości czasu pracy obiektu. ZEM, z.4, 1977.
- [5] red. Czaplicki J.: Probabilistyczna analiza niezawodności systemów transportowych - przenośnikowych dla KWK "Wujek". Sprawozd. z obozu naukowego. Katowice - Gliwice 1974 (niepubl.).
- [6] Czaplicki J., Lutyński A.: Predykcja współczynnika gotowości systemów transportu ciągłego. ZN Pol.Śl. Górnictwo, z.72, 1976.
- [7] Kiliński A.: Przemysłowe procesy realizacji. Podstawy teorii. WNT, Warszawa 1976.
- [8] Kopociński B.: Zarys teorii odnowy i niezawodności. PWN, Warszawa 1973.

- [9] Lutyński A.: Niezawodność układów przenośnikowych do transportu urobku ze ściany po szyb w kopalniach głębinowych. Praca doktorska, Pol.Śl., Gliwice 1976.
- [10] Nagy G.: The reliability of repairable systems. Proc. Ann. Symp. on Reliability, 1963.
- [11] Papoulis A.: Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne. WNT, Warszawa 1972.
- [12] Problemy gotowości systemów. Mat. na zebr. nauk. SPEMPAN. Informator ITWL, Warszawa 1975.
- [13] Rainville E.D.: Special Functions. New York, Macmillan, 1960.
- [14] Zieliński R.: Tablice statystyczne. PWN, Warszawa 1972.

#### О ГОТОВНОСТИ ОБЪЕКТА

#### Резюме

В статье дается нетрадиционный - способ Байеса, подхода к коэффициенту готовности. Благодаря этому были получены новые меры готовности и более точное определение этого свойства технических объектов.

#### ON AVAILABILITY OF OBJECT

#### Summary

The paper presents unconventional, i.e. bayesian approach to the problem of availability factor. Due to this new measures of availability have been obtained thus enabling more discerning evaluation of availability of technical objects.