ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

HUTNICTWO

Z. 9
GLIWICE
1976

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 487

FRANCISZEK FIKUS

MIEJSCOWE INDUKCYJNE NAGRZEWANIE RUR W PROCESACH OBRÓBKI PLASTYCZNEJ

GLIWICE 1976

REDAKTOR NACZELNY WYDAWNICTW UCZELNIANYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Jan Bandrowski

REDAKTOR DZIAŁU

Maciej Michałowski

SEKRETARZ REDAKCJI

Jan Znamirowski

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Kujawska 2

Nakł. 80+125 Ark. wyd. 7,14 Ark. druk. 6,37 Papier offsetowy kl. III, 70x100, 80 g
Oddano do druku 17.10.1975 Podpis. do druku 18 6. 1976 Druk ukończ. w czerwcu 1976
Zam. 770/76 N-25 Cena zł 18,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

Str.

Str.

WSTĘP

Coraz częściej w walcowniach, kuźniach i tłoczniach przy obróbce plastycznej stosuje się do podgrzewania wsadu nagrzewnice indukcyjne. Chociaż koszty eksploatacji nagrzewnic indukcyjnych, w porównaniu z piecami płomiennymi, są wyższe, to ich zalety (np. mniejsze utlenienia i odwęglanie stali, mniejsza bezwładność ruchowa wynikająca głównie ze znikomej bezwładności cieplnej, łatwość usytuowania w ciągu produkcyjnym) sprawiają, że ich konkurencyjność stale rośnie.

Często istnieją nawet możliwości uzyskania oszczędności energetycznych przez zastosowanie nagrzewania indukcyjnego w procesach obróbki plastycznej. Ma to miejsce w przypadkach, gdy w kuźni i tłoczni w piecach płomiennych nagrzewa się cały wsad, a obróbce plastycznej podlega tylko jego część. Zastosowanie w tych procesach miejscowego nagrzewania indukcyjnego pozwoliłoby na wyeliminowanie znacznych strat cieplnych.Jednak mimo wspomnianych zalet, nagrzewanie indukcyjne wprowadzane jest do hutnictwa powoli. Wynika to m.in. z faktu, że często tradycyjne (jednosekcyjne) nagrzewnice nie dają żądanych przez technologów rozkładów temperatur we wsadzie. Sprawa właściwego doboru nagrzewnicy indukcyjnej do wymagań temperaturowych przy nagrzewaniu miejscowym jest zagadnieniem trudnym i nadal otwartym. Badania eksperymentalne w tym zakresie są bardzo kosztowne, a oprócz żmudnych i także kosztownych metod numerycznych, brak jest innych właściwych metod obliczeniowych.

Jednym z najmniej rozpracowanych zagadnień grzejnictwa indukcyjnego jest nagrzewanie wsadów rurowych. W piśmiennictwie światowym problemowi temu poświęcono niewiele pozycji, przeważnie o charakterze fragmentarycznym. W praktyce hutniczej będą mogły znaleźć zastosowanie rozważania teoretyczne dopiero wtedy, gdy obejmą kompleksowo analizę zagadnienia elektrotermicznego związanego z nagrzewaniem indukcyjnym rur. Głównym celem pracy jest przygotowanie metod obliczeniowych, dla obliczeń inżynierskich, związanych z zagadnieniem miejscowego indukcyjnego nagrzewania rur, które zezwoliłyby, w oparciu o zadany rozkład temperatury,na dobór odpowiedniej nagrzewnicy indukcyjnej. Przy opracowywaniu tych metod starano się zachować równowagę między ich dokładnością i pracochłonnością.

Znane z literatury rozwiązania uzupełnione o obliczenia nowych, nie publikowanych dotąd przypadków, co łącznie wyczerpuje całość zagadnień związanych z polem elektromagnetycznym przy indukcyjnym nagrzewaniu miejscowym rur.

1. NAGRZEWANIE INDUKCYJNE W PROCESACH OBRÓBKI PLASTYCZNEJ

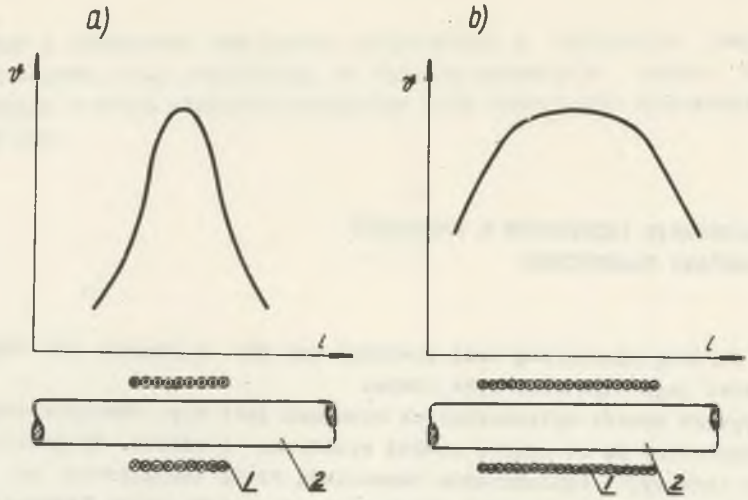
Przed obróbką plastyczną wsad powinien być tak nagrzany, aby temperatura w całej jego objętości była stała.

W przypadku wsadów cylindrycznych wymagana jest więc równomierność rozkładu temperatury na obwodzie, wzdłuż promienia i wzdłuż długości. Nagrzewnice indukcyjne cylindryczne zapewniają stałą temperaturę na obwodzie, ze względu na współosiowe ułożenie wsadu i wzbudnika. Równomierność temperatury wzdłuż promienia można uzyskać poprzez regulację czasem nagrzewania. Bardziej złożonym problemem jest otrzymanie wymaganego rozkładu temperatury na długości wsadu. Przy nagrzewaniu stacjonarnym uzyskuje się praktycznie jednakową temperaturę na całej długości wsadu, gdy wzbudnik jest dłuższy (o ok. 20%) od wsadu. Zastosowanie takiego sposobu do nagrzewania długich kęsisk jest praktycznie niemożliwe. Wykorzystuje się wtedy nagrzewnice przelotowe dużej mocy.

W przypadku, gdy obróbce plastycznej podlega nie cały wsad, a tylko pewien jego odcinek (np. w procesach gięcia, spęczania, kalibrowania itp.) wystarczy nagrzać jedynie tę właściwą część wsadu. Stosuje się wtedy nagrzewanie miejscowe, przy którym także występuje równomierny rozkład temperatury na obwodzie. Uzyskanie jednakowej temperatury wzdłuż rozpatrywanego odcinka wsadu nastręcza szereg trudności. Związane jest to z dwoma zagadnieniami: po pierwsze, nierównomierny jest rozkład mocy wzdłuż długości wzbudnika i po drugie, następuje odpływ ciepła (przez przewodzenie) do nienagrzanych części wsadu. Rozkłady temperatur po zakończeniu nagrzewania dla nagrzewania miejscowego wzbudnikiem jednosekcyjnym pokazano na rys. 1.1.

Przy nagrzewaniu wzbudnikiem krótkim (przyp. a) maksymalna temperatura występuje tylko w środku wzbudnika i gwałtownie maleje w kierunku jego końców. Taki rozkład temperatury może być pożądany w procesie cięcia, gdyż nagrzaniu do wymaganej temperatury podlega tylko krótki odcinek wsadu.

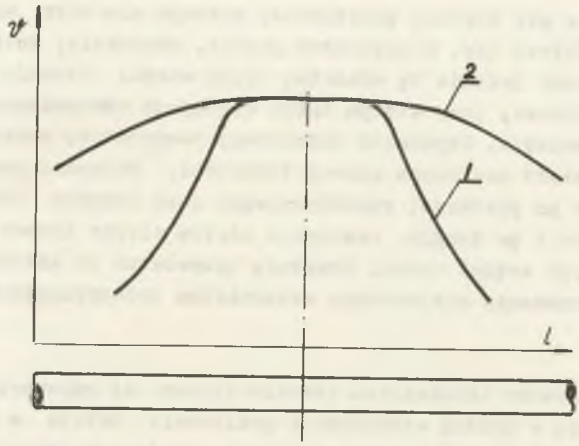
Jeśli w procesie technologicznym żądane jest nagrzanie dłuższego odcinka wsadu do pewnej temperatury, należy użyć wzbudnika o długości większej (przyp. b). Dla długiego wzbudnika uzyskuje się w jego części środkowej praktycznie równomierny rozkład temperatury.



Rys. 1.1. Rozkłady temperatur wzdłuż długości wsadu przy nagrzewaniu miejscowym wzbudnikiem krótkim (a), wzbudnikiem długim (b).

1 - wzbudnik, 2 - wsad, ϑ - temperatura, l - długość wsadu.

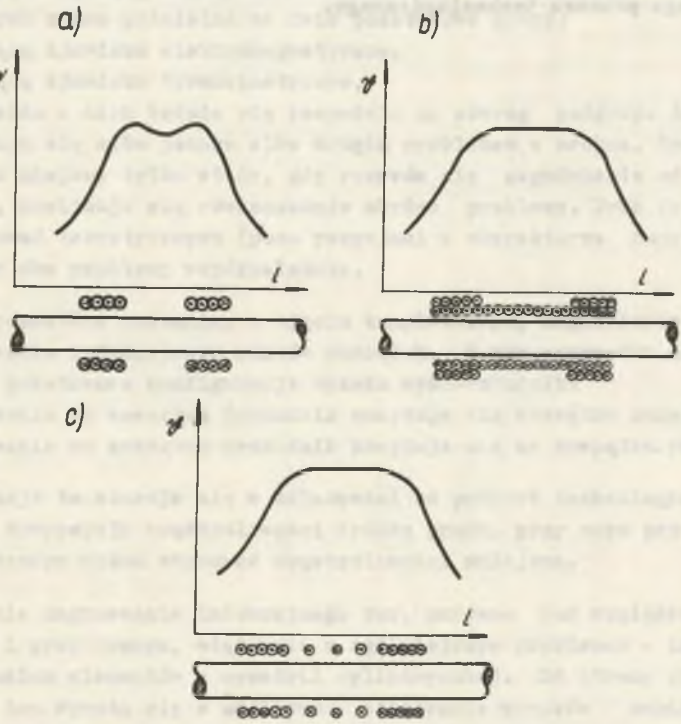
Z punktu widzenia zużycia energii elektrycznej na nagrzanie pewnego odcinka wsadu, można rozpatrzeć dwa krańcowe przypadki rozkładów po zakończeniu nagrzewania (rys. 1.2).



Rys. 1.2. Krańcowe przypadki rozkładów temperatur dla nagrzewania miejscowego.

1 - minimalne zużycie energii elektrycznej, 2 - maksymalne zużycie energii elektrycznej. Długość wzbudnika w obu przypadkach jednakowa.

Nagrzewanie wsadu wg krzywej 1 związane byłoby z minimalnym zużyciem energii elektrycznej, przy czym należy zauważyć, że uzyskanie takiego rozkładu temperatury nastręczałoby duże trudności techniczne. Z drugiej jednak strony nagrzanie takie często nie jest wskazane ze względów technologicznych, z powodu powstawania szkodliwych naprężeń na granicach strefy nagrzanej[x]. Rozkład temperatury wg krzywej 2 można uzyskać przy powolnym nagrzewaniu wsadu wzbudnikiem tej samej długości. Nagrzewanie to jest oczywiście mniej korzystne z energetycznego punktu widzenia, a poza tym powoduje niepotrzebnie mały gradient temperatury. Oprócz tego na skutek nagrzania prawie całego wsadu mogą wystąpić pewne zbędne utrudnienia manipulacyjne np. przy transporcie wsadu do dalszych stanowisk.



Rys. 1.3. Różne rodzaje wzbudników wielosekcyjnych stosowanych do uzyskania równomiernego rozkładu temperatury.

a) - wzbudnik trójsekcyjny z przerwą w środku,
b) - wzbudnik trójsekcyjny z nawinięciem dwuwarstwowym przy końcach,
c) - wzbudnik trójsekcyjny z większą koncentracją zwojów przy końcach (wzbudnik o zmiennym skoku zwojowym).

[x] Dla poszczególnych gatunków stali znane są maksymalne gradienty temperatur, których przekroczenie powoduje pękanie wsadu, np. [39].

W związku z tym przy stosowaniu nagrzewania miejscowego w procesach obróbki plastycznej pojawia się problem dobrania optymalnego, dla danej technologii, rozkładu temperatury we wsadzie. Żądany, równomierny na pewnym odcinku rozkład temperatury można zrealizować za pomocą wzbudników wielosekcyjnych[x)], jak na rys. 1.3. Sprowadza się to do zwiększenia wartości okładu prądowego przy końcach wzbudnika, co powoduje na tych odcinkach wzrost mocy i temperatury, który utrudnia odpływ ciepła ze środkowego odcinka wsadu do nienagrzewanych jego części.

W oparciu o przedstawioną analizę zagadnienia można wyciągnąć wniosek, że istnieje możliwość modelowania rozkładów temperatur w dość dużym zakresie. Z uwagi na to, problem sprowadza się do doboru właściwej nagrzewnicy dla danego procesu technologicznego.

---

x) Wzbudnik można podzielić na sekcje dobierając na długości różne wartości okładu prądowego lub też przykładając różne rdzenie. W pracy rozważać się będzie wzbudniki wielosekcyjne uwzględniając tylko różne okłady prądowe na długości.

2. STAN ZAGADNIENIA W LITERATURZE

2.1. Charakterystyka zagadnienia

Literaturę dotyczącą zagadnienia nagrzewania indukcyjnego w układach cylindrycznych można podzielić na dwie podstawowe grupy:

- opisującą zjawiska elektromagnetyczne,
- opisującą zjawiska termokinetyczne,

przy czym każda z nich będzie się rozpadała na szereg podgrup. Autorzy z zasady zajmują się albo jednym albo drugim problemem z osobna. Sporadycznie, a ma to miejsce tylko wtedy, gdy rozważa się zagadnienie od strony praktycznej, analizuje się równocześnie obydwa problemy. Brak jest natomiast opracowań teoretycznych (poza pozycjami o charakterze numerycznym) traktujących oba problemy współzależnie.

W pracy rozważone zostanie, w ujęciu kompleksowym, zagadnienie miejscowego nagrzewania indukcyjnego wsadów rurowych. W tym przypadku można wyróżnić dwie podstawowe konfiguracje układu wsad-wzbudnik:

- nagrzewanie od wewnątrz (wzbudnik znajduje się wewnątrz rury),
- nagrzewanie od zewnątrz (wzbudnik znajduje się na zewnątrz rury).

Konfiguracje te stosuje się w zależności od potrzeb technologicznych i stojącej do dyspozycji częstotliwości źródła prądu, przy czym przy nagrzewaniu wewnętrznym można stosować częstotliwości mniejsze.

Zagadnienie nagrzewania indukcyjnego rur, zarówno pod względem teoretycznym jak i praktycznym, wiąże się z ogólniejszym problemem - indukcyjnym nagrzewaniem elementów o symetrii cylindrycznej. Od strony praktycznej związek ten wyraża się w możliwości stosowania wyników empirycznych uzyskanych dla cylindra pełnego do rur grubościennych, natomiast od strony teoretycznej sprowadza się to do wykorzystania metod obliczeniowych opracowanych dla cylindrów. Metody dla cylindrów są więc bazą, na której opiera się obliczanie układów rurowych.

2.2. Problematyka pól elektromagnetycznych

W piśmiennictwie traktującym o grzejnictwie indukcyjnym od strony zjawisk elektromagnetycznych można wyróżnić następujące zagadnienia:

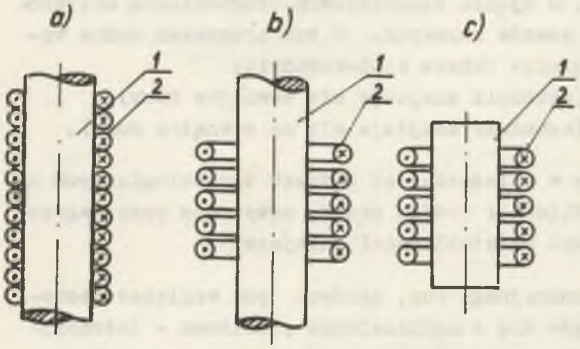
- obliczenia parametrów elektrycznych wzbudnika (konieczne dla określenia założeń projektowych),

- obliczenia pola elektromagnetycznego (zezwalające na określenie rozkładu przestrzennego mocy i temperatury).

Pozycje dotyczące obliczania parametrów elektrycznych opierają się głównie na metodach o bardzo dużym stopniu przybliżenia [5,6,7,9,62,76,83]. Występujące tu liczne współczynniki korekcyjne odnoszą się zwykle tylko do wąskich przedziałów zastosowań. W ostatnich latach pojawiają się publikacje korzystające ze ścisłych metod obliczania parametrów [28,30,59,60,77], a dokładność niektórych mieści się już w granicach błędu pomiarowego[x)].

Zagadnienie obliczania pola elektromagnetycznego w układach wsad-wzbudnik jest w literaturze traktowane bardziej szczegółowo. W związku z tym, celowym jest podzielić je na podgrupy w zależności od stosowanych metod matematycznych, a to:

- metody dla układów nieskończenie długich,
- metody przybliżone,
- metody dla układów z wzbudnikiem skończonym, przy czym rozróżnia się tu:
  - metodę szeregu Fouriera,
  - metodę całki Fouriera,
  - metody numeryczne.



Rys. 2.1. Modele obliczeniowe układów wsad-wzbudnik w zależności od stosowanych metod matematycznych. a) metody dla układów nieskończenie długich i przybliżone, b) metody dla układów z wzbudnikiem skończonym, c) metody numeryczne.

1 - wsad, 2 - wzbudnik.

Na rys. 2.1 przedstawiono modele obliczeniowe odpowiadające metodom wyróżnionym w powyższym podziale.

Zasady obliczania pola elektromagnetycznego w nieskończenie długich układach wsad-wzbudnik (rys. 2.1a) podane są w wielu opracowaniach, np. [6,48,49,82,83]. W sposób najpełniejszy problemy te omówione są w dwóch pracach monograficznych [49, 82], gdzie przeanalizowano wszystkie spotykane przypadki, począwszy od nagrzewania grubych płyt (półprzestrzeń), a skończywszy na nagrzewaniu rur.

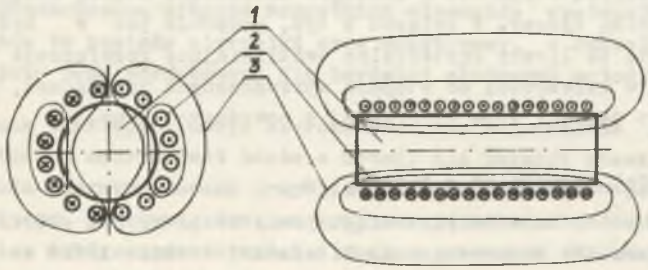
x) Obliczanie parametrów elektrycznych wzbudnika nie wchodzi w zakres pracy. W przeglądzie literatury podano wykaz pozycji omawiających ww. zagadnienie tylko dlatego, że zawierają one fragmenty istotne dla obliczeń pola elektromagnetycznego.

Większość metod przybliżonych dla obliczania pola elektromagnetycznego oparta jest w zasadzie o metody stosowane w układach nieskończenie długich. Uzupełnione są one jedynie o współczynniki korekcyjne, przeważnie o charakterze empirycznym, pozwalające na przybliżone uwzględnienie wpływu skończonej długości wsadu i wzbudnika, asymetrii kształtu ewentualnie innych parametrów rzeczywistego układu. Opracowań z tej dziedziny jest bardzo wiele, np. [1,15,16,50,54,71,75,83]. Z uwagi na mnogość opracowań jak i wąski zakres stosowania poszczególnych metod przybliżonych,można stwierdzić, że publikacje te nie wyczerpują zagadnienia.

Najdokładniejsze z stosowanych obecnie w literaturze metod analitycznych opierają się na uwzględnieniu skończonej długości wzbudnika przy nieskończenie długim wsadzie (rys. 2.1b). W zależności od przedstawienia okładu prądowego wzbudnika można tu wyróżnić metody szeregu i całki Fouriera. Rozwój metod szeregu i całki Fouriera w elektrotermii datuje się od pracy H. Buchholza [12], który w 1958 r. zastosował je do analizy prostego układu wsad-wzbudnik. W późniejszym okresie pojawiło się jeszcze kilka prac różnych autorów na ten temat. Wśród stosujących metodę szeregu Fouriera należy wyróżnić prace [13,19,26,33,34,51,55], natomiast wśród stosujących metodę całki Fouriera [29, 32,42,43,60].

Ostatnią z rozważanych podgrup stanowią metody numeryczne. Przy ich pomocy można analizować układy elektrotermiczne najbardziej zbliżone do rzeczywistości (rys. 2.1c), tzn. uwzględniające skończone wymiary elementów oraz zmienność parametrów elektromagnetycznych [68,69,70,81]. Poważnym ograniczeniem dla praktycznego stosowania tych metod jest konieczność korzystania z szybkoliczących maszyn cyfrowych przy współpracy specjalistów numeryków.

Oddzielnym zagadnieniem, nie objętym powyższym podziałem, jest obliczanie pola elektromagnetycznego w układach wsad-wzbudnik z polem po-



Rys. 2.2. Cylindryczny układ wsad-wzbudnik z polem poprzecznym (a) i wzdłużnym (b)
1 - wsad, 2 - wzbudnik, 3 - linie pola magnetycznego.

przecznym[x)] (rys. 2.2). Było ono przedmiotem pracy doktorskiej autora, a później zostało jeszcze rozwinięte w [18,20,21,22,23,25,65,66].

2.3. Problematyka pól temperaturowych w układach cylindrycznych

Analogicznie jak w przypadku pól elektromagnetycznych, pozycje literaturowe dotyczące obliczania pól temperaturowych można podzielić, w zależności od stosowanych metod matematycznych, na:

- przybliżone,
- oparte o rozwiązanie równania przewodnictwa cieplnego,
- oparte o liczby kryterialne.

Do pierwszej grupy zalicza się pozycje [46,74,75,79], w których punktem wyjścia są albo poważnie uproszczone równania pola temperaturowego, albo ich uproszczone rozwiązania. Dla uzyskania zbieżności z praktyką wprowadza się wiele współczynników korekcyjnych, a obliczenia prowadzi się w oparciu o uśrednione stałe cieplne. Mimo wąskiego zakresu zastosowania tych metod, są one powszechnie używane do obliczania urządzeń grzewczych ze względu na prostotę wyrażeń końcowych. Do grupy tej należy także zaliczyć pozycje [11,63,72,84], które oparte są głównie o empiryczne współczynniki i zależności, a dotyczące pewnych konkretnych zastosowań praktycznych grzejnictwa indukcyjnego.

Do drugiej grupy można zaliczyć pozycje [35,38,58], gdzie zagadnienie rozważa się w oparciu o analityczne rozwiązanie równania przewodnictwa cieplnego wraz z odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi. W tym celu stosuje się różne metody, jak np.: metodę Fouriera, metodę transformacji Laplace'a, metodę odwzorowań konforemnych, przy czym metody te stosuje się zarówno w środowiskach izotropowych, jak i anizotropowych. Większość zagadnień źródłowych rozwiązywana jest przy założeniu stałego rozkładu gęstości mocy, a tylko kilka [58] przy rozkładzie zmiennym.

Ostatnia grupa (pozycje [46,74,79]) dotyczy rozwiązywania zagadnień termokinetycznych w oparciu o analogie zachodzące między rozpływem ciepła a hydrodynamiką cieczy. W związku z tym, podobnie jak w hydrodynamice, wprowadza się tu liczby kryterialne umożliwiające rozwiązanie zagadnienia. Pozycje te, w zależności od stopnia wprowadzonych uproszczeń, można zaliczyć albo do jednej, albo do drugiej z powyższych grup.

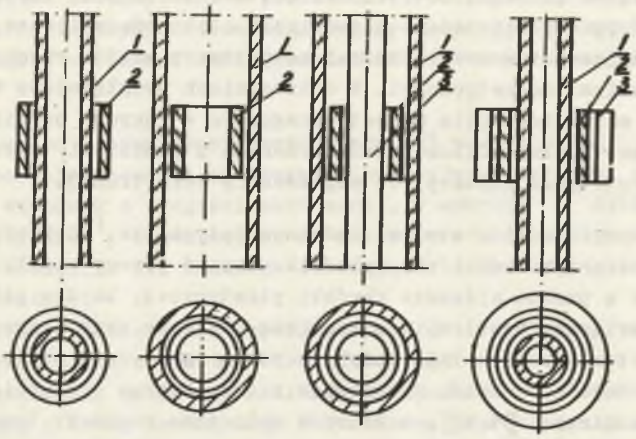
2.4. Przypadek szczególny - rura

Z uwagi na to, że w dalszym ciągu pracy rozpatrywane będzie już tylko nagrzewanie wsadów rurowych, stan literatury w odniesieniu do tego zagad-

---

x) Problem pól poprzecznych został podniesiony tylko dla uzyskania pełnej charakterystyki stanu literaturowego. Rozważane w dalszym ciągu pracy układy ograniczono do pól wzdłużnych.

nienia zostanie omówiony dokładniej. Podstawowe konfiguracje wsad-wzbudnik występujące przy nagrzewaniu rur wzbudnikami cylindrycznymi (vide p.p. 2.1) przedstawiono na rys. 2.3, przy czym, ponieważ w każdej z nich może jeszcze występować rdzeń magnetyczny, uzyskuje się ogółem cztery przypadki.



Rys. 2.3. Komplet konfiguracji wsad-wzbudnik występujących przy nagrzewaniu indukcyjnym rur.
1 - wsad, 2 - wzbudnik, 3 - rdzeń magnetyczny.

Nagrzewanie indukcyjne rur jest w literaturze zagadnieniem najsłabiej opracowanym w porównaniu z innymi układami grzejnymi. Istnieje tu zaledwie kilka pozycji, a i one mają tylko charakter fragmentaryczny.

Najpełniej, od strony zjawisk elektromagnetycznych, problem ten opracowany jest dla układów nieskończenie długich. Wyróżnić należy pracę [82], która przynosi omówienie zarówno nagrzewania od zewnątrz jak i od wewnątrz. Końcowym efektem obliczeń jest moc wydzielana we wsadzie, przy czym występuje brak powiązania tej wielkości z rozkładem temperatury. Ze względu na nieskończoną długość wszystkich elementów występujących w układzie, praca ta posiada niewielki sens praktyczny, a raczej może być traktowana jako baza porównawcza dla bardziej złożonych metod.

Drugą pracą traktującą dosyć szeroko omawiane zagadnienie jest [6]. Część teoretyczna oparta jest także o metody dla układów nieskończenie długich i posiada charakter mocno przybliżony. Główny nacisk położono na stronę praktyczną problemu, tzn. na konstrukcję wzbudników do nagrzewania rur, optymalny dobór częstotliwości i mocy nagrzewania, technologiczne zastosowania nagrzewania indukcyjnego rur itp.

W 1973 r. ogłoszono artykuł [13], w którym analizowano indukcyjne nagrzewanie elementów cylindrycznych przy pomocy metody szeregu Fouriera.

Przedstawiono wyrażenia na potencjał wektorowy w przypadkach walca pełnego oraz rury nagrzewanej od zewnątrz i od wewnątrz.

Pracą traktującą, jak dotąd, najszerzej problem indukcyjnego nagrzewania rur jest wcześniejsza publikacja autora [19]. Celem jej było obliczenie pola magnetycznego w cylindrycznych nagrzewnicach indukcyjnych, w szczególności z wsadem rurowym. Do obliczeń zastosowano metodę szeregu Fouriera i przy jej pomocy rozwiązano zagadnienie elektromagnetyczne związane z miejscowym nagrzewaniem wewnętrznym i zewnętrznym wsadów rurowych, wzbudnikami z rdzeniami magnetycznymi. W obliczeniach uwzględniono wpływ prądu przesunięcia na wartość pola magnetycznego, co w innych publikacjach nie było rozważane. Wyniki obliczeniowe porównano z pomiarami wykonanymi na zbudowanym prototypie indukcyjnej nagrzewnicy wewnętrznej.

Wszystkie pozycje literaturowe omówione dotychczas, dotyczyły analizy zjawisk zachodzących w układzie wzbudnik-rura od strony elektromagnetycznej. Jednakże z punktu widzenia obróbki plastycznej, bardzo istotnym jest drugi z tym związany problem, a mianowicie uzyskane przy nagrzewaniu rozkłady temperatur. Problem ten, podobnie jak i poprzedni, posiada w literaturze bardzo mało opracowań, przeważnie o charakterze przybliżonym. Do nich należy zaliczyć [35,38], w których obliczono rozkłady temperatur przy nagrzewaniu rur, jednakże przy założeniu stałego rozkładu gęstości mocy, co w praktyce metalurgicznej jest spotykane bardzo rzadko. Oprócz ww. pozycji, zagadnienie to rozważono jeszcze w ujęciu fragmentarycznym w [11, 40,46,63,72].

2.5. Ocena stanu zagadnienia w literaturze

Analiza stanu literaturowego związanego z zagadnieniem indukcyjnego nagrzewania rur wykazała istnienie następujących braków:

- brak jest właściwie pozycji omawiających w sposób systematyczny metodykę obliczeń w układach rurowych od strony zjawisk elektromagnetycznych (poza opracowaniami dla układów nieskończenie długich),
- analogiczny brak opracowań występuje w dziedzinie obliczania pól temperaturowych przy nierównomiernym rozkładzie mocy wzdłuż długości wzbudnika,
- nie istnieją opracowania teoretyczne dla wzbudników o długości skończonej wiążące ze sobą zagadnienia elektromagnetyczne i cieplne przy nagrzewaniu miejscowym.

Opracowania półempiryczne, kompleksowo ujmujące całość zagadnień ze względu na bardzo przybliżone metody obliczeniowe słuszne są tylko dla wąskich zakresów zmienności parametrów.

2.6. Sformułowanie celu i zakresu pracy

Z punktu widzenia obróbki plastycznej analiza procesu indukcyjnego nagrzewania rur uzyska pełną przydatność, jeśli pozwoli na skorelowanie

dwóch ściśle ze sobą związanych zagadnień - elektromagnetycznego i cieplnego. Metoda obliczeniowa dla tego procesu musi zezwolić na określenie takiego okładu prądowego wzbudnika, by uzyskany końcowy rozkład temperatury był zbieżny z założonym przez technologa. Oprócz tego powinna to być metoda dokładna, gdyż dopiero taka metoda zezwoli na szersze wykorzystanie grzejnictwa indukcyjnego w procesach obróbki plastycznej. Możliwość dokładnego określenia parametrów nagrzewnicy indukcyjnej, pozwoli także na poprawę jakości wyrobów i zmniejszenie kosztów eksploatacyjnych urządzenia.

Z uwagi na to sformułowano następująco cel pracy:

1) opracowanie metodyki obliczania indukcyjnych układów grzejnych rura - wzbudnik o długości skończonej, w oparciu o dokładne metody analityczne[x)], zezwalającej na określenie koniecznego okładu prądowego wzbudnika dla żądanego ze względów technologicznych rozkładu temperatury,
2) analiza i uproszczenia uzyskanych wzorów ogólnych zezwalające na stosowanie ich w praktyce inżynierskiej,
3) przygotowanie metod dla obliczania wzbudników wielosekcyjnych.

Wynikający z wyżej określonego celu zakres pracy dotyczy analizy przypadków nagrzewania wewnętrznego i zewnętrznego rur wzbudnikami o długości skończonej. Pole elektromagnetyczne w ww. układach obliczone zostanie w oparciu o metody szeregu i całki Fouriera, przy czym zostanie dokonana ocena ich przydatności dla użytku inżynierskiego. Pole temperaturowe obliczy się w oparciu o tzw. metodę Fouriera. Materiał teoretyczny poparty zostanie bogatą częścią doświadczalną związaną z istotnymi problemami praktyki hutniczej.

Tak sformułowany cel i zakres pracy umożliwia rozpatrzenie w sposób ogólny i kompleksowy całości zagadnień związanych z miejscowym indukcyjnym nagrzewaniem rur. Wyniki uzyskane w tej pracy, łącznie z przypadkami rozwiązanymi w literaturze (omówionymi w p. 2), będą stanowiły komplet przypadków dotyczących układów rura-wzbudnik.

---

x) Wprowadzone tu pojęcie "dokładne metody analityczne" będzie bliżej wyjaśnione w p.p. 3.1.

3. ANALIZA MATEMATYCZNA POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

3.1. Charakterystyka przyjętych metod obliczeniowych

Analizę pola elektromagnetycznego przy miejscowym indukcyjnym nagrzewaniu rur przeprowadzi się w oparciu o dokładne metody analityczne. Pod pojęciem tym będzie się tu rozumieć, metody bazujące na analitycznym rozwiązaniu równań różniczkowych pola elektromagnetycznego dla układu grzejnego ze wzbudnikiem o wymiarach skończonych. Metody te, mimo wprowadzenia pewnych założeń upraszczających związanych z geometrią układu, można nazwać dokładnymi z dwóch powodów: po pierwsze - wprowadzone uproszczenia mają pomijalnie mały wpływ na dokładność rozwiązań, a po drugie - są one dokładniejsze od stosowanych w literaturze metod przybliżonych. Dokładne metody analityczne umożliwiają precyzyjną analizę wszystkich istotnych dla nagrzewania indukcyjnego parametrów elektromagnetycznych. W zależności od wyboru modelu matematycznego rzeczywistego układu grzejnego, wyróżnia się tu metodę szeregu lub całki Fouriera. Obydwie te metody zostaną bliżej omówione w dalszym ciągu pracy.

Podstawą do precyzyjnej analizy procesu nagrzewania indukcyjnego są równania różniczkowe pola elektromagnetycznego - równania Maxwella [14, 45,61], które przez wprowadzenie potencjału wektorowego $\bar{A}$ można sprowadzić do jednego równania różniczkowego tego potencjału [61,78]. W układach wsad - wzbudnik o symetrii cylindrycznej dla prądów sinusoidalnych równanie to przybiera postać [19,78]:

$$\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial z^2} + (\alpha^2 - j\beta^2 - \frac{1}{r^2})\, \bar{A} = 0 \qquad (3\text{-}1)$$

gdzie

$$\bar{A} = A_\varphi(r,z)e^{j\omega t}\, \bar{\tau}_\varphi \qquad \text{a}$$

$$\alpha^2 = \varepsilon\mu\omega^2 \qquad \text{b} \qquad (3\text{-}2)$$

$$\beta^2 = \sigma\mu\omega \qquad \text{c}$$

oraz

ε przenikalność elektryczna ośrodka,

μ przenikalność magnetyczna ośrodka,

σ konduktywność wsadu,

$\omega = 2\pi f$ pulsacja prądu,

r, φ, z współrzędne walcowe,

$j = \sqrt{-1}$ jednostka urojona,

t czas,

$\bar{i}_\varphi$ wersor w kierunku "osi" φ, pozostałe wersory oznaczać się będzie $\bar{i}_r$ i $\bar{i}_z$.

Potencjał wektorowy $\bar{A}$ związany jest z wektorami pola elektromagnetycznego następującymi zależnościami [53,61] :

$$\bar{B} = \mathrm{rot}\,\bar{A} \qquad a$$

$$\bar{E} = -j\omega\bar{A}^{x)} \qquad b \qquad (3\text{-}3)$$

$$\bar{J} = \sigma\bar{E}, \qquad c$$

gdzie:

$\bar{B}$ - wektor indukcji magnetycznej,

$\bar{E}$ - wektor natężenia pola elektrycznego,

$\bar{J}$ - wektor gęstości prądu.

oraz spełnia warunek dodatkowy

$$\mathrm{div}\,\bar{A} = 0. \qquad (3\text{-}4)$$

Równania (3-1) do (3-4), sformułowane w sposób ogólny, będą stanowiły tu punkt wyjścia do obliczeń w rozważanych dalej konkretnych przypadkach.

3.1.1. Metoda szeregu Fouriera

Metoda szeregu Fouriera polega na zastąpieniu pojedynczego (istniejącego w rzeczywistości) wzbudnika nieskończonym szeregiem identycznych wzbudników rozłożonych w równych odległościach od siebie. W ten sposób "układ rzeczywisty"[xx)] zostaje zastąpiony pewnym modelem obliczeniowym, jak na rys. 3.1. Układ na rys. 3.1b jest właściwie układem nieskończenie długim, jednak na podstawie jego analizy można wyciągać wnioski dla układu ze wzbudnikiem skończonym.

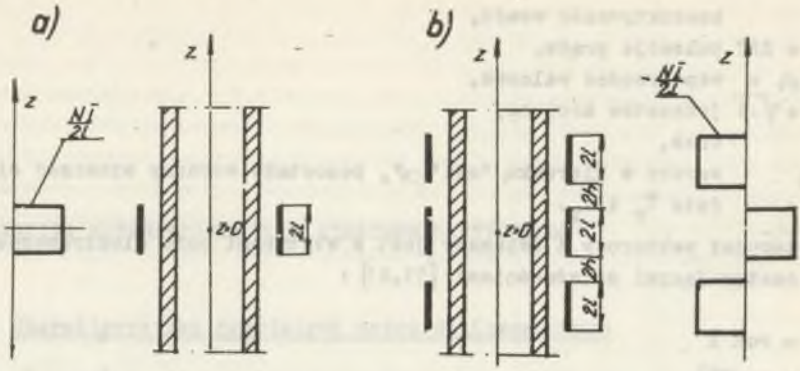
---

x) Pełna postać równania (3-3b) jest:

$$\bar{E} = -\frac{\partial\bar{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\psi,$$

gdzie ψ jest potencjałem skalarnym [53]. Jednakże zgodnie z [43,60,64, 80], w rozważanych tu przypadkach można przyjąć $\psi = 0$.

xx) Wprowadzony tu "układ rzeczywisty" jest już układem uproszczonym. Jednak aby nie zaciemniać w tym miejscu sensu zagadnienia użyto tej nazwy. Rozbieżność między układem rzeczywistym z rys. 3.1a a konstrukcją wzbudnika zostanie wyjaśniona w dalszym ciągu pracy.



Rys. 3.1. Układ rzeczywisty (a) i model obliczeniowy (b) w metodzie szeregu Fouriera wraz z przynależnymi okładami prądowymi $J = \frac{NI}{2l}$ N - ilość zwojów wzbudnika, I - prąd wzbudnika, 2l - długość wzbudnika, 2h - odstępy pomiędzy hipotetycznymi wzbudnikami.

Przedstawionemu na rys. 3.1b systemowi wzbudników przyporządkowano na przemian przeciwne kierunki prądów, co w ogólności nie musi zachodzić. Jednak takie przedstawienie jest łatwiejsze do analizy matematycznej, gdyż funkcja gęstości prądu J(z) jest okresowa i parzysta, co poważnie upraszcza jej szereg Fouriera. Oprócz elementów na rys. 3.1a, w układzie może jeszcze znajdować się bocznik magnetyczny (w przypadku nagrzewania od wewnątrz rdzeń magnetyczny), który w modelu obliczeniowym przyjmuje się jako nieskończenie długi.

Podstawową zaletą metody szeregu Fouriera jest możliwość przedstawienia funkcji J(z), a tym samym i wektorów pola elektromagnetycznego, za pomocą szeregu trygonometrycznego (szeregu Fouriera). Z uwagi na to, że szeregi te są szybkozbieżne i uwzględnienie już kilku pierwszych wyrazów daje wystarczającą dokładność, poważnie skraca się czas obliczeń. Oprócz tego dosyć łatwe jest analityczne badanie wpływu poszczególnych parametrów układu na obliczane wielkości, co umożliwia uogólnienie wyników. Główną wadą metody jest wprowadzenie nieistniejących wzbudników i związanego z nimi parametru 2h. Dobór stosunku 2h/2l będzie miał oczywiście istotny wpływ na otrzymanie wielkości i dlatego należy przed każdym obliczeniem określić optymalny dla danego układu stosunek[x)].

3.1.2. Metoda całki Fouriera

W metodzie całki Fouriera przedstawia się funkcję gęstości prądu J(z) za pomocą całkowego przekształcenia Fouriera. Modelem obliczeniowym dla tej metody jest układ rzeczywisty wg rys. 3.1a, przy czym, jeśli w ukła-

---

x) Dobór optymalnego stosunku 2h/2l zostanie dla konkretnych przykładów omówiony w p. 5.

dzie występuje jeszcze bocznik magnetyczny, to także traktuje się go jako nieskończenie długi.

Zaletą metody jest większa dokładność obliczeń, gdyż nie wprowadza się żadnych dodatkowych założeń (vide p.p. poprzedni), a tym samym model obliczeniowy jest bardziej zbliżony do konstrukcji wzbudnika. Wadą jest konieczność stosowania szybkoliczących maszyn cyfrowych, ponieważ otrzymane wyniki mają postać dość skomplikowanych całek niewłaściwych niemożliwych do obliczenia na drodze analitycznej. W związku z tym także badanie wpływu parametrów układu na obliczone wielkości musi odbywać się metodami numerycznymi.

3.1.3. Porównanie obydwu metod

Z przeprowadzonej charakterystyki metod szeregu i całki Fouriera można wyciągnąć następujące wnioski:

- metoda całki Fouriera jest dokładniejsza niż metoda szeregu,
- wykonywanie konkretnych obliczeń za pomocą metody szeregu Fouriera jest łatwiejsze niż za pomocą metody całki,
- badanie wpływu poszczególnych parametrów układu na obliczone wielkości jest prostsze w przypadku szeregu Fouriera,
- w metodzie całki Fouriera odpada problem doboru optymalnego dla danego układu stosunku 2h/2l.

Tak więc obydwie metody posiadają swoje dodatnie i ujemne strony i dlatego trudno jest stwierdzić, która z nich jest lepsza. Jednak w polskich warunkach, gdzie cyfrowa technika obliczeniowa jest jeszcze słabo rozwinięta, większe szanse rozwoju ma metoda szeregu Fouriera. Dlatego też w niniejszej pracy większość obliczeń jest prowadzona za pomocą tej metody, a tylko dla pełności wywodów i możliwości konfrontacji wyników pewne obliczenia zostały także przeprowadzone za pomocą metody całki Fouriera.

3.2. Obliczenia za pomocą metody szeregu Fouriera

3.2.1. Indukcyjne nagrzewanie rur od wewnątrz

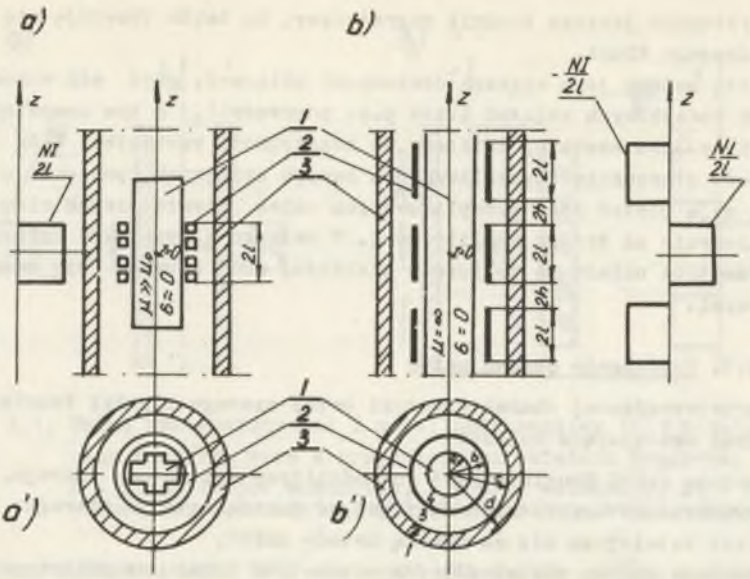
Indukcyjne nagrzewanie rur od wewnątrz odbywa się w układzie przedstawionym na rys. 3.2a[x)], któremu odpowiada, w metodzie szeregu Fouriera, model obliczeniowy jak na rys. 3.2b. Dla jego uzyskania poczyniono następujące uproszczenia[xx)]:

- uzwojenie 2 o skończonej grubości zastąpiono folią o grubości pomijalnie małej przy zachowaniu takiego samego okładu prądowego,

---

x) Na rysunku tym pokazano jedynie istotne dla obliczeń elementy układu.

xx) Uproszczenia takie są powszechnie stosowane w literaturze [12,13,19,34, 51,59]. Ich dokładniejsze omówienie zawiera D.1.



Rys. 3.2. Układ rzeczywisty (a i a') oraz model obliczeniowy (b i b') przy indukcyjnym nagrzewaniu rur od wewnątrz:
1 - rdzeń magnetyczny, 2 - wzbudnik, 3 - rura, 1, 2, 3, 4 - obszary obliczeniowe.

- wsad rurowy 3 o wymiarach skończonych zastąpiono jednorodnym cylindrem nieskończenie długim, przy czym parametry elektromagnetyczne tego cylindra nie zależą od temperatury, ani od natężenia pola magnetycznego,
- rdzeń magnetyczny stopniowany 1 o wymiarach skończonych zastąpiono walcem jednorodnym, nieskończenie długim oraz przyjęto dla niego $\mu = \infty$, $\sigma = 0$,
- promienie elementów układu obliczeniowego a i b są w porównaniu z układem rzeczywistym tzw. promieniami efektywnymi.

3.2.1.1. Potencjał wektorowy, natężenie pola elektrycznego i gęstość prądów indukowanych

Potencjał wektorowy w układzie jak na rys. 3.2b oblicza się na podstawie równania różniczkowego (3-1). Z uwagi na to, że okład prądowy systemu wzbudników można zgodnie z [8,19] przedstawić w postaci:

$$J(z,t) = \frac{2\,N\,I}{\pi l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cos k_n h \cos k_n z \, e^{j\omega t}, \tag{3-5}$$

gdzie:

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \tag{3-6}$$

$L = 2\ (l+h)$

$n = 1,3,5 \ldots$.

Wtedy rozwiązania równania (3-1) można poszukiwać w postaci analogicznej, tzn.:

$$\bar{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n(r) \cos k_n z\, e^{j\omega t}. \tag{3-7}$$

Po wprowadzeniu (3-7) do (3-1) i wykorzystaniu znanych zależności dla szeregów Fouriera [8,17], uzyskuje się:

$$\frac{d^2\bar{A}_n(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\bar{A}_n(r)}{dr} + (\alpha^2 - k_n^2 - j\beta^2 - \frac{1}{r^2})\,\bar{A}_n(r) = 0. \tag{3-8}$$

Współczynniki α^2 i β^2 wg (3-2b,c) będą w zależności od obszaru obliczeniowego, w którym zastosuje się równanie (3-8), przyjmować następujące postaci:

- w obszarach powietrznych 1, 3, 4

  $\beta = 0$

- w metalu - obszar 2

  $\alpha = 0$ x)

Wobec tego można zapisać równanie (3-8) dla obszarów powietrznych

$$\frac{d^2\bar{A}_n(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\,\bar{A}_n(r)}{dr} - (q_n^2 + \frac{1}{r^2})\,\bar{A}_n(r) = 0, \tag{3-9}$$

gdzie:

$$\alpha^2 - k_n^2 = -\,q_n^2 \text{ xx)} \tag{3-10}$$

oraz w metalu (wsadzie)

$$\frac{d^2\bar{A}_n(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\,\bar{A}_n(r)}{dr} - (p_n^2 + \frac{1}{r^2})\,\bar{A}_n(r) = 0, \tag{3-11}$$

gdzie:

$$p_n^2 = k_n^2 + j\beta^2 \tag{3-12}$$

---

x) Zależność ta jest słuszna tylko w przybliżeniu, co omówiono w D.2.

xx) Możliwość takiej interpretacji współczynnika q_n^2 rozważano w D.2.

Równania (3-9) i (3-11) mają postaci podobne i zgodnie z [3,37,41] są równaniami Bessela. Rozwiązaniami ich są kombinacje tzw. zmodyfikowanych funkcji Bessela [37,41,47], a w szczególności:

- rozwiązaniem równania (3-9) jest

$$\bar{A}_n(r) = C_n(q_n)\, I_1\,(q_n r) + D_n\,(q_n)\, K_1\,(q_n r) \tag{3-13}$$

- rozwiązaniem równania (3-11) jest

$$\bar{A}_n(r) = C_n(p_n)\, I_1\,(p_n r) + D_n(p_n)\, K_1\,(p_n r), \tag{3-14}$$

gdzie

$C_n(q_n)$, $D_n(q_n)$, $C_n(p_n)$, $D_n(p_n)$ - stałe dowolne (całkowania),
$I_1(q_n r)$, $K_1(q_n r)$, $I_1(p_n r)$, $K_1(p_n r)$ - zmodyfikowane funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju rzędu pierwszego.

Na podstawie (3-7) oraz (3-13) i (3-14) można napisać wyrażenia ogólne potencjałów wektorowych w poszczególnych obszarach obliczeniowych:

- obszar 1 (powietrze na zewnątrz wsadu)

$$\bar{A}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} D_{n1}\, K_1\,(q_n r)\, \cos k_n z\, e^{j\omega t} \tag{3-15}$$

- obszar 2 (wsad metaliczny)

$$\bar{A}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{n2}\, I_1(p_n r) + D_{n2}\, K_1(p_n r)\right] \cos k_{nz}\, e^{j\omega t} \tag{3-16}$$

- obszar 3 (szczelina między wsadem a uzwojeniem)

$$\bar{A}_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{n3}\, I_1(q_n r) + D_{n3}\, K_1(q_n r)\right] \cos k_n z\, e^{j\omega t} \tag{3-17}$$

- obszar 4 (szczelina między uzwojeniem a rdzeniem)

$$\bar{A}_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{n4}\, I_1(q_n r) + D_{n4}\, K_1(q_n r)\right] \cos k_n z\, e^{j\omega t} \tag{3-18}$$

Za pomocą symboli C_{ni}, D_{ni} oznaczono stałe całkowania w poszczególnych obszarach obliczeniowych. We wzorze (3-15) występuje tylko stała D_{n1}, gdyż stała C_{n1} równa jest zeru ze względu na to, że rozwiązanie musi być skończone przy $r \to \infty$.

Stałe całkowania wyrażeń (3-15) - (3-18) oblicza się korzystając z warunków brzegowych [19,53,61], które w tym przypadku przyjmują postać (vide rys. 3.2):

$$\bar{A}_1 \Big|_{r=d} = \bar{A}_2 \Big|_{r=d} \qquad (a)$$

$$\bar{A}_2 \Big|_{r=c} = \bar{A}_3 \Big|_{r=c} \qquad (b)$$

$$\bar{A}_3 \Big|_{r=b} = \bar{A}_4 \Big|_{r=b} \qquad (c) \qquad (3\text{-}19)$$

$$\frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,\bar{A}_2)}{\partial r}\right]\Bigg|_{r=d} = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,\bar{A}_1)}{\partial r}\right]\Bigg|_{r=d} \qquad (d)$$

$$\frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,\bar{A}_2)}{\partial r}\right]\Bigg|_{r=c} = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,\bar{A}_3)}{\partial r}\right]\Bigg|_{r=c} \qquad (e)$$

$$\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,\bar{A}_3)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,\bar{A}_4)}{\partial r}\right]\Bigg|_{r=b} = \bar{J}\,(z,t) \qquad (f)$$

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,\bar{A}_4)}{\partial r}\right]\Bigg|_{r=a} = 0^{x)} \qquad (g)$$

Dla obliczenia stałych całkowania z równań (3-19), z uwagi na to, że potencjały mają postać szeregów, należy zastosować odpowiednie twierdzenia dla szeregów Fouriera [17]. Problem ten został rozważony w D.3, tutaj natomiast poda się od razu postaci obliczonych stałych całkowania, ograniczając się tylko do obszarów 2 (wsadu) oraz 3 (szczeliny), jako najistotniejszych z punktu widzenia elektrotermii. Tak więc:

$$C_{n2} = \frac{X_{n1}}{Y_n}; \qquad D_{n2} = \frac{X_{n2}}{Y_n} \qquad (3\text{-}20)$$

$$C_{n3} = \frac{X_{n3}}{Y_n}; \qquad D_{n3} = \frac{X_{n4}}{Y_n}$$

gdzie

$$X_{n1} = -\frac{2NI\mu b}{\pi lc}\,\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\,M_{n1}\,M_{n7}\cos k_n h$$

$$X_{n2} = -\frac{2NI\mu b}{\pi lc}\,\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\,M_{n1}\,M_{n6}\cos k_n h,$$

---

x) Warunki brzegowe zapisano tu, w sposób powszechnie stosowany w literaturze, w postaci uproszczonej. Ściśle jednak równania te należy rozumieć jako odpowiednie przejścia graniczne. Np. ścisła postać równania (3-19a) jest

$$\lim_{r\to d^+} \bar{A}_1 = \lim_{r\to d^-} \bar{A}_2$$

$$X_{n3} = \frac{2NI\mu_0 b}{\pi l} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} M_{n1} (M_{n7} M_{n2} - M_{n6} M_{n4}) \cos k_n h \tag{3-21}$$

$$X_{n4} = - \frac{2NI\mu_0 b}{\pi l} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} M_{n1} (M_{n7} M_{n5} - M_{n6} M_{n3}) \cos k_n h$$

$$Y_n = M_{n6} \left[K_o (a\, q_n) M_{n3} + I_o (a\, q_n) M_{n4}\right] - M_{n7} \left[K_o (a\, q_n) M_{n5} + I_o (a\, q_n) M_{n2}\right]$$

oraz

$$M_{n1} = K_o (a\, q_n) I_1 (b\, q_n) + I_o (a\, q_n) K_1 (b\, q_n)$$

$$M_{n2} = p_n I_o (c\, p_n) K_1 (c\, q_n) + \mu_r q_n K_o (c\, q_n) I_1 (c\, p_n)$$

$$M_{n3} = p_n I_1 (c\, q_n) K_o (cp_n) + \mu_r q_n I_o (cq_n) K_1 (c\, p_n), \tag{3-22}$$

$$M_{n4} = p_n K_o (cp_n) K_1 (cq_n) - \mu_r q_n K_o (cq_n) K_1 (cp_n)$$

$$M_{n5} = p_n I_1 (cq_n) I_o (cp_n) - \mu_r q_n I_o (cq_n) I_1 (cp_n)$$

$$M_{n6} = p_n K_1 (dq_n) I_o (dp_n) + \mu_r q_n K_o (dq_n) I_1 (dp_n)$$

$$M_{n7} = p_n K_1 (dq_n) K_o (dp_n) - \mu_r q_n K_o (dq_n) K_1 (dp_n)$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

$I_o(x)$, $K_o(x)$ - zmodyfikowane F. Bessela pierwszego i drugiego rodzaju rzędu zerowego.

Ostatecznie potencjały wektorowe układu na rys. 3.2 dane są więc wyrażeniami (3-15) - (3-18) uzupełnianymi wzorami na stałe całkowania (3-20) - (3-22).

Pole elektryczne w rozważanym układzie oblicza się na podstawie równania (3-3b). Dla obszarów 2 i 3 wyraża się równaniami

$$\bar{E}_2 = - j\omega \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{n2} I_1 (p_n r) + D_{n2} K_1 (p_n r)\right] \cos k_n z\, e^{j\omega t}$$

$$\bar{E}_3 = - j\omega \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{n3} I_1 (q_n r) + D_{n3} K_1 (q_n r)\right] \cos k_n z\, e^{j\omega t} \tag{3-23}$$

Gęstość prądów indukowanych we wsadzie, zgodnie z (3-3c), jest dana wzorem:

$$J_2 = -j\omega\sigma\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n2}I_1(p_n r) + D_{n2}K_1(p_n r)\right]\cos k_n z\, e^{j\omega t} \tag{3-24}$$

3.2.1.2. Indukcja i pole magnetyczne

Indukcję magnetyczną oblicza się na podstawie równania (3-3a). Z uwagi na to, że potencjał wektorowy w rozważanym układzie posiada tylko jedną składową różną od zera (składową kątową), indukcja magnetyczna będzie miała dwie składowe:

$$\bar{B} = \mathrm{rot}\,\bar{A} = \left[-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\bar{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,A_\varphi)}{\partial r}\bar{r}_z\right]\cdot e^{j\omega t} = \bar{B}_r + \bar{B}_z \tag{3-25}$$

Składowe te w obszarach 2 i 3, zgodnie z (3-16) i (3-17) przyjmą postać:

- we wsadzie

$$\bar{B}_{2r} = \sum_{n=1}^{\infty} k_n\left[C_{n2}I_1(p_n r) + D_{n2}K_1(p_n r)\right]\sin k_n z\, e^{j\omega t} \tag{a}$$

(3-26)

$$\bar{B}_{2z} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n\left[C_{n2}I_o(p_n r) - D_{n2}K_o(p_n r)\right]\cos k_n z\, e^{j\omega t} \tag{b}$$

- w szczelinie

$$\bar{B}_{3r} = \sum_{n=1}^{\infty} k_n\left[C_{n3}I_1(q_n r) + D_{n3}K_1(q_n r)\right]\sin k_n z\, e^{j\omega t}$$

(3-27)

$$\bar{B}_{3z} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n\left[C_{n3}I_o(q_n r) - D_{n3}K_o(q_n r)\right]\cos k_n z\, e^{j\omega t}$$

Natężenie pola magnetycznego $\bar{H}$ związane jest z indukcją magnetyczną równaniem:

$$\bar{B} = \mu\bar{H} \tag{3-28}$$

W rozważanych tu środowiskach liniowych, jednorodnych i izotropowych μ traktowane jest jak skalar, tak więc natężenie pola magnetycznego w poszczególnych obszarach obliczeniowych można zapisać:

- we wsadzie

$$\bar{H}_{2r} = \frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty} k_n \left[C_{n2}I_1(p_n r) + D_{n2}K_1(p_n r)\right] \sin k_n z \, e^{j\omega t}$$

$$\bar{H}_{2z} = \frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[C_{n2}I_o(p_n r) - D_{n2}K_o(p_n r)\right] \cos k_n z \, e^{j\omega t}, \tag{3-29}$$

- w szczelinie

$$\bar{H}_{3r} = \frac{1}{\mu_o}\sum_{n=1}^{\infty} k_n \left[C_{n3}I_1(q_n r) + D_{n3}K_1(q_n r)\right] \sin k_n z \, e^{j\omega t}$$

$$\bar{H}_{3z} = \frac{1}{\mu_o}\sum_{n=1}^{\infty} q_n \left[C_{n3}I_o(q_n r) - D_{n3}K_o(q_n r)\right] \cos k_n z \, e^{j\omega t}. \tag{3-30}$$

3.2.1.3. Wektor Poyntinga, gęstość mocy czynnej oraz cosφ

Wektor Poyntinga określający strumień mocy przekazywanej od wzbudnika do wsadu, zgodnie z [68,82], określany jest równaniem:

$$\bar{S} = \frac{-j\omega}{2\mu} \bar{A} \times \bar{B}^*, \tag{3-31}$$

gdzie $\bar{B}^*$ jest wektorem zespolonym sprzężonym z $\bar{B}$. Z uwagi na to, że w rozpatrywanym układzie potencjał wektorowy ma jedną składową, natomiast indukcja dwie - wektor (3-31) będzie miał także dwie składowe, a to;

$$\bar{S}_r = \frac{-j\omega}{2\mu} \bar{A} \cdot \bar{B}_z^*, \quad \text{(a)}$$

$$\bar{S}_z = \frac{j\omega}{2\mu} \bar{A} \cdot \bar{B}_r^*. \quad \text{(b)} \tag{3-32}$$

Tak więc na podstawie wyrażeń (3-16) - (3-17) oraz (3-26) - (3-27) składowe wektora Poyntinga w dwóch rozważanych obszarach obliczeniowych przyjmują postać:

- we wsadzie

$$\bar{S}_{2r} = \frac{-j\omega}{2\mu} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{n2}I_1(p_n r) + D_{n2}K_1(p_n r)\right] \cos k_n z\right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{\sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[C_{n2}I_o(p_n r) - D_{n2}K_o(p_n r)\right] \cos k_n z\right\}^* \quad \text{(a)} \tag{3-33}$$

$$\bar{S}_{2z} = \frac{j\omega}{2\mu}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n I_1(p_n r) + D_{n2}K_1(p_n r)\right]\cos k_n z\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty} k_n\left[C_n I_1(p_n r) + D_{n2}K_1(p_n r)\right]\sin k_n z\right\}^{*} \qquad \text{(b)}$$

– w szczelinie

$$\bar{S}_{3r} = \frac{-j\omega}{2\mu_o}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n3}I_1(q_n r) + D_{n3}K_1(q_n r)\right]\cos k_n z\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty} q_n\left[C_{n3}I_o(q_n r) - D_{n3}K_o(q_n r)\right]\cos k_n z\right\}^{*}, \qquad (3\text{-}34)$$

$$\bar{S}_{3z} = \frac{j\omega}{2\mu_o}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n3}I_1(q_n r) + D_{n3}K_1(q_n r)\right]\cos k_n z\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty} k_n\left[C_{n3}I_1(q_n r) + D_{n3}K_1(q_n r)\right]\sin k_n z\right\}^{*}.$$

Gęstość mocy czynnej wydzielanej we wsadzie, można zgodnie z [48,78], obliczyć na podstawie wzoru

$$P_{cz} = \frac{1}{\sigma}\left|J\right|^2, \qquad (3\text{-}35)$$

czyli zgodnie z (3-24)

$$P_{cz} = \omega^2\sigma\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n2}I_1(p_n r) + D_{n2}K_1(p_n r)\right]\cos k_n z\right|^2. \qquad (3\text{-}36)$$

Współczynnik mocy – $\cos\varphi$, dla układu na rys. 3.2, oblicza się na podstawie wzoru (3-33a). Składowa promieniowa wektora Poyntinga $\bar{S}_{2r}$ jest oczywiście wielkością zespoloną i dlatego można ją formalnie zapisać w postaci

$$\bar{S}_{2r} = \mathrm{Re}\,\bar{S}_{2r} + j\,\mathrm{Im}\,\bar{S}_{2r} = \left|\bar{S}_{2r}\right|(\cos\varphi + j\sin\varphi). \qquad (3\text{-}37)$$

Zgodnie z [34,82] część rzeczywista powyższego wzoru określa strumień mocy czynnej, natomiast część urojona strumień mocy biernej. Tak więc współczynnik mocy wyraża się wzorem

$$\cos = \frac{\mathrm{Re}\,\bar{S}_{2r}}{\left|\bar{S}_{2r}\right|}. \qquad (3\text{-}38)$$

3.2.1.4. Rola rdzenia magnetycznego w układzie - Wzbudnik bez rdzenia magnetycznego

Rdzeń magnetyczny w układzie na rys. 3.2 spełnia dwa podstawowe zadania:

- zwiększa indukcję we wsadzie,
- poprawia $\cos\varphi$.

Dalej rozpatrzy się pokrótce pierwsze.

Wzór (3-26b) określa składową wzdłużną indukcji we wsadzie przy pewnym promieniu rdzenia "a" oraz określonej długości wzbudnika 2l. Badanie roli rdzenia magnetycznego w układzie zostanie ograniczone tylko do określenia indukcji w zależności od promienia rdzenia a ($b > a \geqslant 0$, vide rys. 3.2).

W związku z tym należy znaleźć wyrażenie graniczne na indukcję, określające przejście do układu z rdzeniem ($\overline{B}_{2z}$) do układu bez rdzenia ($\overline{B}_{2z}^{brdz}$). Matematycznie uzyska się to po wykonaniu granicy $a \to 0$. Tak więc:

$$\overline{B}_{2z}^{brdz} = \lim_{a\to 0}\left[\overline{B}_{2z}\right] = \lim_{a\to 0}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[C_{n2}I_o(p_n r) - D_{n2}K_o(p_n r)\right] \cos k_n z\, e^{j\omega t}\right\} = -\frac{2NI\mu b}{\pi l c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\, p_n \cdot$$

$$\cdot\, I_1(q_n b)\,\frac{M_{n7}I_o(p_n r) - M_{n6}K_o(p_n r)}{M_{n6}M_{n3} - M_{n7}M_{n5}} \cos k_n h \cos k_{nz}\, e^{j\omega t} \qquad (3\text{-}39)$$

Wzory (3-39) i (3-26 b) zezwalają na przeprowadzenie porównania wartości indukcji w zależności od średnicy rdzenia.

3.2.1.5. Wzory uproszczone dla potencjału i indukcji

Wyprowadzone dotychczas wzory ogólne słuszne dla układu na rys. 3.2 można uprościć przy następujących dwóch założeniach:

- wymiary geometryczne układu są duże,
- $\beta^2 \gg k_n^2$.

Założenia te sprowadzają się do jednego warunku matematycznego, aby argumenty funkcji Bessela występujących we wzorach ogólnych były nie mniejsze od 10 [3,52], gdyż wtedy funkcje Bessela można zamienić ich wartościami asymptotycznymi. Przy ww. założeniach wyrażenie (3-16) na potencjał wektorowy przyjmie postać:

$$\overline{A}_2 = -\frac{2NI\mu b}{\pi l\sqrt{c\, r}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\, M_{n1}\,\frac{X_n}{Y_n} \cos k_n h \cos k_n z\, e^{j\omega t} \qquad (3\text{-}40)$$

wyrażenie (3-26b) na składową wzdłużną indukcji magnetycznej:

$$\bar{B}_{2z} = \frac{2NI\gamma\mu b}{\pi l\sqrt{c\,r}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} M_{1n} \frac{X'_n}{Y'_n} \cos k_n h \cos k_n z\, e^{j\omega t} \tag{3-41}$$

oraz wyrażenie (3-39) na składową wzdłużną indukcji magnetycznej w układzie bezrdzeniowym:

$$\bar{B}_{2z}^{brdz} = \frac{2NI\gamma\mu b}{\pi l\sqrt{c\,r}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} I_1(q_n b) \frac{X'_n}{Y''_n} \cos k_n h \cos k_n z\, e^{j\omega t} \tag{3-42}$$

gdzie:

$$X'_n = \gamma\, K_1(q_n d)\,\mathrm{sh}\,\gamma(d-r) + \mu_r q_n\, K_o(q_n d)\,\mathrm{ch}\,\gamma(d-r),$$

$$X''_n = \gamma\, K_1(q_n d)\,\mathrm{ch}\,\gamma(d-r) + \mu_r q_n\, K_o(q_n d)\,\mathrm{sh}\,\gamma(d-r).$$

$$Y'_n = \left[\gamma^2 K_1(q_n d)\, M'_n + \mu_r^2 q_n^2 K_o(q_n d)\, M''_n\right]\mathrm{sh}\,\gamma(d-c) +$$

$$+\gamma\mu_r q_n \left[K_1(q_n d)\, M''_n + K_o(q_n d)\, M'_n\right]\mathrm{ch}\,\gamma(d-c), \tag{3-43}$$

$$Y''_n = \left[\gamma^2 K_1(q_n d)\, I_1(q_n c) + \mu_r^2 q_n^2 K_o(q_n d)\, I_o(q_n c)\right]\mathrm{sh}\,\gamma(d-c) +$$

$$+\gamma\mu_r q_n\, M_n\,\mathrm{ch}\,\gamma(d-c).$$

$$M'_n = K_o(q_n a)\, I_1(q_n c) + I_o(q_n a)\, K_1(q_n c),$$

$$M''_n = K_o(q_n a)\, I_o(q_n c) - I_o(q_n a)\, K_o(q_n c),$$

$$M_n = K_1(q_n d)\, I_o(q_n c) + K_o(q_n d)\, I_1(q_n c),$$

$$\gamma = \sqrt{j\beta}.$$

3.2.2. Indukcyjne nagrzewanie rur od zewnątrz

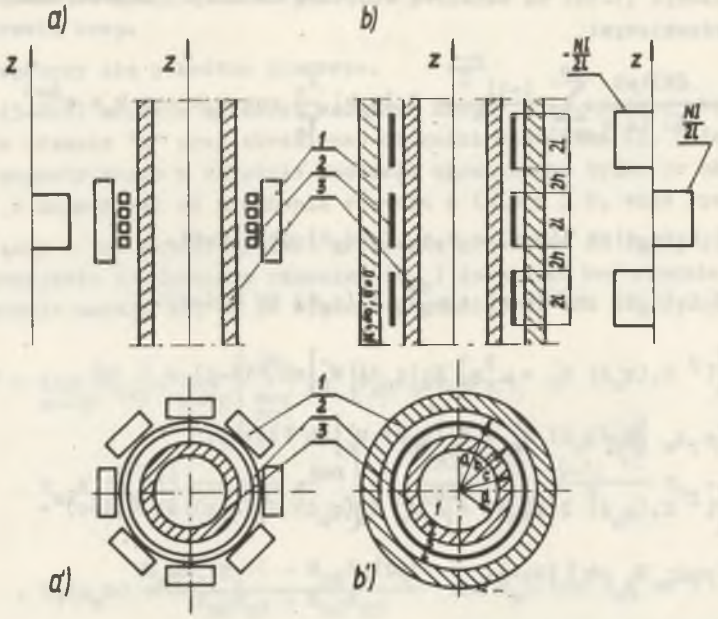
Indukcyjne nagrzewanie rur od zewnątrz odbywa się w układzie przedstawionym na rys. 3.3a[x)], któremu odpowiada model obliczeniowy jak na rys. 3.3b. Uproszczenia poczynione dla uzyskania modelu obliczeniowego są analogiczne jak w p.p. 3.2.1, a ich dokładniejsze omówienie zawarte jest w D.1.

---

x) Na rysunku tym, analogicznie do rys. 3.2a, pokazano jedynie istotne z punktu widzenia obliczeń elementy. Układ na rys. 3.3 różni się od układu na rys. 3.1 tym, że uwzględniono również bocznik magnetyczny.

3.2.1.1. Potencjał wektorowy, natężenie pola elektrycznego i gęstość prądów indukowanych

Z uwagi na to, że okład prądowy systemu wzbudników na rys. 3.3b wyraża się wzorem identycznym z wzorem (3-5), więc identyczny jest również cały tok postępowania jak w p.p. 3.2.1.1, aż do wyrażenia (3-14).



Rys. 3.3. Układ rzeczywisty (a i a') oraz model obliczeniowy (b i b') przy indukcyjnym nagrzewaniu rur od zewnątrz:
1 - bocznik magnetyczny, 2 - wzbudnik, 3 - rura, 1, 2, 3, 4 - obszary obliczeniowe

Różnice występują dopiero od wyrażeń na potencjały wektorowe w poszczególnych obszarach obliczeniowych. Potencjały te w przypadku nagrzewania zewnętrznego mają postać:

- obszar 1 (przestrzeń wewnątrz wsadu)

$$\bar{A}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C'_{n1}\, I_1\,(q_n r)\, \cos k_n z\, e^{j\omega t}, \tag{3-44}$$

- obszar 2 (wsad metaliczny)

$$\bar{A}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C'_{n2}\, I_1(p_n r) + D_{n2} K_1\,(p_n r)\right] \cos k_n z\, e^{j\omega t}, \tag{3-45}$$

- obszar 3 (szczelina między wsadem a uzwojeniem)

$$\bar{A}_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C'_{n3} I_1(q_n r) + D'_{n3} K_1(q_n r)\right] \cos k_n z \, e^{j\omega t}, \tag{3-46}$$

- obszar 4 (szczelina między uzwojeniem a bocznikiem)

$$\bar{A}_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C'_{n4} I_1(q_n r) + D'_{n4} K_1(q_n r)\right] \cos k_n z \, e^{j\omega t}. \tag{3-47}$$

Stałe całkowania wyrażeń (3-44) - (3-47) oblicza się z warunków brzegowych, które w tym przypadku przyjmują postać (vide rys. 3.3):

$$\begin{aligned}
&\bar{A}_1 \Big|_{r=d} = \bar{A}_2 \Big|_{r=d} \\
&\bar{A}_2 \Big|_{r=c} = \bar{A}_3 \Big|_{r=c} \\
&\bar{A}_3 \Big|_{r=b} = A_4 \Big|_{r=b} \\
&\frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\bar{A}_2)}{\partial r}\right]\Big|_{r=d} = \frac{1}{\mu_o}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\bar{A}_1)}{\partial r}\right]\Big|_{r=d} \\
&\frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\bar{A}_2)}{\partial r}\right]\Big|_{r=c} = \frac{1}{\mu_o}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\bar{A}_3)}{\partial r}\right]\Big|_{r=c} \\
&\frac{1}{\mu_o}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\bar{A}_4)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r\bar{A}_3)}{\partial r}\right]\Big|_{r=b} = \bar{J}\,(z,t) \\
&\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\bar{A}_4)}{\partial r}\right]\Big|_{r=a} = 0.
\end{aligned} \tag{3-48}$$

przy czym równania (3-48) należy także traktować w sensie omówionym w p.p. 3.2.1.1.

Stałe całkowania w obszarach 2 i 3 obliczone z powyższych warunków dane są wzorami:

$$\begin{aligned}
C'_{n2} &= \frac{X'_{n1}}{Y'_n}; \qquad & D'_{n2} &= \frac{X'_{n2}}{Y'_n} \\
C'_{n3} &= \frac{X'_{n3}}{Y'_n}; \qquad & D'_{n3} &= \frac{X'_{n4}}{Y'_n},
\end{aligned} \tag{3-49}$$

gdzie:

$$X'_{n1} = -\frac{2NI\mu b}{\pi l c}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} N_{n1} N_{n7} \cos k_n h$$

$$X'_{n2} = -\frac{2NI\mu b}{\pi l c}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} N_{n1} N_{n6} \cos k_n h$$

$$X'_{n3} = +\frac{2NI\mu_o b}{\pi l}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} N_{n1} (N_{n7} N_{n2} - N_{n6} N_{n4}) \cos k_n h$$

$$X'_{n4} = -\frac{2NI\mu_o b}{\pi l}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} N_{n1} (N_{n7} N_{n5} - N_{n6} N_{n3}) \cos k_n h \qquad (3\text{-}50)$$

$$Y'_n = N_{n6}\left[K_o(q_n a) N_{n3} + I_o(q_n a) N_{n4}\right] -$$

$$- N_{n7}\left[K_o(q_n a) N_{n5} + I_o(q_n a) N_{n2}\right],$$

oraz

$$N_{n1} = I_1(q_n b) K_o(q_n a) + I_o(a_n a) K_1(q_n b)$$

$$N_{n2} = p_n I_o(p_n c) K_1(q_n c) + \mu_r q_n I_1(p_n c) K_o(q_n o) \qquad (3\text{-}51)$$

$$N_{n3} = p_n K_o(p_n c) I_1(q_n c) + \mu_r q_n K_1(p_n c) I_o(q_n c)$$

$$N_{n4} = p_n K_o(p_n c) K_1(q_n c) - \mu_r q_n K_1(p_n c) K_o(q_n c)$$

$$N_{n5} = p_n I_o(p_n c) I_1(q_n c) - \mu_r q_n I_1(p_n c) I_o(q_n c)$$

$$N_{n6} = p_n I_o(p_n d) I_1(q_n d) - \mu_r q_n I_1(p_n d) I_o(q_n d)$$

$$N_{n7} = p_n K_o(p_n d) I_1(q_n d) + \mu_r q_n K_1(p_n d) I_o(q_n d).$$

Ostatecznie potencjały wektorowe układu na rys. 3.3 dane są wyrażeniami (3-44) - (3-47) uzupełnionymi wzorami na stałe całkowania (3-49) - (3-51).

Pole elektryczne dla obszarów 2 i 3 przyjmuje postać:

$$\bar{E}_2 = -j\omega \sum_{n=1}^{\infty} \left[C'_{n2} I_1(p_n r) + D'_{n2} K_1(p_n r)\right] \cos k_n z \, e^{j\omega t} \qquad (a)$$

$$(3\text{-}52)$$

$$\bar{E}_3 = -j\omega \sum_{n=1}^{\infty} \left[C'_{n3} I_1(q_n r) + D'_{n3} K_1(q_n r)\right] \cos k_n z \, e^{j\omega t} \qquad (b)$$

Gęstość prądów indukowanych we wsadzie wyraża się wzorem:

$$\bar{J}_2 = -j\omega\sigma \sum_{n=1}^{\infty} \left[C'_{n2} I_1(p_n r) + D'_{n2} K_1(p_n r)\right] \cos k_n z \, e^{j\omega t} \qquad (3\text{-}53)$$

3.2.2.2. Indukcja i pole magnetyczne

Indukcja magnetyczna w rozważanym układzie posiada dwie składowe, które w obszarach 2 i 3 przyjmują postać:

- we wsadzie

$$\bar{B}_{2r} = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \left[C'_{n2}\, I_1(p_n r) + D'_{n2}\, K_1(p_n r)\right] \sin k_n z\, e^{j\omega t} \qquad \text{(a)}$$

$$\bar{B}_{2z} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[C'_{n2}\, I_o(p_n r) - D'_{n2}\, K_o(p_n r)\right] \cos k_n z\, e^{j\omega t} \qquad \text{(b)} \qquad (3\text{-}54)$$

- w szczelinie

$$\bar{B}_{3r} = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \left[C'_{n3}\, I_1(q_n r) + D'_{n3}\, K_1(q_n r)\right] \sin k_n z\, e^{j\omega t} \qquad \text{(a)}$$

$$\bar{B}_{3z} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \left[C'_{n3}\, I_o(q_n r) - D'_{n3}\, K_o(q_n r)\right] \cos k_n z\, e^{j\omega t} \qquad \text{(b)} \qquad (3\text{-}55)$$

Natężenie pola magnetycznego obliczone na podstawie (3-28):

- we wsadzie

$$\bar{H}_{2r} = \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} k_n \left[C'_{n2}\, I_1(p_n r) + D'_{n2}\, K_1(p_n r)\right] \sin k_n z\, e^{j\omega t},$$

$$\bar{H}_{2z} = \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[C'_{n2}\, I_o(p_n r) - D'_{n2}\, K_o(p_n r)\right] \cos k_n z\, e^{j\omega t}, \qquad (3\text{-}56)$$

- w szczelinie

$$\bar{H}_{3r} = \frac{1}{\mu_o} \sum_{n=1}^{\infty} k_n \left[C'_{n3}\, I_1(q_n r) + D'_{n3}\, K_1(q_n r)\right] \sin k_n z\, e^{j\omega t},$$

$$\bar{H}_{3z} = \frac{1}{\mu_o} \sum_{n=1}^{\infty} q_n \left[C'_{n3}\, I_o(q_n r) - D'_{n3}\, K_o(q_n r)\right] \cos k_n z\, e^{j\omega t}. \qquad (3\text{-}57)$$

3.2.2.3. Wektor Poyntinga, gęstość mocy oraz $\cos\varphi$

Wektor Poyntinga, zgodnie z (3-32) oraz (3-45) - (3-46) i (3-54) - (3-55), w rozważanych obszarach obliczeniowych można zapisać:

- we wsadzie

$$\bar{S}_{2r} = \frac{-j\omega}{2\mu}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[C'_{n2}I_1(p_n r) + D'_{n2}K_1(p_n r)\right]\cos k_n z\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty} p_n\left[C'_{n2}I_o(p_n r) - D'_{n2}K_o(p_n r)\right]\cos k_n z\right\}^* \qquad \text{(a)}$$

(3-58)

$$\bar{S}_{2z} = \frac{j\omega}{2\mu}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[C'_{n2}I_1(p_n r) + D'_{n2}K_1(p_n r)\right]\cos k_n z\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty} k_n\left[C'_{n2}I_1(p_n r) + D'_{n2}K_1(p_n r)\right]\sin k_n z\right\}^*, \qquad \text{(b)}$$

- w szczelinie

$$\bar{S}_{3r} = \frac{-j\omega}{2\mu_o}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[C'_{n3}I_1(q_n r) + D'_{n3}K_1(q_n r)\right]\cos k_n z\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty} q_n\left[C'_{n3}I_o(q_n r) - D'_{n3}K_o(q_n r)\right]\cos k_n z\right\}^*, \qquad \text{(a)}$$

(3-59)

$$\bar{S}_{3z} = \frac{j\omega}{2\mu_o}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[C'_{n3}I_1(q_n r) + D'_{n3}K_1(q_n r)\right]\cos k_n z\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty} k_n\left[C'_{n3}I_1(q_n r) + D'_{n3}K_1(q_n r)\right]\sin k_n z\right\}^* \qquad \text{(b)}$$

Gęstość mocy czynnej wydzielanej we wsadzie oblicza się na podstawie (3-35) oraz (3-53):

$$P_{cz} = \omega^2\sigma\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left[C'_{n2}I_1(p_n r) + D'_{n2}K_1(p_n r)\right]\cos k_n z\right|^2. \qquad (3\text{-}60)$$

Współczynnik mocy dany jest wyrażeniem (3-38), przy czym występujący tam wektor Poyntinga określony jest wyrażeniem (3-58).

3.2.2.4. Rola bocznika magnetycznego w układzie - Wzbudnik bez bocznika magnetycznego

Bocznik magnetyczny w układzie na rys. 3.3 spełnia podobne zadania jak rdzeń magnetyczny w układzie na rys. 3.2 (vide p.p. 3.2.1.4). Dla określ-

lenia jego wpływu na wielkość indukcji magnetycznej należy znaleźć wyrażenie graniczne na indukcję w układzie bez bocznika (B_{2z}^{bbocz}). Tak więc, zgodnie z rys. 3.3:

$$B_{2z}^{b\ bocz} = \lim_{a\to\infty}\left[B_{2z}\right] = \lim_{a\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[C'_{n2}\ I_o(p_n r) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - D'_{n2}\ K_o(p_n r)\right] \cos k_n z\ e^{j\omega t}\right\} = -\frac{2NI\mu b}{\pi l\ c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}$$

$$p_n\ K_1(q_n b)\ \frac{N_{n7} I_o(p_n r) - N_{n6} K_o(p_n r)}{N_{n6}\ N_{n4} - N_{n7}\ N_{n2}} \cos k_n h \cos k_n z\ e^{j\omega t} \qquad (3\text{-}61)$$

co zezwala łącznie ze wzorem (3-54b) na porównanie wartości indukcji magnetycznej w układzie z bocznikiem i bez bocznika magnetycznego.

3.2.2.5. Wzory uproszczone dla potencjału i indukcji

Wyprowadzone dotychczas wzory ogólne, słuszne dla układu na rys. 3.3, można uprościć stosując założenia analogiczne jak w p.p. 3.2.1.5. Wtedy wyrażenie (3-45) na potencjał wektorowy przyjmie postać:

$$\bar{A}_2 = -\frac{2NI\mu b}{\pi l\sqrt{c\ r}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} N_{n1}\ \frac{X''_n}{Y''_n} \cos k_n h \cos k_n z\ e^{j\omega t} \qquad (3\text{-}62)$$

wyrażenie (3-54b) na składową wzdłużną indukcji magnetycznej

$$\bar{B}_{2z} = \frac{2NI\mu b}{\pi l\sqrt{c\ r}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} N_{1n}\ \frac{X'_n}{Y'_n} \cos k_n h \cos k_n z\ e^{j\omega t} \qquad (3\text{-}63)$$

oraz wyrażenie (3-61) na składową wzdłużną indukcji magnetycznej w układzie bez bocznika:

$$\bar{B}_{2z}^{b\ bocz} = \frac{2NI\mu\tau b}{\pi l\sqrt{c\ r}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} K_1(q_n b)\ \frac{X'_n}{Y'_n} \cos k_n h \cos k_n z\ e^{j\omega t} \qquad (3\text{-}64)$$

gdzie:

$$X'_n = \tau\ I_1(q_n d)\ \mathrm{sh}\ \tau(d-r) - \mu_r q_n\ I_o(q_n d)\ \mathrm{ch}\ \tau(d-r)$$

$$X''_n = \tau\ I_1(q_n d)\ \mathrm{ch}\ \tau(d-r) - \mu_r q_n\ I_o(q_n d)\ \mathrm{sh}\ \tau(d-r)$$

$$Y'_n = \left[\tau^2 I_1(q_n d)\, M'_n - \mu_r^2 q_n^2 I_o(q_n d)\, M''_n\right] \operatorname{sh}\tau(d-c) +$$

$$+\tau\mu_r q_n \left[I_1(q_n d)\, M''_n - I_o(q_n d)\, M'_n\right] \operatorname{ch}\tau(d-c), \qquad (3\text{-}65)$$

$$Y''_n = \left[\tau^2 I_1(q_n d)\, K_1(q_n c) + \mu_r^2 q_n^2 I_o(q_n d)\, K_o(q_n c)\right] \operatorname{sh}\tau(c-d)$$

$$+\tau\mu_r q_n N_n \operatorname{ch}\tau(c-d),$$

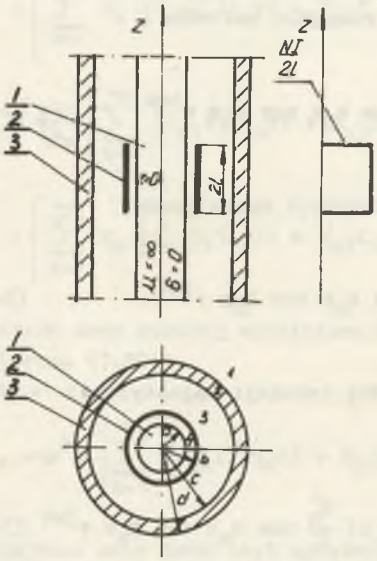
$$N_n = I_1(q_n d)\, K_o(q_n c) + I_o(q_n d)\, K_1(q_n c),$$

pozostałe oznaczenia zgodne z p.p. 3.2.1.5.

3.3. Obliczenia za pomocą metody całki Fouriera

3.3.1. Indukcyjne nagrzewanie rur od wewnątrz

Model obliczeniowy w metodzie całki Fouriera dla indukcyjnego nagrzewania od wewnątrz rur przedstawiono na rys. 3.4 (vide rys. 3.2, p.p.3.2.1)



Rys. 3.4. Model obliczeniowy w metodzie całki Fouriera dla indukcyjnego nagrzewania od wewnątrz rur i przynależny okład prądowy wzbudnika

1 - rdzeń magnetyczny, 2 - wzbudnik, 3 - rura 1, 2, 3, 4 - obszary obliczeniowe

Uproszczenia poczynione dla uzyskania modelu obliczeniowego są identyczne jak w p.p. 3.2.1.

Potencjał wektorowy dla układu na rys. 3.4 oblicza się na podstawie równania różniczkowego (3-1), przy czym dla uproszczenia przyjmie się od razu $\alpha^2 = 0$ (vide D.2). Z uwagi na to, że okład prądowy wzbudnika na

rys. 3.4, zgodnie z [32,42,60], można przedstawić za pomocą całkowego przekształcenia Fouriera w postaci:

$$J(z,t) = \frac{NI}{l} \int_0^{\infty} \frac{\sin kl}{k} \cdot \cos kz \, dk \, e^{j\omega t}, \tag{3-66}$$

gdzie:

k - zmienna pomocnicza (całkowania),
$(0 \leqslant k \leqslant \infty)$

rozwiązania równania (3-1) można poszukiwać w postaci analogicznej, tzn.:

$$\bar{A} = \int_0^{\infty} \bar{A}(k,r) \cos kz \, dk \, e^{j\omega t}. \tag{3-67}$$

Uwzględniejąc (3-67) w (3-1) i wykorzystując zależność dla całek Fouriera [17], otrzymuje się:

$$\frac{d^2 \bar{A}(k,r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \bar{A}(k,r)}{dr} - (k^2 + j\beta^2 + \frac{1}{r^2}) \bar{A}(k,r) = 0. \tag{3-68}$$

Z uwagi na to, że w obszarach powietrznych zachodzi $\beta = 0$ (vide p.p. 3.2.1.1) uzyskuje się dwie postaci równania różniczkowego (3-68):

- w obszarach powietrznych

$$\frac{d^2 \bar{A}(k,r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{A}(k,r)}{dr} - (k^2 + \frac{1}{r^2}) \bar{A}(k,r) = 0 \tag{3-69}$$

- we wsadzie

$$\frac{d^2 \bar{A}(k,r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{A}(k,r)}{dr} - (p^2 + \frac{1}{r^2}) \bar{A}(k,r) = 0, \tag{3-70}$$

gdzie:

$$p^2 = k^2 + j\beta^2 \tag{3-71}$$

Równania (3-69) i (3-70) jako równania Bessela mają następujące rozwiązania:

- w obszarach powietrznych:

$$\bar{A}(k,r) = C(k) \, I_1(kr) + D(k) \, K_1(kr), \tag{3-72}$$

- we wsadzie:

$$\bar{A}(k,r) = C(k) \, I_1(pr) + D(k) \, K_1(pr), \tag{3-73}$$

gdzie: C(k), D(k) są stałymi całkowania.

Na podstawie (3-67) oraz (3-72) - (3-73) można napisać wyrażenia ogólne potencjałów wektorowych w poszczególnych obszarach obliczeniowych (vide rys. 3.4):

- obszar 1:

$$\bar{A}_1 = \int_0^\infty D_1(k)\, K_1(kr) \cos kz\, dk\, e^{j\omega t}, \tag{3-74}$$

- obszar 2:

$$\bar{A}_2 = \int_0^\infty \left[C_2(k)\, K_1(pr) + D_2(k)\, K_1(pr)\right] \cos kz\, dk\, e^{j\omega t}, \tag{3-75}$$

- obszar 3:

$$\bar{A}_3 = \int_0^\infty \left[C_3(k)\, I_1(kr) + D_3(k)\, K_1(kr)\right] \cos kz\, dk\, e^{j\omega t}, \tag{3-76}$$

- obszar 4:

$$\bar{A}_4 = \int_0^\infty \left[C_4(k)\, I_1(kr) + D_4(k)\, K_1(kr)\right] \cos kz\, dk\, e^{j\omega t}. \tag{3-77}$$

Stałe całkowania występujące w wyrażeniach (3-74) - (3-77) oblicza się z warunków brzegowych, które są identyczne z warunkami (3-19). Z uwagi na to, że potencjały mają postaci całek Fouriera, występują tu (analogicznie jak w p.p. 3.2.1.1) problemy związane z wykonywaniem pewnych operacji matematycznych pod znakiem całki. Zagadnienie to rozważono w D.3, a tutaj poda się obliczone stałe całkowania dla obszarów 2 i 3:

$$C_2(k) = \frac{X_1}{Y}; \qquad D_2(k) = \frac{X_2}{Y}$$

$$C_3(k) = \frac{X_3}{Y}; \qquad D_3(k) = \frac{X_4}{Y}, \tag{3-78}$$

gdzie:

$$X_1 = -\frac{NI\mu b}{\pi l\, c} \frac{\sin kl}{k} M_1\, M_7$$

$$X_2 = -\frac{NI\mu b}{\pi l c} \frac{\sin kl}{k} M_1\, M_6$$

$$X_3 = \frac{NI\mu_0 b}{\pi l} M_1\, (M_7\, M_2 - M_6\, M_4) \frac{\sin kl}{k} \tag{3-79}$$

$$X_4 = -\frac{NI\mu_o b}{\pi l} M_1 \left(M_7 M_5 - M_6 M_3\right) \frac{\sin kl}{k}$$

$$Y = M_6 \left[K_o(ka)\, M_3 + I_o(ka)\, M_4\right] - M_7 \left[K_o(ka)\, M_5 + I_o(ka)\, M_2\right]$$

oraz

$$\begin{aligned}
M_1 &= K_o(ka)\, I_1(kb) + I_o(ka)\, K_1(kb) \\
M_2 &= p\, I_o(pc)\, K_1(kc) + \mu_r k\, K_o(kc)\, I_1(pc) \\
M_3 &= p\, I_1(kc)\, K_o(pc) + \mu_r k\, I_o(kc)\, K_1(pc) \\
M_4 &= p\, K_o(pc)\, K_1(kc) - \mu_r k\, K_o(kc)\, K_1(pc) \\
M_5 &= p\, I_1(kc)\, I_o(pc) - \mu_r k\, I_o(kc)\, I_1(pc) \\
M_6 &= p\, K_1(kd)\, I_o(pd) + \mu_r k\, K_o(kd)\, I_1(pd) \\
M_7 &= p\, K_1(kd)\, K_o(pd) - \mu_r k\, K_o(kd)\, K_1(pd)
\end{aligned} \tag{3-80}$$

Ostatecznie więc, potencjały wektorowe układu na rys. 3.4 dane są wyrażeniami (3-74) - (3-77) uzupełnianymi wzorami na stałe całkowania (3-78) - (3-80).

Pole elektryczne oraz gęstość prądów indukowanych we wsadzie oblicza się na podstawie równań (3-3b,c) wykorzystując wyrażenia (3-74) - (3-77).

Indukcja magnetyczna, zgodnie z (3-25), przyjmuje postać

- we wsadzie:

$$\bar{B}_{2r} = \int_0^\infty k \left[C_2(k)\, I_1(pr) + D_2(k)\, K_1(pr)\right] \sin kz\, dk\, e^{j\omega t}, \qquad \text{(a)}$$

$$\bar{B}_{2z} = \int_0^\infty p \left[C_2(k)\, I_o(pr) - D_2(k)\, K_o(pr)\right] \cos kz\, dk\, e^{j\omega t} \qquad \text{(b)} \tag{3-81}$$

- w szczelinie:

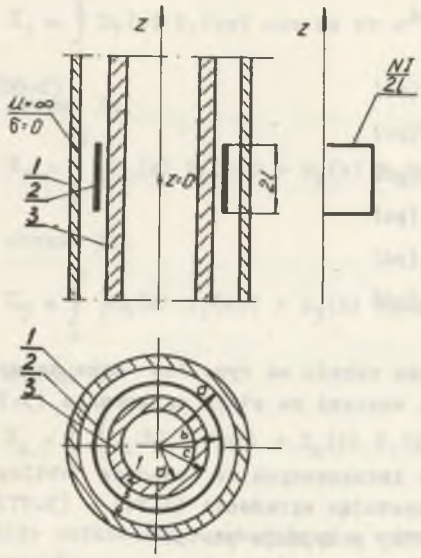
$$\bar{B}_{3r} = \int_0^\infty k \left[C_3(k)\, I_1(kr) + D_3(k)\, K_1(kr)\right] \sin kz\, dk\, e^{j\omega t} \qquad \text{(a)}$$

$$\bar{B}_{3z} = \int_0^\infty k \left[C_3(k)\, I_o(kr) - D_3(k)\, K_o(kr)\right] \cos kz\, dk\, e^{j\omega t} \qquad \text{(b)} \tag{3-82}$$

Pozostałe wielkości elektromagnetyczne jak: natężenie pola magnetycznego, wektor Poyntinga, gęstość mocy czynnej, $\cos\varphi$ oblicza się na podstawie równań (3-28), (3-32), (3-35), (3-38) wykorzystując wyrażenia (3-74) - (3-77) oraz (3-81) - (3-82).

3.3.2. Indukcyjne nagrzewanie rur od zewnątrz

Model obliczeniowy dla analizy matematycznej procesu indukcyjnego nagrzewania rur od zewnątrz przedstawiono na rys. 3.5.



Rys. 3.5. Model obliczeniowy układu dla indukcyjnego nagrzewania zewnętrznego rur i przynależny okład prądowy wzbudnika

1 - bocznik magnetyczny, 2 - wzbudnik, 3 - rura 1, 2, 3, 4 - obszary obliczeniowe

Tok postępowania przytoczony w p.p. poprzednim aż do wzoru (3-37) ważny jest także dla przypadku nagrzewania od zewnątrz. Odmienne są dopiero wyrażenia na potecjały wypadkowe w poszczególnych obszarach obliczeniowych, a to:

- w obszarze 1:

$$\bar{A}_1 = \int_0^\infty C_1'(k)\, I_1(kr) \cos kz\, dk\, e^{j\omega t} \tag{3-83}$$

- w obszarze 2:

$$\bar{A}_2 = \int_0^\infty \left[C_2'(k)\, I_1(pr) + D_2'(k)\, K_1(pr)\right] \cos kz\, dk\, e^{j\omega t} \tag{3-84}$$

- w obszarze 3:

$$\bar{A}_3 = \int_0^\infty \left[C_3'(k)\, I_1(kr) + D_3'(k)\, K_1(kr)\right] \cos kz\, dk\, e^{j\omega t}, \tag{3-85}$$

- w obszarze 4:

$$\bar{A}_4 = \int_0^\infty \left[C_4'(k)\, I_1(kr) + D_4'(k)\, K_1(kr)\right] \cos kz\, dk\, e^{j\omega t}. \tag{3-86}$$

Stałe całkowania w powyższych wyrażeniach oblicza się na podstawie warunków brzegowych (3-48), przy czym występująca tam funkcja $J(z,t)$ dana jest wzorem (3-66). W obszarze 2 i 3 przyjmują one postaci:

$$C_2'(k) = \frac{X_1'}{Y_1'}; \qquad D_2'(k) = \frac{X_2'}{Y'}$$
$$C_3'(k) = \frac{X_3'}{Y'}; \qquad D_3'(k) = \frac{X_4'}{Y'}, \tag{3-87}$$

gdzie:

$$X_1 = -\frac{NI\mu b}{\pi l\, c}\,\frac{\sin kl}{k}\,N_1\,N_7$$

$$X_2' = -\frac{NI\mu b}{\pi l\, c}\,\frac{\sin kl}{k}\,N_1\,N_6$$

$$X_3' = \frac{NI\mu_o b}{\pi l}\,N_1\,(N_7N_2 - N_6N_4)\,\frac{\sin kl}{k} \tag{3-88}$$

$$X_4' = -\frac{NI\mu_o b}{\pi l}\,N_1\,(N_7N_5 - N_6N_3)\,\frac{\sin kl}{k}$$

$$Y' = N_6\left[K_o(ka)\,N_3 + I_o(ka)\,N_4\right] - N_7\left[K_o(ka)\,N_5 + I_o(ka)\,N_2\right]$$

oraz

$$N_1 = I_1(kb)\,K_o(ka) + I_o(ka)\,K_1(kb)$$

$$N_2 = p\,I_o(pc)\,K_1(kc) + \mu_r k\,I_1(pc)\,K_o(kc)$$

$$N_3 = p\,K_o(pc)\,I_1(kc) + \mu_r k\,K_1(pc)\,I_o(kc) \tag{3-89}$$

$$N_4 = p\,K_o(pc)\,K_1(kc) - \mu_r k\,K_1(pc)\,K_o(kc)$$

$$N_5 = p\,I_o(pc)\,I_1(kc) - \mu_r k\,I_1(pc)\,I_o(kc)$$

$$N_6 = p\,I_o(pd)\,I_1(kd) - \mu_r k\,I_1(pd)\,I_o(kd)$$

$$N_7 = p\,K_o(pd)\,I_1(kd) + \mu_r k\,I_o(kd)\,K_1(pd)$$

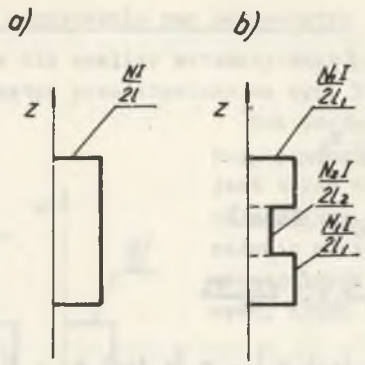
co łącznie z wyrażeniami (3-83) - (3-86) kończy tok obliczeń potencjałów wektorowych w układzie na rys. 3.5.

Pozostałe wielkości elektromagnetyczne oblicza się identycznie jak w p.p. 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1, tak więc ze względu na pełną analogię tych operacji rezygnuje się tutaj z przytaczania odpowiednich wzorów.

3.4. Wzbudniki wielosekcyjne

Dotychczas przeprowadzona analiza matematyczna w p. 3 odnosiła się do wzbudników jednosekcyjnych, czyli takich w których okład prądowy wzbudnika miał kształt pojedynczego prostokąta (rys. 3.6a). Okład taki rozwijano w zależności od stosowanej metody obliczeniowej, na szereg lub całkę Fouriera (vide wzory (3-5), (3-66)), a następnie poszukiwano rozwiązania ogólnego równania różniczkowego (3-1) w postaci analogicznej do tego rozwinięcia. Okłady prądowe dla wzbudników wielosekcyjnych, stosowanych w procesach obróbki plastycznej (vide p. 1) można przedstawić jak na rys. 3.6b.

Celem obliczenia wielkości elektromagnetycznych w przypadku nagrzewania rur wzbudnikami wielosekcyjnymi należy, zamiast wyrażeń (3-5) lub



Rys. 3.6. Okłady prądowe wzbudnika jednosekcyjnego (a) i wielosekcyjnego (b)

I - prąd wzbudnika; $2l$, $2l_1$, $2l_2$ - długość poszczególnych sekcji; N, N_1, N_2 - ilości zwojów w sekcjach

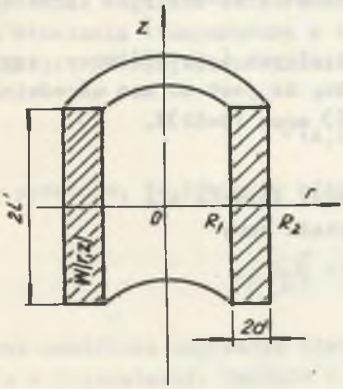
(3-66) stanowiących rozwinięcia w szereg lub całkę Fouriera prostokąta, rozwinąć odpowiednio okład prądowy na rys. 3.6b (np. [8,10]). Uzyskane w ten sposób wyrażenia wstawia się do odpowiednich warunków brzegowych. Tak więc dla wzbudników wielosekcyjnych, cały tok postępowania w p. 3, począwszy od równania różniczkowego potencjału wektorowego, a skończywczy na obliczeniu mocy w układzie będzie taki sam jak dla wzbudnika jednosekcyjnego. Różnica w odpowiednich wzorach końcowych będzie się wyrażała tylko w tym, że zamiast współczynników rozwinięcia w szereg lub całkę Fouriera prostokąta, będą w nich występowały współczynniki rozwinięcia okładu prądowego z rys. 3.6b.

4. ANALIZA MATEMATYCZNA POLA TEMPERATURY

4.1. Charakterystyka modelu i metody obliczeniowej

Zgodnie z p.p. 2.6, analizę matematyczną pola temperatury w rozważanych tu indukcyjnych układach grzejnych przeprowadzi się w oparciu o metodę analityczną zwaną metodą Fouriera [35,38] . Nagrzewaną rurę traktuje się wtedy jako ciągły zbiór źródeł cieplnych, których wydajność określa skalarna funkcja w. Funkcja ta, zgodnie z [4,35,38], jest równa gęstości mocy czynnej wydzielanej w rurze (vide wzory (3-36) i (3-60)).

Na rys. 4.1 przedstawiono model dla obliczeń pola temperatury w rurze, przy czym celowo nie zaznaczono ani wzbudnika ani obwodu magnetycznego, wchodzących w skład układu grzejnego. Wynika to z faktu, że z punktu widzenia obliczeń pola temperatury potrzebna jest tylko znajomość funkcji wydajności źródeł cieplnych "w", natomiast nie jest istotne w jakiej konfiguracji elektrotermicznej (nagrzewanie od zewnątrz czy od wewnątrz) nastąpiło przekazanie energii z wzbudnika do wsadu.



Rys. 4.1. Model dla obliczeń pola temperatury w rurze nagrzewanej indukcyjnie od wewnątrz lub od zewnątrz

2d - grubość ścianki rury, 2L' - długość rury, w(r,z) - funkcja wydajności źródeł cieplnych

Obliczenie rozkładu temperatury dla modelu na rys. 4.1, przy znanej wydajności źródeł cieplnych w(r,z), jest możliwe zarówno w oparciu o metody przybliżone jak i dokładne [35,36,38,40,46,58,74]. W praktyce hutniczej często stosuje się nagrzewanie elementów cylindrycznych o dużych pro-

mieniach. Do takich ograniczone zostaną rozważania w tej pracy[x]. Wtedy model obliczeniowy na rys. 4.1 może być jeszcze bardziej uproszczony - jak na rys. 4.2. Trzy przedstawione tam przypadki stanowią kolejne etapy uproszczeń dla analizy pola temperatury w rurach.

Punktem wyjścia do obliczeń pola temperatury w modelu obliczeniowym rury o dużym promieniu (rys. 4.2c) jest równanie różniczkowe pola temperaturowego, które wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi i początkowymi opisuje rozkład temperatury w nagrzewanym elemencie. Jeżeli równanie to wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi rozwiązywać się będzie metodami analitycznymi, a model obliczeniowy nie będzie w sposób zasadniczy różnił się od układu rzeczywistego, to metodę taką, analogicznie jak w p.p. 3.1, można nazwać metodą dokładną. Właśnie w takim rozumieniu, metodę dokładną (zwaną w literaturze metodą Fouriera), zastosuje się do obliczenia pola temperatury w modelu na rys. 4.2c.

4.2. Rozkład temperatury przy indukcyjnym nagrzewaniu rur o dużych promieniach

Równanie przewodnictwa cieplnego we współrzędnych prostokątnych dla modelu na rys. 4.2c przyjmuje postać (zgodnie z [4,35,38]):

$$c\rho \frac{\partial \vartheta'}{\partial t} = \lambda \left[\frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial z^2} \right] + w(x,z), \qquad (4-1)$$

gdzie:

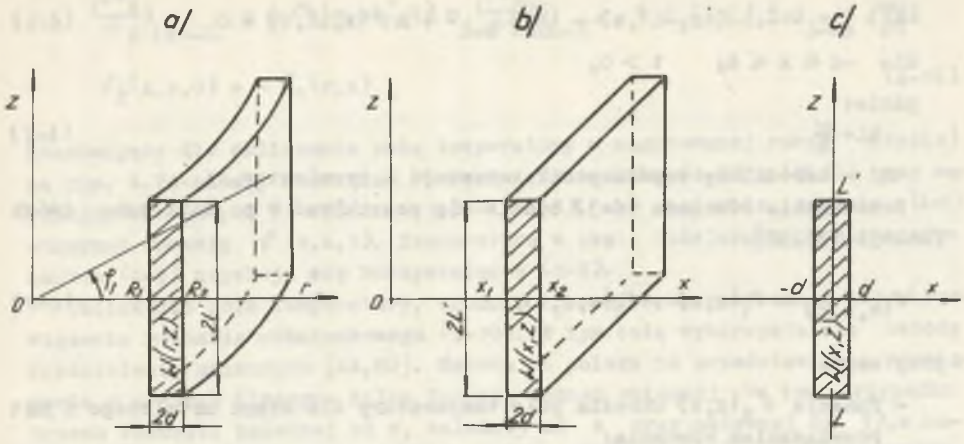
$\vartheta' = \vartheta'(x,z,t)$ - funkcja opisująca niestacjonarne źródłowe pole temperatury w nagrzewanej płycie,

$w(x,z)$ - funkcja wydajności źródeł cieplnych (gęstość mocy czynnej, przy czym zakłada się tu, że jest to moc uśredniona po czasie - vide wzory (3-36) oraz (3-60)).

λ - przewodność cieplna
c - ciepło właściwe
ρ - gęstość właściwa
t - czas

} wartości średnie dla materiału rury

[x] Możliwe jest także obliczenie pola temperatury przy nagrzewaniu rur o małych promieniach, jednak wtedy wzory końcowe będą zawierały dość złożone kombinacje f. Bessela. Dla uzyskania wyników liczbowych konieczne jest wtedy stosowanie maszyn cyfrowych. Z uwagi na to, że celem tej pracy jest otrzymanie wzorów przydatnych w praktyce inżynierskiej, uproszczono model obliczeniowy, co zezwala na wykonywanie obliczeń za pomocą arytmometru.



Rys. 4.2. Kolejne etapy uproszczeń modelu obliczeniowego rury o dużym promieniu:

a) wycinek rury o dużym promieniu ($R_1 \leqslant r \leqslant R_2$; $-L' \leqslant z \leqslant L'$; $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1$),

b) płyta zastępująca rurę o dużym promieniu ($x_1 \leqslant x \leqslant x_2$; $-L' \leqslant z \leqslant L'$; $-\infty \leqslant y \leqslant +\infty$);

c) ostateczny model obliczeniowy rury o dużym promieniu - płyta umieszczona w początku układu współrzędnych ($-d \leqslant x \leqslant d$; $-L' \leqslant z \leqslant L'$; $-\infty \leqslant y \leqslant +\infty$)

Równanie (4-1) uzupełniają warunki: początkowy i brzegowe, zwykle [35,38] określane względem temperatury otoczenia $\vartheta_0 = 0$. Jednak, jeśli temperatura otoczenia (temperatura w chwili $t = 0$) wynosi $\vartheta_0 \neq 0$, można zamiast funkcji $\vartheta(x,z,t)$ wprowadzić nową funkcję:

$$\vartheta(x,z,t) = \vartheta'(x,z,t) - \vartheta_0 \tag{4-2}$$

co powoduje, że równanie różniczkowe (4-1) przyjmuje postać:

$$c\rho \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right] + w(x,z) \tag{4-3}$$

oraz umożliwia zapisanie odpowiednich warunków w postaci przyjmowanej zwykle w literaturze. Zgodnie z [4,35,38,44] warunki: początkowy i brzegowe dla rozważanego zagadnienia można zapisać (vide rys. 4.2c):

- warunek początkowy:

$$\vartheta(x,z,0) = 0 \tag{4-4}$$

dla $-d \leqslant x \leqslant d$; $-L' \leqslant z \leqslant L'$,

- warunki brzegowe

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_{|x=-d} - h\vartheta(-d,z,t) = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{|x=d} + h\,\vartheta(d,z,t) = 0 \tag{4-5}$$

dla $-L' \leqslant z \leqslant L'$; $t \geqslant 0$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_{z=-L'} = h\vartheta(x,-L',t) = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_{z=L'} + h\vartheta(x,L',t) = 0 \qquad (4\text{-}6)$$

dla $-d \leqslant x \leqslant d$; $t > 0$,

gdzie:

$$h = \frac{\alpha}{\lambda} \qquad (4\text{-}7)$$

α - uśredniony współczynnik konwekcji i promieniowania.

Rozwiązania równania (4-3) będzie się poszukiwać w postaci sumy dwóch funkcji [35,38]:

$$\vartheta(x,z,t) = \vartheta_1(x,z) + \vartheta_2(x,z,t). \qquad (4\text{-}8)$$

przy czym:

- funkcja $\vartheta_1(x,z)$ określa pole temperatury dla stanu ustalonego i jest rozwiązaniem równania:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial z^2} = -\frac{w(x,z)}{\lambda}, \qquad (4\text{-}9)$$

- funkcja $\vartheta_2(x,z,t)$ określa pole temperatury dla stanu nieustalonego i spełnia równanie:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial z^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial \vartheta_2}{\partial t}, \qquad (4.10)$$

gdzie:

$$a = \frac{\lambda}{c\rho} \qquad (4\text{-}11)$$

- wymienione funkcje posiadają następujące własności:

$$\lim_{t\to\infty}\left[\vartheta(x,z,t)\right] = \vartheta_1(x,z) \qquad (a)$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[\vartheta_2(x,z,t)\right] = 0 \qquad (b) \qquad (4\text{-}12)$$

- oraz spełniają następujące warunki brzegowe, które uzyskuje się na podstawie znanych warunków (4-4) - (4-6) dla funkcji ϑ oraz przyjętych dla funkcji ϑ_1
- dla funkcji $\vartheta_1(x,z)$ przyjmuje się warunki [35,38],

$$\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial z}\right)_{|z=-d} - h\vartheta_1(-d,z) = \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x}\right)_{|x=d} + h\vartheta_1(d,z) = 0 \qquad (a) \qquad (4\text{-}13)$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial z}\right)_{|z=-L'} - h\vartheta_1(x,-L') = \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial z}\right)_{|z=L'} + h\vartheta_1(x,L') = 0 \qquad (b)$$

- dla funkcji $\vartheta_2(x,z,t)$, zgodnie z (4-4) - (4-6) oraz (4-8) otrzymuje się:

$$\left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial z}\right)_{|x=-d} - h\vartheta_2(-d,z,t) = \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial z}\right)_{|x=d} + h\vartheta_2(d,z,t) = 0 \qquad (a) \qquad (4\text{-}14)$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial z}\right)_{z=-L'} - h\,\vartheta_2(x,-L',t) = \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial z}\right)_{z=L'} + h\,\vartheta_2(x,L',t) = 0 \qquad (b)$$

$$\vartheta_2(x,z,0) = -\vartheta_1(x,z) \qquad (4\text{-}15)$$

Reasumując: dla obliczenia pola temperatury w nagrzewanej rurze (płycie) na rys. 4.2c należy rozwiązać równania różniczkowe (4-9) i (4-10) przy warunkach brzegowych (4-13) i (4-14) - (4-15), aby następnie, zgodnie z (4-8) otrzymać funkcję $\vartheta(x,z,t)$. Temperaturę w skali Celsjusza określoną równaniem (4-1) uzyskuje się korzystając z (4-2).

Obliczenie pola temperatury, zgodnie z powyższym, rozpocznie się od rozwiązania równania różniczkowego (4-10). W tym celu wykorzysta się metodę rozdzielenia zmiennych [44,80]. Metoda ta polega na przedstawieniu rozwiązania w postaci iloczynu kilku funkcji jednej zmiennej (w tym przypadku trzech funkcji: zależnej od x, zależnej od z oraz zależnej od t), a następnie, po wprowadzeniu takiego rozwiązania do równania różniczkowego, otrzymania sumy składników, z których każdy zależny jest tylko od jednej zmiennej.

W przypadku równania (4-10) rozwiązania szczególnego poszukuje się w postaci iloczynu

$$\vartheta^{o}_{2}(x,z,t) = X(x)\,Z(z)\,T(t). \qquad (4\text{-}16)$$

Wprowadzając (4-16) do (4-10), otrzymuje się:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} - \frac{1}{a}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = 0. \qquad (4\text{-}17)$$

Z uwagi na to, że każdy składnik równania (4-17) zależy tylko od jednej zmiennej niezależnej, to można przyrównać je do pewnych stałych:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\xi^2 \qquad (a)$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -\varkappa^2, \qquad (b) \qquad (4\text{-}18)$$

$$\frac{1}{a}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = -\eta, \qquad (c)$$

a stąd:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \xi^2 X = 0, \qquad (a)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \varkappa^2 Z = 0, \qquad (b) \qquad (4\text{-}19)$$

$$\frac{dT}{dt} + \eta\, a\, T = 0. \qquad (c)$$

Zgodnie z (4-17) i (4-18) zachodzi:

$$\xi^2 + \varkappa^2 = \eta . \tag{4-20}$$

W związku z powyższym rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych (4-19) dają funkcję ϑ_2° = XZT spełniającą równanie różniczkowe (4-10). Wartości parametrów ξ, $\varkappa$ należy dobrać tak, aby funkcje X, Z spełniały warunki brzegowe. Otrzymuje się wówczas ciągi liczbowe ξ_n oraz $\varkappa_k$ nazywane wartościami własnymi danego rozwiązania. Dla uwzględnienia warunku początkowego tworzy się szereg podwójny postaci

$$\vartheta_2(x,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} X_n Z_k T_{nk}. \tag{4-21}$$

Funkcja (4-21) spełnia zarówno równanie (4-10) jak i warunki: początkowy i brzegowe, jest więc poszukiwanym rozwiązaniem ogólnym. Występujące tu ciągi funkcji własnych X_n, Z_k, T_{nk} są rozwiązaniami równań (4-19), czyli:

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos \xi x + B \sin \xi x && \text{(a)} \\ Z(z) &= C \cos \varkappa z + D \sin \varkappa z && \text{(b)} \\ T(t) &= E \exp\left[-(\xi^2 + \varkappa^2)\, a\, t\right] && \text{(c)} \end{aligned} \tag{4-22}$$

tak więc (4-21) przyjmuje postać:

$$\vartheta_2(x,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (A_n \cos\xi_n x + B_n \sin\xi_n x) \cdot (\cos \varkappa_k z + C_k \sin \varkappa_k z) \cdot \exp\left[-(\xi_n^2 + \varkappa_k^2)\, at\right]. \tag{4-23}$$

Ze względu na symetrię zagadnienia względem osi x oraz osi z (vide warunki brzegowe (4-14)) rozwiązanie (4-23) nie może zawierać funkcji nieparzystych $\sin \xi_n x$ oraz $\sin \varkappa_k z$. Z uwagi na to upraszcza się ono do postaci:

$$\vartheta_2(x,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \cos\xi_n x \cos \varkappa_k z \exp\left[-(\xi_n^2 + \varkappa_k^2)\, at\right] \tag{4-24}$$

i jest to ostateczna postać funkcji ϑ_2 dla rozważanego zagadnienia. W wyrażeniu (4-24) występują trzy niewiadome. Są to: dwa ciągi wartości własnych ξ_n i $\varkappa_k$ oraz ciąg stałych całkowania A_{nk}. Dla ich wyznaczenia jest aż pięć równań (warunki (4-14) - (4-15)), przy czym dwa równania (4-14a) oraz dwa równania (4-14b) są tożsame. Tak więc dla obliczenia trzech niewiadomych ciągów pozostaną trzy równania (4-14) - (4-15), które pozwalają na jednoznaczne rozwiązania zagadnienia. Zgodnie z równaniami (4-14a,b) otrzymuje się:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}\,(h\cos\xi_n d - \xi_n \sin\xi_n d)\cos\varkappa_k z \exp\left[-(\xi_n^2+\varkappa_k^2)\,at\right] = 0 \quad (a)$$

$$(4\text{-}25)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(h\cos\varkappa_k L' - \varkappa_k \sin\varkappa_k L')\cos\xi_n x \exp\left[-(\xi_n^2+\varkappa_k^2)\,at\right] = 0 \quad (b)$$

Równania powyższe będą spełnione, jeśli

$$h.\cos\xi_n d - \xi_n \sin\xi_n d = 0, \quad (a) \qquad (4\text{-}26)$$

$$h\cos\varkappa_k L' - \varkappa_k \sin\varkappa_k L' = 0, \quad (b)$$

skąd otrzymuje się:

$$\xi_n = \frac{\mu_n}{d}, \quad (a)$$

$$(4\text{-}27)$$

$$\varkappa_k = \frac{\gamma_k}{L'}.$$

Występujące w związkach (4-27) współczynniki μ_n oraz γ_k są, zgodnie z (4-26), kolejnymi dodatnimi pierwiastkami równań:

$$\mu\,\mathrm{tg}\,\mu = hd \quad (a)$$

$$(4\text{-}28)$$

$$\gamma\,\mathrm{tg}\,\gamma = h\,L' \quad (b)$$

Tak więc, rozwiązanie (4-24) można zapisać w postaci

$$v_2(x,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}\cos\mu_n\frac{x}{d}\cos\gamma_k\frac{z}{L'}\exp\left[-\left(\frac{\mu_n^2}{d^2}+\frac{\gamma_k^2}{L'^2}\right)at\right], \quad (4\text{-}29)$$

przy czym spełnia ono oczywiście warunek (4-12b). Ciąg niewiadomych stałych całkowania A_{nk} wyznaczy się na podstawie warunku początkowego (4-15) po obliczeniu funkcji $v_1(x,z)$.

Funkcję $v_1(x,z)$ spełniającą równanie różniczkowe (4-9) można obliczyć korzystając z wyznaczonych już wcześniej dwóch ciągów funkcji własnych X_n oraz Z_k.

Tak więc:

$$v_1(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} B_{nk}\cos\xi_n x\cos\varkappa_k z. \quad (4\text{-}30)$$

Wprowadzając (4-30) do warunków brzegowych (4-13a,b) uzyskuje się następujące równania:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} B_{nk}\,(h\cos\xi_n d - \xi_n\sin\xi_n d)\cos\varkappa_k z = 0 \quad (a) \qquad (4\text{-}31)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} B_{nk}\left(h\cos\varkappa_k L' - \varkappa_k \sin\varkappa_k L'\right)\cos\zeta_n x = 0, \quad (b) \qquad (4\text{-}31)$$

które będą spełnione, jeśli:

$$h\cos\zeta_n d - \zeta_n \sin\zeta_n d = 0 \quad (a)$$

$$h\cos\varkappa_k L' - \varkappa_k \sin\varkappa_k L' = 0 \quad (b) \qquad (4\text{-}32)$$

czyli:

$$\zeta_n = \frac{\mu_n}{d} \quad (a)$$

$$\varkappa_k = \frac{\gamma_k}{L'}, \quad (b) \qquad (4\text{-}33)$$

przy czym μ_n i γ_k są kolejnymi dodatnimi pierwiastkami równań (4-28). Wzór (4-30) przybiera więc postać:

$$v_1(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} B_{nk}\cos\mu_n\frac{x}{d}\cos\gamma_k\frac{z}{L'}. \qquad (4\text{-}34)$$

Ciąg stałych całkowania należy dobrać w ten sposób, aby funkcja (4-34) spełniała równanie różniczkowe (4-9). W tym celu należy obliczyć:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} B_{nk}\frac{\mu_k^2}{d^2}\cos\mu_n\frac{x}{d}\cos\gamma_k\frac{z}{L'}, \quad (a)$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} B_{nk}\frac{\gamma_k^2}{L'^2}\cos\mu_n\frac{x}{d}\cos\gamma_k\frac{z}{L'}. \quad (b) \qquad (4\text{-}35)$$

Wprowadzając (4-35) do równania (4-9), uzyskuje się:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} B_{nk}\left[\frac{\mu_n^2}{d^2} + \frac{\gamma_k^2}{L'^2}\right]\cos\mu_n\frac{x}{d}\cos\gamma_k\frac{z}{L'} = \frac{w(x,z)}{\lambda}. \qquad (4\text{-}36)$$

Zgodnie z [8,38], daną funkcję $f(x,z)$ określoną i całkowalną wraz z kwadratem w prostokącie $\{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant z \leqslant d\}$, względem układów ortogonalnych $X_n(x)$ oraz $Z_k(z)$, można rozwinąć na podwójny uogólniony szereg Fouriera postaci

$$f(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} F_{nk} X_n(x) Z_k(z), \qquad (4\text{-}37)$$

gdzie:

$$F_{nk} = \frac{\int_0^d \int_a^b f(x,z)\, X_n(x)\, Z_k(z)\, dx\, dz}{\int_c^d \int_a^b \left[X_n(x)\right]^2 \left[Z_k(z)\right]^2 dx\, dz}. \tag{4-38}$$

Tak więc wzór (4-36) można traktować jako rozwinięcie funkcji $\frac{w(x,z)}{\lambda}$ na podwójny uogólniony szereg Fouriera (analogia z wzorem (4-37)) względem ciągów ortogonalnych funkcji $\cos \mu_n \frac{x}{d}$ oraz $\cos \gamma_k \frac{z}{L'}$. Aby spełnione były wszystkie założenia należy określić prostokąt, w którym funkcja $\frac{w(x,z)}{\lambda}$ jest określona oraz nałożyć na nią warunek całkowalności wraz z kwadratem. Na podstawie rys. 4.2c można stwierdzić, że $w(x,z)$ określona jest dla $-d \leqslant x \leqslant d$ oraz dla $-l' \leqslant z \leqslant l'$, przy czym $(2L' (\leqslant) 2L')$ gdyż w ogólności gęstość mocy czynnej nie musi być różna od zera wzdłuż całej długości rury. Założenie to zapewnia większą ogólność prowadzonym rozważaniom. Skoro zostały spełnione wszystkie założenia dla uogólnionego szeregu Fouriera można, zgodnie z (4-38), napisać:

$$B_{nk}\left[\frac{\mu_n^2}{d^2} + \frac{\gamma_k^2}{L'^2}\right] = \frac{\frac{1}{\lambda}\int_0^l \int_0^d w(x,z) \cos \mu_n \frac{x}{d} \cos \gamma_k \frac{z}{L'}\, dx dz}{\int_0^l \int_0^d \cos^2 \mu_n \frac{x}{d} \cos^2 \gamma_k \frac{z}{L'}\, dx\, dz} \tag{4-39}$$

skąd:

$$B_{nk} = \frac{4}{\lambda} \frac{\int_0^l \int_0^d w(x,z) \cos \mu_n \frac{x}{d} \cos \gamma_k \frac{z}{L'}\, dx\, dz}{l' d \left[\frac{\mu_n^2}{d^2} + \frac{\gamma_k^2}{L'^2}\right]\left[1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n}\right]\left[1 + \frac{\sin 2\gamma_k \frac{l'}{L'}}{2\gamma_k \frac{l'}{L'}}\right]} \tag{4-40}$$

Wzór (4-34) razem z (4-40) określają w pełni funkcję $\vartheta_1(x,z)$.

Zgodnie z tym, co powiedziano wcześniej, ciąg stałych całkowania A_{nk} we wzorze (4-29) obliczyć się na podstawie warunku początkowego (4-15). Korzystając z (4-34) warunek ten przyjmuje postać:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (A_{nk} + B_{nk}) \cos \mu_n \frac{x}{d} \cos \gamma_k \frac{z}{L'} = 0, \tag{4-41}$$

którego rozwiązaniem jest:

$$A_{nk} = -B_{nk} \tag{4-42}$$

(ciąg stałych B_{nk} określony jest wzorem (4-40)).

Wzory (4-34) oraz (4-29) pozwalają na obliczenie, zgodnie z (4-8), funkcji $\vartheta(x,z,t)$:

$$\vartheta(x,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} B_{nk}\cos\mu_n\frac{x}{d}\cos\gamma_k\frac{z}{L'}\left[1-\exp\left[-\left(\frac{\mu_n^2}{d^2}+\frac{\gamma_k^2}{L'^2}\right)at\right]\right] \quad (4\text{-}43)$$

Pole temperatury w nagrzewanej płycie (rys. 4.2c) określa wzór (4-2), który po wprowadzeniu (4-43) przyjmuje postać

$$\vartheta(x,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} B_{nk}\cos\mu_n\frac{x}{d}\cos\gamma_k\frac{z}{L'}\left[1-\exp\left[-\left(\frac{\mu_{nn}^2}{d^2}+\frac{\gamma_k^2}{L'^2}\right)at\right]\right]+\vartheta_o, \quad (4\text{-}44)$$

przy czym B_{nk} określony jest wzorem (4-40).

4.3. Pole temperatury przy stałym rozkładzie mocy

Wyprowadzone w poprzednim podpunkcie wzory określają niestacjonarne, źródłowe pole temperatury w nagrzewanej rurze, przy czym funkcja wydajności źródeł cieplnych $w(x,z)$ jest zmienna w przestrzeni. Przy założeniu stałego rozkładu gęstości mocy czynnej wydzielanej we wsadzie, wzory te można uprościć do postaci znanej z literatury, np. [35,38]. W tym celu należy w wyrażeniu (4-40) przyjąć:

$$w(x,z) = w_o = \text{const}, \quad (4\text{-}45)$$

wtedy:

$$B_{nk}=\frac{4}{\lambda}\,\frac{w_o\cdot L'\sin\mu_n\,\sin\gamma_k\frac{l'}{L'}}{l'\mu_n\gamma_k\left[\frac{\mu_n^2}{d^2}+\frac{\gamma_k^2}{L'^2}\right]\left[1+\frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n}\right]\left[1+\frac{\sin 2\gamma_k\frac{l'}{L'}}{2\gamma_k\frac{l'}{L'}}\right]} \quad (4\text{-}46)$$

co łącznie z wzorem (4-44) określa pole temperatury przy nagrzewaniu ze stałym rozkładem mocy.

Wzór (4-46) jest identyczny ze wzorami znanymi z literatury [35,38], przy czym w pozycjach tych autorzy przyjmują jeszcze dla uproszczenia $l' = L'$, co odpowiada równomiernemu wydzielaniu mocy w całym nagrzewanym elemencie.

4.4. Wzbudniki wielosekcyjne

Pole temperatury uzyskiwane przy nagrzewaniu wsadu wzbudnikami wielosekcyjnymi (vide p.1 i pp. 3,4) oblicza się analogicznie jak przedstawiono w p.4. Wynika to z faktu, że dla tych obliczeń potrzebna jest tylko

znajomość parametrów materiałowych wsadu oraz funkcji wydajności źródeł cieplnych w(x,z). Funkcję tę z kolei oblicza się na podstawie analizy pola elektromagnetycznego w układzie, metodami przedstawionymi w p.3. Tak więc, aby otrzymać wzory na pole temperatury w układzie ze wzbudnikiem wielosekcyjnym, wystarczy do wzorów (4-40) i (4-44) wstawić gęstość mocy czynnej, obliczoną zgodnie z p.p. 3.4.

5. PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA

5.1. Dobór przykładów

W podpunkcie tym rozważone zostanie zastosowanie otrzymanych wzorów dla pola elektromagnetycznego i temperaturowego przy indukcyjnym nagrzewaniu rur od wewnątrz i od zewnątrz. Dokładniej omówi się zagadnienie nagrzewania wewnętrznego, a to z dwóch powodów:

- problem ten jest w literaturze słabiej rozpracowany i istnieje zaledwie kilka pozycji [6,13,19,82] dających pewne fragmentaryczne wyniki,
- ze względu na zbudowany wg patentu autora prototyp doświadczalny indukcyjnej nagrzewnicy wewnętrznej, powstała możliwość praktycznego zastosowania teorii do pomiarowo zbadanego urządzenia.

Obliczenia w przypadku nagrzewania wewnętrznego będą prowadzone w oparciu o obydwie stosowane w pracy metody (szeregu i całki Fouriera), natomiast dla nagrzewania zewnętrznego tylko w oparciu o metodę szeregu Fouriera.

Wyniki obliczeniowe zostaną porównane z pomiarowymi lub wynikami otrzymanymi za pomocą metod dla układów nieskończenie długich.

5.2. Nagrzewanie od wewnątrz

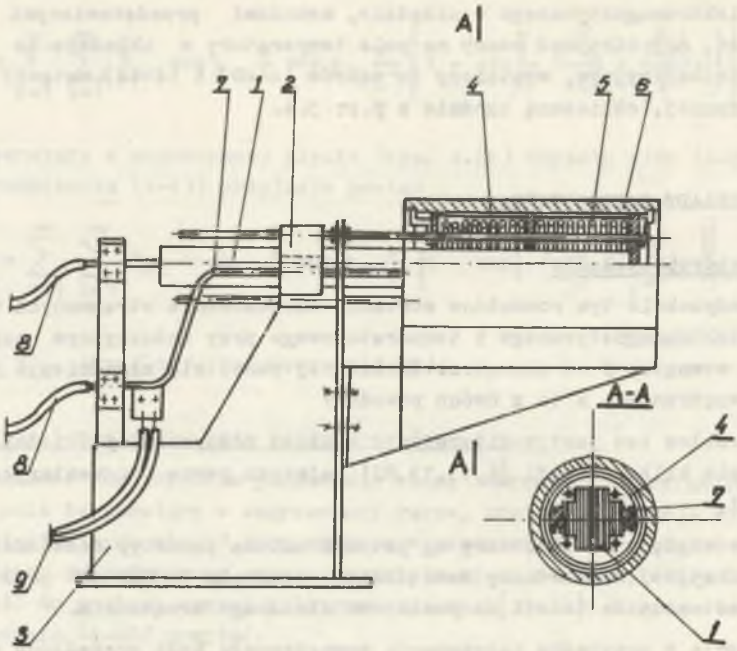
5.2.1. Budowa nagrzewnicy prototypowej

Nagrzewnicę prototypową (model doświadczalny) zbudowaną wg patentu i pod nadzorem autora przedstawiono na rys. 5.1a.

Stopniowany rdzeń magnetyczny, złożony z blach transformatorowych (1) umocowany jest w dzielonym jarzmie (2). Dolna część jarzma przyspawana jest do stojaka (3). Na rdzeniu zamocowane są dwa uzwojenia (4) i (5) osłonięte tuleją szamotową (6). Końce uzwojeń (7) wyprowadzone są wzdłuż rdzenia magnetycznego i posiadają chorągiewki dla podłączenia kalbli (9) oraz końcówki dla zamocowania węży z wodą chłodzącą (8).

Nagrzewnica przeznaczona jest do nagrzewania przed obróbką plastyczną (kalibrowaniem, spęczaniem, kielichowaniem) końców rur stalowych bez szwu walcowanych metodą Mannesmanna o średnicach od 406 mm wzwyż. Z uwagi na to, że nagrzewnica jest nieruchoma zachodzi konieczność poosiowego przesuwa-

nia rury. Rozwiązano to przez umieszczenie rury na kozłach jeżdżących po szynach.



Rys.5.1a. Przekroje nagrzewnicy laboratoryjnej do końców rur

1 - rdzeń magnetyczny, 2 - jarzmo, 3 - stojak, 4,5 - uzwojenia, 6 - osłona ceramiczna, 7 - wyprowadzenia uzwojeń, 8 - końcówki wodne, 9 - chorągiewki dla podłączenia kabli

5.2.2. Parametry modelu obliczeniowego

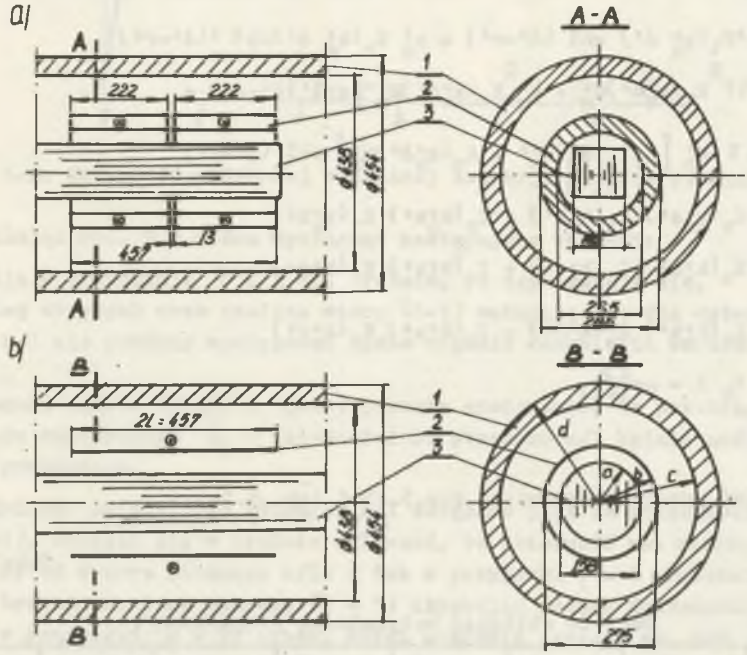
Celem wykonania obliczeń, nagrzewnicę przedstawioną na rys. 5.1a należy, zgodnie z p.3, zastąpić modelem obliczeniowym. Szkice wymiarowe nagrzewnicy i modelu obliczeniowego przedstawiono na rys. 5.1b, natomiast parametry materiałowe wsadu i zasilania w tab.5.1. Jako wsad wykorzystano rurę aluminiową, tzn. metal o praktycznie stałej przenikalności magnetycznej. Średnicę uzwojenia modelu dobrano pomniejszając średnię zewnętrzną uzwojenia nagrzewnicy o 11 mm, tzn. o głębokość wnikania prądu w miedź. Średnicę rdzenia magnetycznego modelu dobrano tak, aby powierzchnia jego przekroju poprzecznego była równa powierzchni przekroju poprzecznego rdzenia nagrzewnicy. Z uwagi na to, że dwa uzwojenia prototypu o długościach 0,222 m odzielone były tylko niewielką (13 mm) przekładką, w modelu przyjęto jedno uzwojenie o długości 0,457 m.

Tabela 5.1

Parametry materiałowe wsadu i zasilania

I [A]	N	$\omega = 2\pi f$	$\mu = \mu_0$ $\left[\frac{H}{m}\right]$	$\sigma\ (\Omega\ m)^{-1}$
$4{,}4 \cdot 10^3$	24	314	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$30{,}5 \quad 10^6$

Na podstawie powyższych danych można stwierdzić, że spełnione są założenia konieczne dla uproszczenia wzorów ogólnych z p.p.3.2. Tak więc w obliczeniach korzystać się będzie ze wzorów uproszczonych z p.p.3.2.1.5. Obliczenia zostaną wykonane dla chwili czasu t = 0.



Rys. 5.1b. Szkice wymiarowe prototypu nagrzewnicy (a) i modelu obliczeniowego (b). Oznaczenia zgodne z p.3.

1 - wsad, 2 - uzwojenie, 3 - rdzeń magnetyczny

5.2.3. Obliczenia

5.2.3.1. Dobór stosunku h/l

Zgodnie z p.p. 3.1.1, konkretne obliczenia, za pomocą metody szeregu Fouriera, dla układu na rys. 3.2 należy poprzedzić określeniem optymalnego dla danego układu stosunku h/l, czyli określeniem optymalnej odległo-

ści hipotetycznych wzbudników od siebie. Zagadnienie to rozważano badając wpływ różnych wartości h/l na wielkość indukcji $\bar{B}_{2z}$ w układzie. W związku z tym posłużono się wzorem (3-41), który przedstawiono w postaci bezwymiarowej ułatwiającej obliczenia i interpretację wyników. Jako wymiar charakterystyczny układu wybrano długość wzbudnika l co, na podstawie (3-41), daje:

$$\bar{B}_{2z}(r',z',t,x) = \frac{2I\mu_0 n'\tau' b'}{\pi\sqrt{c'r'}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \times$$

$$\times\ M_{1n}\ \frac{X}{Y}\ \cos k_n' x\ \cos k_n' z,\ e^{j\omega t}, \qquad (5\text{-}1)$$

gdzie:

$$X = \tau' K_1(k_n' d')\,\mathrm{sh}\tau'(d'-r') + k_n' K_0(k_n' d')\,\mathrm{ch}\tau'(d'-r')$$

$$Y = \left[(\tau'^2 K_1/k_n' d')M_n' + k_n'^2 K_0(k_n' d')M_n''\right]\mathrm{sh}\tau'(d'-c') +$$

$$+\tau' k_n' \left[K_1(k_n' d')M_n'' + K_0(k_n' d')M_n'\right]\mathrm{ch}\tau'(d'-c')$$

$$M_{1n} = K_0(k_n' a')\,I_1(k_n' b') + I_0(k_n' a')\,K_1(k_n' b')$$

$$M_n' = K_0(k_n' a')\,I_1(k_n' c') + I_0(k_n' a')\,K_1(k_n' c')$$

$$M_n'' = K_0(k_n' a')\,I_0(k_n' c') - I_0(k_n' a')\,K_0(k_n' c')$$

$$k_n' = k_n\, l = \frac{n\pi}{2(1+x)}$$

$$\tau' = \tau l$$

Do obliczeń przyjęto zgodnie z rys.5.1b i tab. 5.1.

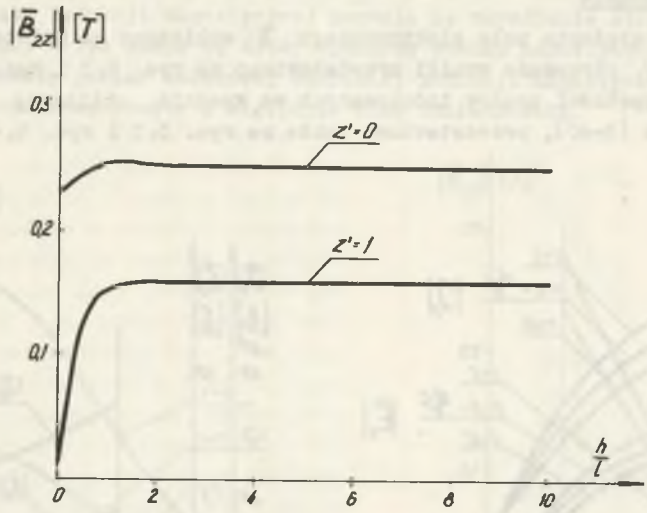
Tabela 5.2

Dane do obliczeń optymalnego stosunku h/l

$a' = \frac{a}{l}$	$b' = \frac{b}{l}$	$c' = \frac{c}{l}$	$d' = \frac{d}{l}$	$n' = \frac{N}{l}$	$r' = \frac{r}{l}$	$z' = \frac{z}{l}$	$x = \frac{h}{l}$
0,3475	0,604	0,9584	0,9934	105,033	0,9584	0 1	0 1 3 5 10

Obliczenia prowadzono z dokładnością do 2% tzw. przerywano je w momencie, gdy wartość modułu kolejnego wyrazu szeregu (5-1) stanowiła mniej niż 2% wyrazu pierwszego[x]. Otrzymane, na podstawie wzoru (5-1) oraz tab.5.2, wyniki przedstawiono na rys.5.2.

[x] W dalszym ciągu pracy będzie się używało pojęcie "dokładność obliczeń" w tym właśnie sensie.



Rys. 5.2. Zależność składowej wzdłużnej indukcji $|\bar{B}_{2z}|$ od stosunku h/l

Analizując rys. 5.2 można wyciągnąć następujące wnioski:

- indukcja w przedziale $0 \leqslant x \leqslant 1$ rośnie, po czym ustala się,
- przebieg krzywych oraz analiza wzoru (5-1) wskazują, że dla wyższych wartości h/l nie powinny występować żadne większe odchylenia wartości indukcji,
- porównanie wzorów (3-40) i (3-41) pozwala stwierdzić, że przebieg potencjału wektorowego $\bar{A}_2$ w zależności od stosunku h/l będzie analogiczny do powyższego.

Zagadnienie optymalnego stosunku h/l związane jest ze zbieżnością szeregu (5-1). Okazało się w trakcie obliczeń, że zbieżność ww. szeregu silnie zależy od wyboru stosunku h/l: i tak w przypadku $\frac{h}{l} = 1$ obliczenia przerwano na trzecim wyrazie szeregu (n = 5) uzyskując żądaną dokładność, natomiast w przypadku $\frac{h}{l} = 10$ trzeci wyraz stanowił jeszcze ok. 80% wyrazu pierwszego. W związku z tym, dobierając dla danego układu stosunek h/l nie wystarczy określić takiej wielkości, dla której indukcja (czy też potencjał) jest stała (vide rys. 5.2), ale należy jeszcze znaleźć minimalną z takich wielkości. Tak więc, dopiero dobór, w powyższym sensie, optymalnego stosunku h/l umożliwia praktyczne stosowanie otrzymanych w pracy wzorów, gdyż zapewnia szybką zbieżność odpowiednich szeregów.
Poszukiwanym, optymalnym stosunkiem h/l dla rozważanego układu jest

$$x = \frac{h}{l} = 1 \div 1,5 \qquad (5\text{-}2)$$

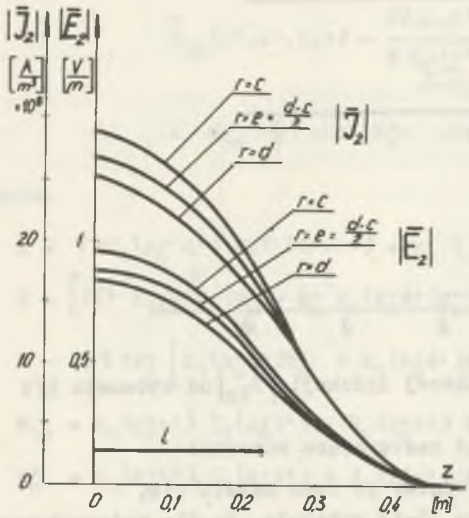
czyli zgodnie z rys. 5.1b, do dalszych obliczeń przyjmuje się

$$h = l = 0,2285 \text{ m}.$$

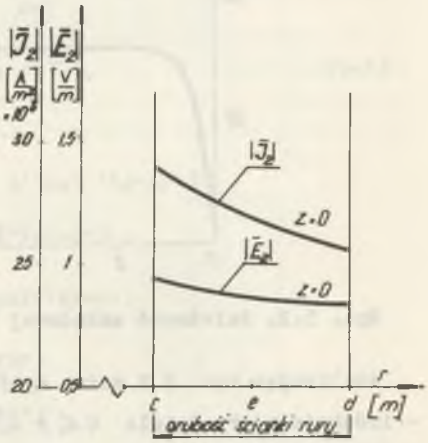
5.2.3.2. Natężenie pola elektrycznego i gęstość prądów indukowanych we wsadzie

Wektor natężenia pola elektrycznego $\bar{E}$ obliczono na podstawie (3-3b) oraz (3-40). Otrzymane wyniki przedstawiono na rys. 5.3 i rys. 5.4.

Wektor gęstości prądów indukowanych we wsadzie obliczony zgodnie z (3-3c) oraz (3-40), przedstawiono także na rys. 5.3 i rys. 5.4.



Rys. 5.3. Natężenie pola elektrycznego i gęstość prądów indukowanych wzdłuż długości wzbudnika dla trzech promieni: r=c - powierzchnia wewnętrzna rury, r=e - środek grubości ścianki rury, r=d - powierzchnia zewnętrzna rury. Dokładność obliczeń 2%



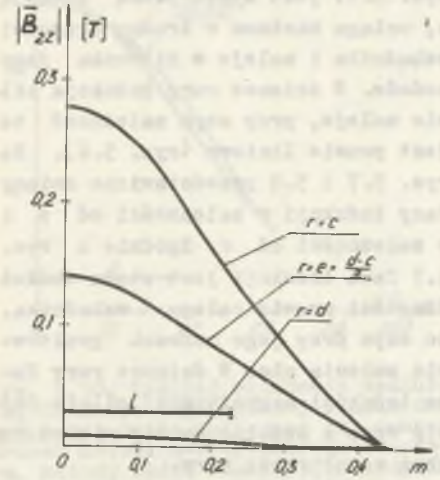
Rys. 5.4. Rozkład wektora natężenia pola elektrycznego oraz wektora gęstości prądu w ściance rury nagrzewanej indukcyjnie od wewnątrz. Dokładność obliczeń 2%

Na podstawie rys. 5.3 można stwierdzić, że wektory $\bar{E}$ oraz $\bar{J}$ są funkcjami symetrycznymi względem z. Osiągają one maximum w środku długości wzbudnika i maleją w kierunku jego końców. Oprócz tego, (porównując kolejne trzy krzywe dla $\bar{E}$ i $\bar{J}$) widoczne jest malenie wartości tych funkcji przy przesuwaniu się w głąb ścianki rury. Niewielkie różnice między $\bar{E}$ i $\bar{J}$ na wewnętrznej oraz zewnętrznej powierzchni rury wynikają z faktu, że grubość ścianki rury jest mniejsza od głębokości wnikania prądu dla tej częstotliwości (stanowi ona ok. 0,6 głębokości wnikania). Zmiany wartości wektorów E i J w ściance rury przedstawiono na rys. 5.4.

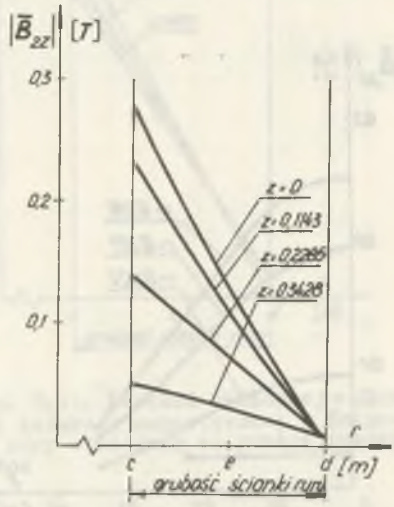
5.2.3.3. Indukcja magnetyczna

Obliczenia składowej wzdłużnej indukcji magnetycznej $\bar{B}_{2z}$ zostały potraktowane w niniejszej pracy szerzej, niż obliczenia pozostałych wielkości elektromagnetycznych. Wynika to z faktu, że znajomość $\bar{B}_{2z}$ ma zasadnicze znaczenie dla analizy procesu nagrzewania w układzie, gdyż od niej

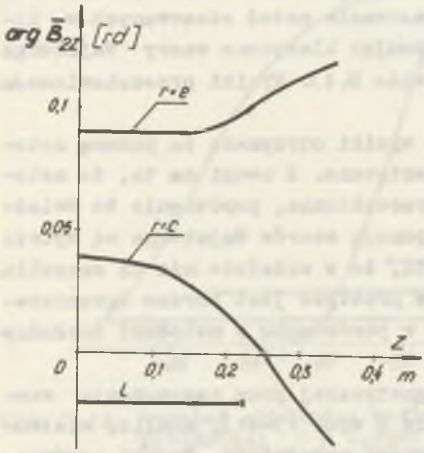
zależy wartość składowej promieniowej wektora Poyntinga, która odpowiedzialna jest za wartość mocy oraz cos φ. Oprócz tego znajomość składowej wzdłużnej indukcji magnetycznej pozwala na określenie strumienia magnetycznego, a tym samym na dobór wymiarów obwodu magnetycznego, a wreszcie porównawczy pomiar składowej wzdłużnej indukcji magnetycznej można wykonać stosunkowo prosto z względnie dużą dokładnością.



Rys. 5.5. Rozkład składowej wzdłużnej indukcji magnetycznej wzdłuż długości wzbudnika. Dokładność obliczeń 2%

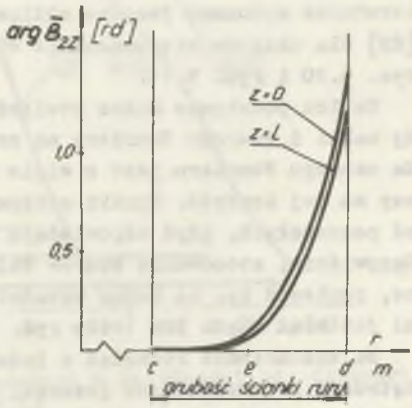


Rys. 5.6. Rozkład składowej wzdłużnej indukcji magnetycznej w ściance rury. Dokładność obliczeń 2%



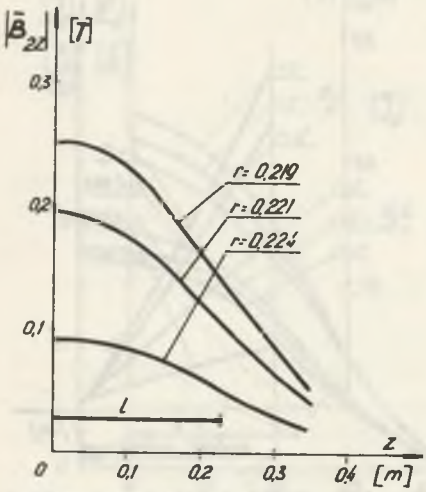
Rys. 5.7. Zmiana fazy składowej wzdłużnej indukcji magnetycznej wzdłuż długości wzbudnika

$$\arg \bar{B}_{2z} = \operatorname{arctg} \frac{\mathrm{Im}B_{2z}}{\mathrm{Re}B_{2z}}$$



Rys. 5.8. Zmiana fazy składowej wzdłużnej indukcji magnetycznej w ściance rury

Składową wzdłużną indukcji magnetycznej obliczono najpierw metodą szeregu Fouriera (wg wzoru (3-41)), a następnie metodą całki Fouriera (wg wzoru (3-81b)). Wyniki obliczeń uzyskanych za pomocą metody szeregu Fouriera przedstawiono na rys. 5.5-5.8, natomiast przy użyciu całki Fouriera na rys. 5.9.



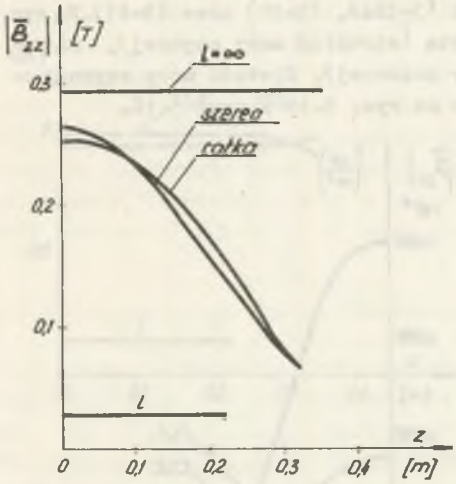
Rys. 5.9. Rozkład składowej wzdłużnej indukcji magnetycznej wzdłuż długości wzbudnika dla trzech głębokości w ściance rury. Dokładność obliczeń 0,02%.

Indukcja magnetyczna (rys. 5.6 i rys. 5.9) jest symetryczną funkcją z, osiąga maximum w środku długości wzbudnika i maleje w kierunku jego końców. W ściance rury indukcja silnie maleje, przy czym zależność ta jest prawie liniowa (rys. 5.6). Na rys. 5.7 i 5.8 przedstawiono zmiany fazy indukcji w zależności od z i w zależności od r. Zgodnie z rys. 5.7 faza indukcji jest stała wzdłuż długości prawie całego wzbudnika, po czym przy jego końcach gwałtownie zmienia się. W ściance rury faza indukcji magnetycznej silnie rośnie wraz z oddalaniem się od powierzchni wewnętrznej rury.

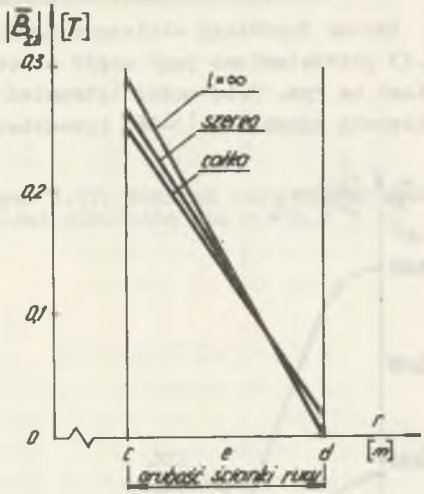
Z uwagi na to, że indukcja magnetyczna została obliczona za pomocą metod całki i szeregu Fouriera, występuje możliwość porównania wyników obydwu metod. Dla pełnego zobrazowania metod stosowanych w literaturze wykonano jeszcze obliczenia stosując klasyczne wzory Wajnberga [82] dla układów nieskończenie długich (vide D.4). Wyniki przedstawiono na rys. 5.10 i rys. 5.11.

Na ich podstawie można stwierdzić, że wyniki otrzymane za pomocą metody całki i szeregu Fouriera są prawie identyczne. Z uwagi na to, że metoda szeregu Fouriera jest o wiele mniej pracochłonna, porównanie to świadczy na jej korzyść. Wyniki otrzymane za pomocą wzorów Wajnberga są wyższe od pozostałych, gdyż odpowiadają założeniu, że w układzie nie ma szczelin. Oczywiście, stosowanie wzorów Wajnberga w praktyce jest bardzo ograniczone, ponieważ np. na końcu wzbudnika dają w porównaniu z metodami dokładnymi już błąd rzędu 50% (vide rys. 5.10).

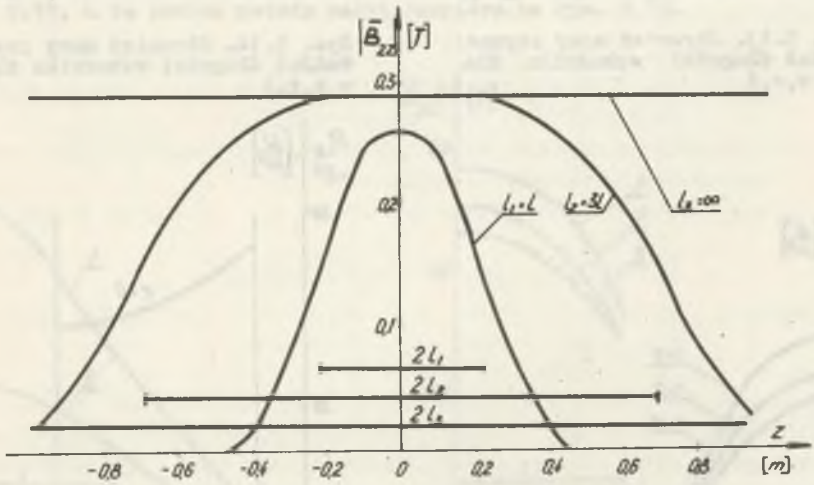
Na zakończenie rozważań o indukcji magnetycznej przy nagrzewaniu wewnętrznym przeprowadzono jeszcze, w oparciu o wzór (3-41), analizę wielkości i rozkładów indukcji dla różnych długości wzbudników. Wyniki porównane z wzorami Wajnberga przedstawiono na rys. 5.12. Można na ich podstawie stwierdzić, że indukcja rośnie wraz ze zwiększaniem długości wzbudnika, przy czym maksymalną wartość w danym układzie osiąga dla wzbudnika nie-



Rys. 5.10. Rozkład składowej wzdłużnej indukcji magnetycznej wzdłuż długości wzbudnika obliczony za pomocą trzech metod: metody szeregu Fouriera, metody całki Fouriera, metody dla układów nieskończenie długich



Rys. 5.11. Rozkład składowej wzdłużnej indukcji magnetycznej w ściance rury obliczony za pomocą trzech metod

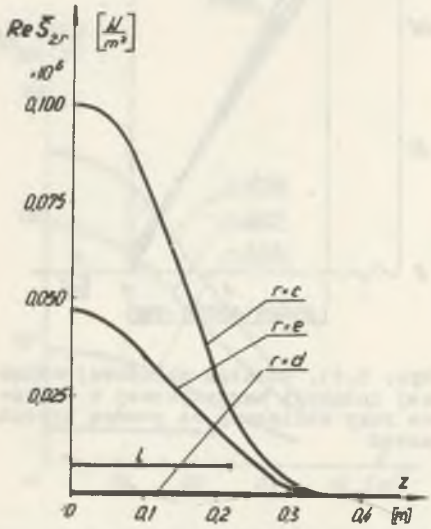


Rys. 5.12. Rozkład składowej wzdłużnej indukcji w zależności od długości wzbudnika; l = 0,2285 (tab. 5.1)

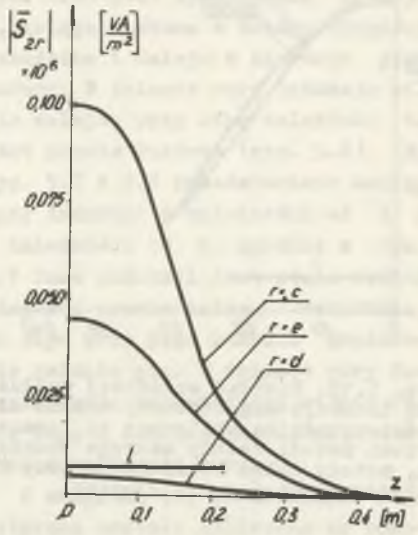
skończenie długiego. Wraz ze zwiększaniem długości wzbudnika zmienia się także jej kształt: od ostrego z wyraźnie zaznaczonym maximum, dla wzbudnika krótkiego, aż do równomiernego wzdłuż długości dla wzbudnika nieskończenie długiego.

5.2.3.4. Wektor Poyntinga, gęstość mocy czynnej oraz cos φ

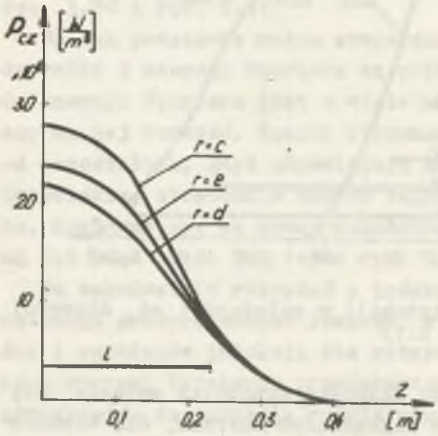
Wektor Poyntinga obliczono zgodnie z (3-32a), (3-40) oraz (3-41). Na rys. 5.13 przedstawiono jego część rzeczywistą (strumień mocy czynnej), natomiast na rys. 5.14 moduł (strumień mocy pozornej). Gęstość mocy czynnej obliczoną zgodnie z (3-36) przedstawiono na rys. 5.15 i rys. 5.16.



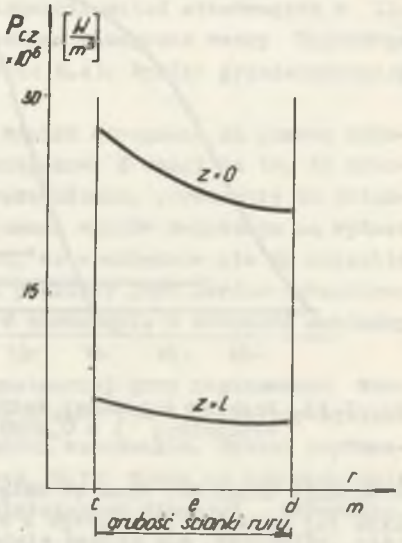
Rys. 5.13. Strumień mocy czynnej wzdłuż długości wzbudnika dla r = c,e,d



Rys. 5.14. Strumień mocy pozornej wzdłuż długości wzbudnika dla r = = c,e,d

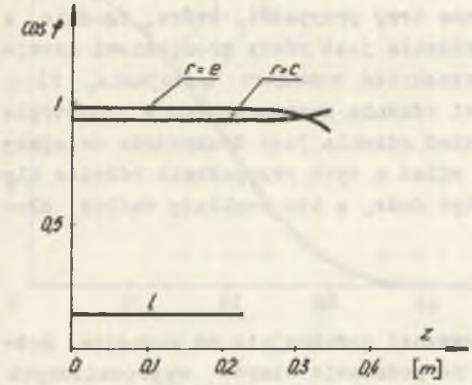


Rys. 5.15. Rozkład gęstości mocy czynnej wzdłuż długości wzbudnika dla r = c,e,d



Rys. 5.16. Rozkład gęstości mocy czynnej w ściance rury dla z = 0,1

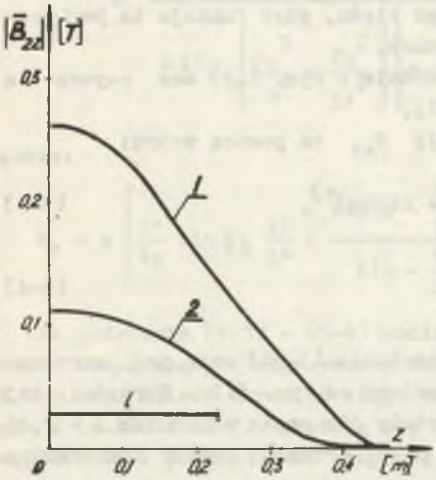
Obliczony zgodnie z (3-38) współczynnik mocy dla rury przedstawiono na rysunku 5.17.



Rys. 5.17. Rozkład cos φ wzdłuż długości wzbudnika dla r = c, e

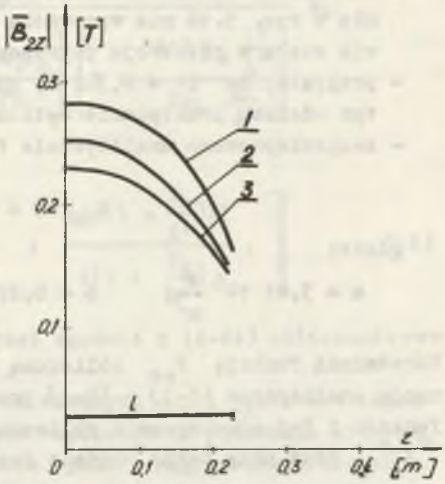
5.2.3.5. Analiza wpływu rdzenia magnetycznego na wielkość indukcji

Zgodnie z p.p. 3.2.1.4 wpływ rdzenia magnetycznego na wielkość indukcji w układzie określa się na podstawie wzorów (3-26b) i (3-39). Z uwagi na p.p. 5.2 do obliczeń wykorzystano odpowiedniki ww. wzorów tzn. (3-41) i (3-42). Wyniki otrzymane za pomocą metody szeregu Fouriera przedstawiono na rys. 5.18, a za pomocą metody całki Fouriera na rys. 5.19.



Rys. 5.18. Rozkład indukcji magnetycznej wzdłuż długości wzbudnika w zależności od promienia rdzenia

1 - dla a = 0,079 m (vide rys.5.16),
2 - dla a = 0 (vide wzór (3-42)).
Metoda szeregu Fouriera



Rys. 5.19. Rozkład indukcji magnetycznej wzdłuż długości wzbudnika w zależności od promienia rdzenia

1 - dla a = 0,138 m, 2 - dla a = = 0,079 m, 3 - dla a = 0,04 m.
Metoda całki Fouriera

Zgodnie z ogólną prawidłowością, indukcja magnetyczna wraz ze zmniejszaniem promienia rdzenia maleje, przy czym dla układu bez rdzenia indukcja maksymalna dla $z = 0$ spada do ok. 45% indukcji maksymalnej w układzie z rdzeniem. Na rys. 5.19 obliczono trzy przypadki, które, zgodnie z rys. 5.1b odpowiadają: 1) - promień rdzenia jest równy promieniowi uzwojenia wzbudnika (rdzeń wypełnia całą przestrzeń wewnątrz uzwojenia, 2) - promień rdzenia jest równy promieniowi rdzenia zastosowanego w prototypie doświadczalnym nagrzewnicy, 3) - promień rdzenia jest dwukrotnie mniejszy niż w prototypie doświadczalnym. Jak widać w tych przypadkach różnice między indukcjami maksymalnymi nie są zbyt duże, a ich rozkłady wzdłuż długości wzbudnika są podobne.

5.2.3.6. Rozkład temperatury

Rozkład temperatury w rurze nagrzewwanej indukcyjnie od wewnątrz, można zgodnie z p.p. 4.1 i 5.2 obliczyć na podstawie wzorów wyprowadzonych dla nagrzewania płyty. Pole temperatury w ściance rury określone jest więc wzorem (4-44), w którym występujący współczynnik B_{nk} zależy od funkcji gęstości mocy czynnej $w(x,z)$. Funkcja ta, przy nagrzewaniu wewnętrznym rury, dana jest analitycznie wzorem (3-36) oraz wykreślnie na rys. 5.15 i 5.16. Z uwagi na to, że dla obliczenia współczynnika B_{nk} potrzebna jest analityczna postać ww. funkcji, należałoby scałkować funkcję (3-36), co jednak jest możliwe tylko na drodze numerycznej i stanowi dosyć skomplikowany problem numeryczny. Dlatego też w niniejszej pracy, celem ominięcia tej trudności, zastosowano inny sposób, a to:

- uśredniono wartość funkcji P_{cz} po grubości ścianki rury, co zgodnie z rys. 5.16 nie wprowadza dużego błędu, gdyż funkcja ta jest prawie stała w przekroju poprzecznym rury,
- przyjęto, że $l' = 0{,}382$ m, gdyż zgodnie z rys. 5.15 moc czynna na tym odcinku praktycznie wytłumia się,
- zaaproksymowano analitycznie funkcję P_{cz} za pomocą wzoru:

$$P_{cz}(z) = a(1 + \cos bz)^{x)}, \tag{5-3}$$

gdzie:

$$a = 3{,}01\ 10^6\ \frac{W}{m^3}; \qquad b = 8{,}276\ \frac{1}{m}. \tag{5-4}$$

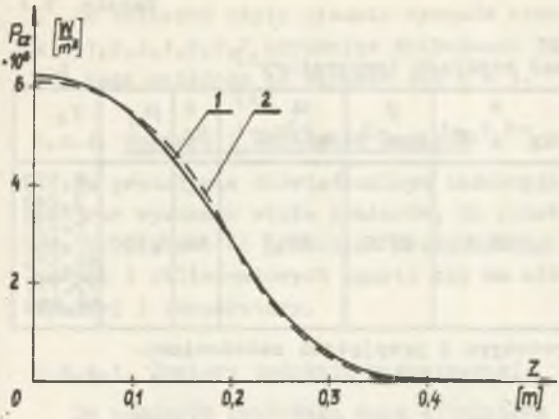
Uśrednioną funkcję P_{cz} obliczoną na podstawie (3-36) oraz jej aproksymacje analityczne (5-3) - (5-4) przedstawiono na rys. 5.20. Wartości tej funkcji i jej aproksymacji obliczone zostały dla prądu wzbudnika $I = 2{,}15 \cdot 10^3$A, gdyż przy takim prądzie średnim przeprowadzono pomiar temperatury.

---

x) Dokładniejszą aproksymację niż (5-3) można uzyskać stosując np. wzór

$$P_{cz} = \sum_{m=0}^{4} a_m z^{2m}$$

Z uwagi jednak na to, że wzór na rozkład temperatury poważnie się wtedy komplikuje, zrezygnowano z wyższej dokładności, dla zmniejszenia pracochłonności obliczeń.



Rys. 5.20. Uśredniona wartość gęstości mocy czynnej (1), obliczona zgodnie z (3-36) i jej aproksymacja analityczna (2) obliczona zgodnie z (5-3) i (5-4)

Według (5-3) wyrażenie (4-40) przyjmie postać

$$B_{nk} = \frac{4}{\lambda} \frac{\int_0^{l'} \int_0^{d} a(1+\cos bz) \cos \mu_n \frac{x}{d} \cos \gamma_k \frac{z}{L} \, dx dz}{l' d \left[\frac{\mu_n^2}{d^2} + \frac{\gamma_k^2}{L'^2} \right] \left[1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} \right] \left[1 + \frac{\sin 2\gamma_k \frac{l'}{L'}}{2\gamma_k \frac{l'}{L'}} \right]} =$$

$$= \frac{4 \sin \mu_n}{\lambda l' \mu_n \left[\frac{\mu_n^2}{d^2} + \frac{\gamma_k^2}{L'^2} \right] \left[1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} \right] \left[1 + \frac{\sin 2\gamma_k \frac{l'}{L'}}{2\gamma_k \frac{l'}{L'}} \right]} b_k \qquad (5\text{-}5)$$

gdzie:

$$b_k = a \left[\frac{L'}{\gamma_k} \sin \gamma_k \frac{l'}{L'} + \frac{\sin(b - \frac{\gamma_k}{L'})l'}{2(b - \frac{\gamma_k}{L'})} + \frac{\sin(b + \frac{\gamma_k}{L'})l'}{2(b + \frac{\gamma_k}{L'})} \right] . \qquad 5\text{-}6)$$

Na podstawie (5-3) - (5-6) możliwe jest zgodnie z (4-44) obliczanie rozkładu temperatury w nagrzewanej rurze.

W tym celu należy określić ciągi wartości własnych μ_n i γ_k, które zgodnie z (4-28) i (4-7) wyrażają się poprzez współczynnik oddawania ciepła α, współczynnik przewodności cieplnej λ oraz wymiary nagrzewanego elementu. Ciągi wartości μ_n i γ_k (dla danych α, λ, L', d) znaleziono graficznie (gdyż równania (4-28) są nierozwiązalne analitycznie), na podstawie sposobu podanego np. w pozycjach [35, 38].

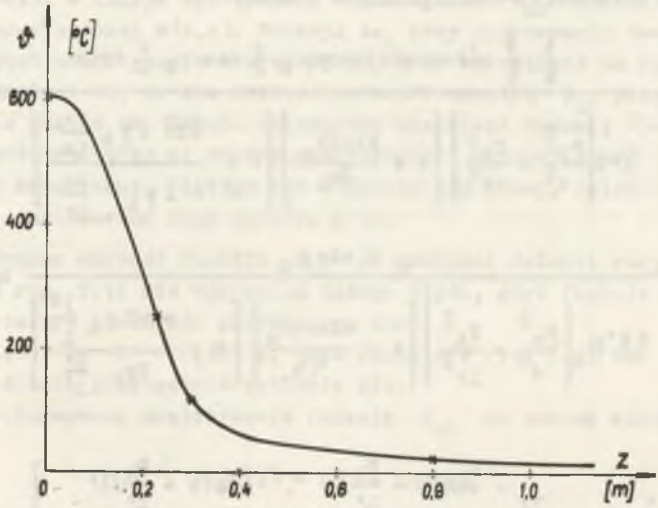
Tabela 5.4

Dane do obliczeń rozkładu temperatury[x)]

d m	l' m	L' m	λ $Wm^{-1}{}^{o}C^{-1}$	c $Wkg^{-1}s^{o}C^{-1}$	ρ kgm^{-3}	α [xx)] $Wm^{-2}{}^{o}C^{-1}$	ϑ_o ^{o}C	μ_n	ϑ_k
0,004	0,382	1,15	195,55	992,1	2700	48,7	10	0,037	0,553 3,249 6,338 9,462 12,576 15,717 18,859

x) Dane zgodne z parametrami prototypu i przyjętymi założeniami.
xx) Vide D.5.

Obliczony na podstawie (5-3) - (5-6) i (4-44) oraz zgodnie z tab. 5.4 rozkład temperatury przedstawiono na rys. 5.21.



Rys. 5.21. Obliczony rozkład temperatury wzdłuż osi nagrzewanej rury (x = 0, t = 180s)

Na rys. 5.21 pokazano tylko rozkład temperatury w rurze po zakończeniu nagrzewania, zrezygnowano natomiast z przedstawienia zmian temperatury w czasie nagrzewania. Związane to było z koniecznością obliczania dla każdej chwili czasu osobno współczynników oddawania ciepła α. Problem ten, jakkolwiek ciekawy z punktu widzenia teorii, nie ma tak dużego znaczenia praktycznego jak rozkład temperatury końcowej.

Do obliczeń użyto siedmiu wyrazów szeregu (4-44), tzn. dla n = 1 oraz k = 1,2,3,4,5,6,7 uzyskując dokładność 3%[x]. Wyrazy dla n = 2 były już ok. 10^4 razy mniejsze od wyrazów dla n = 1.

5.2.4. Pomiary i zbieżność wyników

Na prototypie doświadczalnym indukcyjnej nagrzewnicy wewnętrznej do końców rur wykonano wiele pomiarów, na podstawie których opracowano założenia projektowe do prototypu przemysłowego. Celem porównania wyników pomiarowych i obliczeniowych oparto się na niektórych pomiarach indukcji magnetycznej i temperatury.

5.2.4.1. Pomiary indukcji magnetycznej

Do pomiarów posłużyła rura aluminiowa o konduktywności i wymiarach, jakich użyto do obliczeń. Wartość średnią składowej wzdłużnej indukcji mierzono za pomocą specjalnych cewek. Dla ich nawinięcia wywiercono w rurze dwa rzędy otworów Ø 3 mm po 20 w rzędzie co 50 mm. Przez otwory nawinięto 20 3-zwojowych cewek pomiarowych (rys. 5.22) oznaczonych liczbami od 1 do 20.

Celem pomiarów było:

- sprawdzenie zbieżności wyników obliczeniowych i pomiarowych,
- ocena wpływu skończonej długości rdzenia na zbieżność wyników,

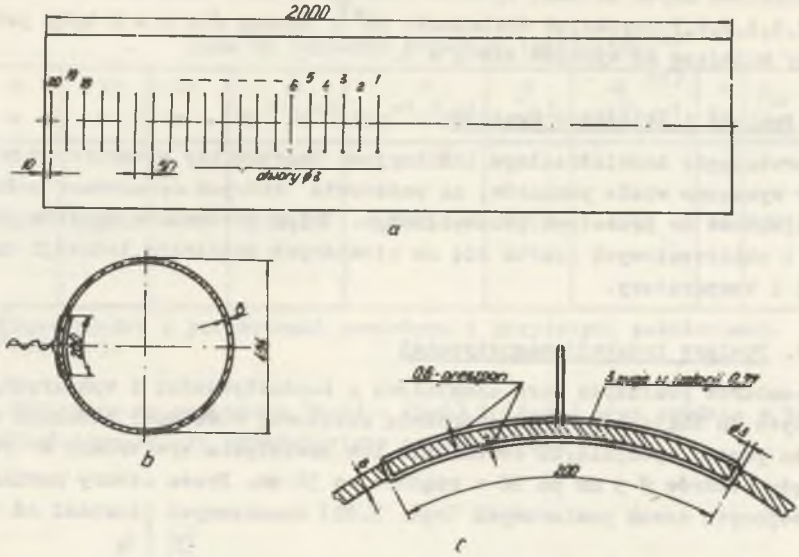
przy czym należy zaznaczyć, że uzyskane w tym zakresie rezultaty mają zastosowanie tylko do konkretnego rozważanego tu przypadku.

Pomierzona krzywa rozkładu przestrzennego indukcji magnetycznej B_w wykreślona jest linią ciągłą na rys. 5.23. Krzywa ta jest niesymetryczna względem punktu z = 0, toteż nad jej prawą gałęzią pokazano linią przerywaną zwierciadlane odbicie gałęzi lewej. Różnica wartości B_w odczytane z obu krzywych nad prawym brzegiem cewki wzbudnika jest niewielka. Przyczyną asymetrii krzywej B_w jest rdzeń magnetyczny, który wystaje ze wzbudnika tylko z jednej strony. W związku z tym, dla porównania z wynikami obliczeniowymi należy wybrać lewą gałąź, gdyż warunki pomiaru tam znacznie bardziej odpowiadają założeniom obliczeniowym.

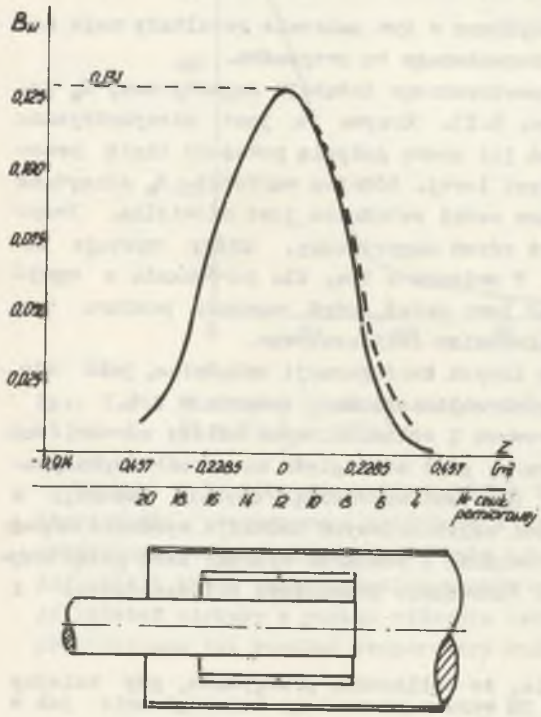
Pomiary indukcji wykonane dla innych konfiguracji wzbudnika, jako nie mające swych odpowiedników w części obliczeniowej, zawarto w D.6.

Dla porównania wyników pomiarowych i obliczeniowych należy uśrednić wartości obliczeniowe po grubości rury, gdyż ze względu na sposób wykonywania pomiaru, wartość pomierzona B_w jest wartością średnią indukcji w ściance rury. Uśrednienie wartości obliczeniowych indukcji wykonano na podstawie rys. 5.5 i 5.6, a dla porównania z pomiarem wybrano lewą gałąź krzywej pomiarowej (vide rys. 5.24). Porównanie przebiegów obliczeniowych i

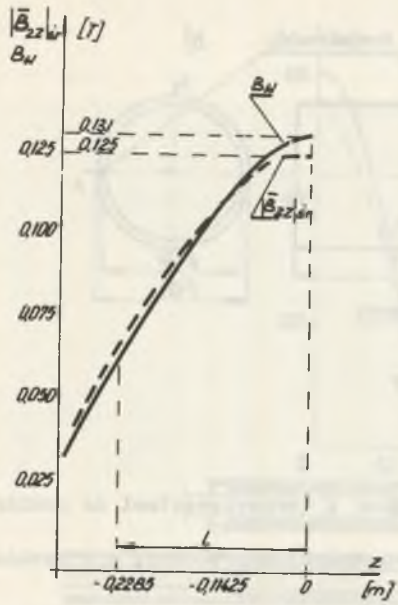
[x] Rozumieć to należy w tym sensie, że obliczenia przerywano, gdy kolejny wyraz szeregu był mniejszy od 3% wyrazu pierwszego (analogicznie jak w obliczeniach elektromagnetycznych).



Rys. 5.22. Rura aluminiowa z uzwojeniami pomiarowymi do wyznaczania wartości średnich składowej wzdłużnej indukcji
a - widok, b - przekrój, c - wycinek przekroju



Rys. 5.23. Pomierzony rozkład przestrzenny B_w. Krzywa kreskowana stanowi zwierciadlane odbicie gałęzi lewej ($z<0$).



Rys. 5.24. Porównanie przebiegów obliczeniowych ($B_{2z\ śr}$) i pomiarowych (B_w) średnich wartości składowej wzdłużnej indukcji

pomiarowych wartości średnich składowej wzdłużnej indukcji magnetycznej przedstawiono na rys. 5.24. Na całej długości lewej połowy wzbudnika ($z < o$) stwierdza się dobrą zbieżność obu krzywych (błąd nie przekracza 5%).

Na podstawie rys. 5.23 można stwierdzić, że porównanie prawych części ($z > 0$) krzywej pomiarowej i obliczeniowej, która jest symetryczna względem ($z = 0$), dałoby nieco większą rozbieżność wyników. Jednak, z uwagi na to, że rozbieżności te będą nadal niewielkie, można zauważyć, że przedstawiona metoda obliczeniowa nadaje się także do analizy przypadków z rdzeniem skończonym.

5.2.4.2. Pomiary temperatury

Do pomiarów temperatury użyto rury aluminiowej o parametrach cieplnych i wymiarach takich, jakich użyto do obliczeń. Wzbudnik nagrzewnicy zasilano z transformatora, współpracującego normalnie z piecem do elektrożużlowego przetapiania stali. Parametry elektryczne transformatora są następujące: S_N = 1 MVA, U_N = 6000/41 - 90V, I_N = 0,167/14,5 kA.

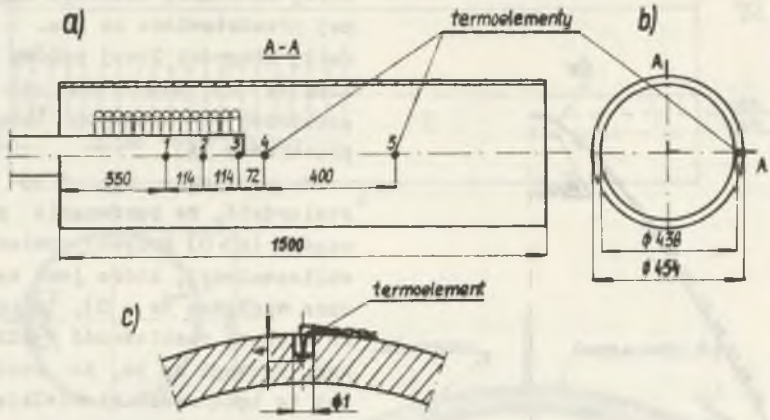
Nagrzewanie przeprowadzono przy napięciu zasilania wzbudnika U = 91 V oraz średnim natężeniu prądu $I_{śr}$ = 2,15 kA.

Temperaturę mierzono przy użyciu termoelementów NiCrNi, na głębokości 4 mm od powierzchni rury. Wielkość temperatury rejestrowano na 6 punktowym kompensatorze typu MK o zakresie 0 - 1200°C i dokładności 0,25%.

Wymiary nagrzewanej rury i wzbudnika oraz rozmieszczenie punktów pomiarowych przedstawiono na rys. 5.25.

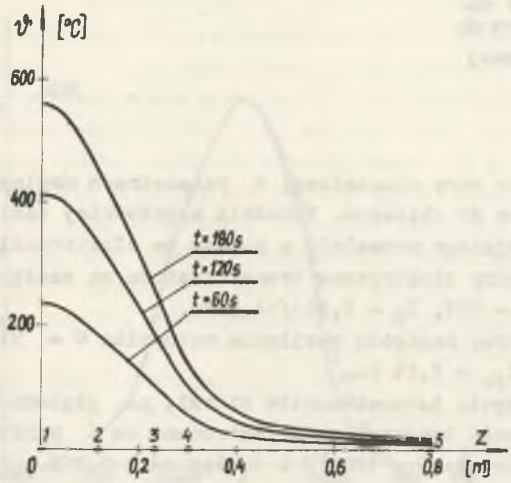
Wyniki pomiarów, tzn. rozkład temperatury po zakończeniu nagrzewania[x)] wzdłuż długości rury ujęto wykreślnie na rys. 5.26.

x) Zgodnie z [87] aluminium podlega obróbce plastycznej począwszy od temperatury 460°C. W związku z tym nagrzewanie prowadzono do temperatury wyższej.



Rys. 5.25. Rura aluminiowa i nagrzewnica z termoelementami do pomiaru temperatury

a - przekrój wzdłużny, b - przekrój poprzeczny, c - wycinek przekroju poprzecznego

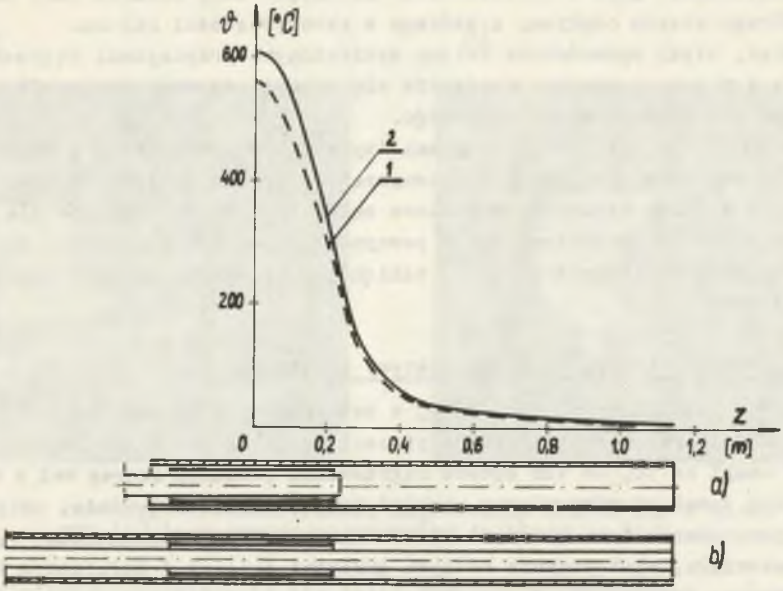


Rys. 5.26. Pomierzony rozkład temperatury w czasie wzdłuż długości rury z zaznaczeniem rozmieszczenia termoelementów

Ze względu na wysoką klasę użytych przyrządów pomiarowych, błąd względny pomiaru temperatury nie powinien przekraczać 1-2%,

Pozostałe wyniki pomiarowe uzyskane przy nagrzewaniu rur stalowych ze stali 1H18N9T, jako nie posiadające swych odpowiedników w części obliczeniowej zamieszczono w D.6.

Porównanie wyników pomiarowych i obliczeniowych przedstawiono na rys. 5.27. Na podstawie rys. 5.27 można stwierdzić, że krzywa pomiarowa (1) i obliczeniowa (2) są dobrze zbieżne,(rozbieżność waha się od 8% w punkcie maksymalnym do 15% na końcu wzbudnika).



Rys. 5.27. Porównanie wyników pomiarowych - 1 (mierzonych w układzie (a)) i obliczeniowych - 2 (obliczanych w układzie (b))

Rozbieżność powodowana jest kilkoma podstawowymi przyczynami:

- niedokładność obliczenia gęstości mocy czynnej wg (3-36)(metoda szeregu Fouriera - błąd rzędu 4%) oraz niedokładność aproksymacji obliczonej krzywej wg (5-3) (zgodnie z rys. 5.20 błąd rzędu 1%),
- niedokładność obliczenia temperatury zgodnie z (4-44) (obliczenia przerywano, gdy kolejny wyraz szeregu był mniejszy niż 3% wyrazu pierwszego),
- niedokładność wyznaczenia średniego współczynnika konwekcji i promieniowania α (vide D.5) oraz innych stałych materiałowych,
- asymetria kształtu układu pomiarowego w stosunku do obliczeniowego,
- błąd pomiaru temperatury (rzędu 1%-2%).

Błędy wynikające z niedokładności obliczenia i aproksymacji gęstości mocy czynnej, niedokładności obliczenia temperatury wg (4-44) oraz błąd pomiaru temperatury są niewielkie i nie mają decydującego wpływu na rozbieżność wyników. Podstawowe natomiast znaczenie posiadają dwa składniki: niedokładność w wyznaczaniu średniego α oraz asymetria kształtu układu pomiarowego. Do obliczeń przyjęto średni współczynnik α, który w punkcie z=0 i pobliskich jest niższy od rzeczywistego, natomiast w dalszych punktach wyższy. Powoduje to, że temperatura obliczona w otoczeniu punktu z=0, powinna być wyższa od rzeczywistej, natomiast dalej niższa. Z drugiej jednak strony asymetria układu pomiarowego w stosunku do obliczeniowego, po-

woduje, że temperatura obliczona powinna być, w otoczeniu p-tu z=0 niższa niż pomierzona, gdyż w obliczeniach "istnieje" duży odcinek rury ($z < 0$), do którego ciepło odpływa, a którego w rzeczywistości nie ma.
Tak więc, błędy spowodowane dwiema wymienionymi przyczynami są przeciwnych znaków i w pewnym stopniu wzajemnie się znoszą, co w konsekwencji prowadzi do niewielkiego błędu końcowego.

Na podstawie przeprowadzonej analizy wyników pomiarowych i obliczeniowych zarówno dla indukcji jak i temperatury, można stwierdzić, że przedstawione w pracy metody obliczeniowe są wystarczająco dokładne dla większości obliczeń technicznych i w pewnym stopniu nadają się także do obliczania układów niesymetrycznych, takich jak np. omówione tu nagrzewanie końców rur.

5.2.5. Próby przemysłowe i perspektywy zastosowania

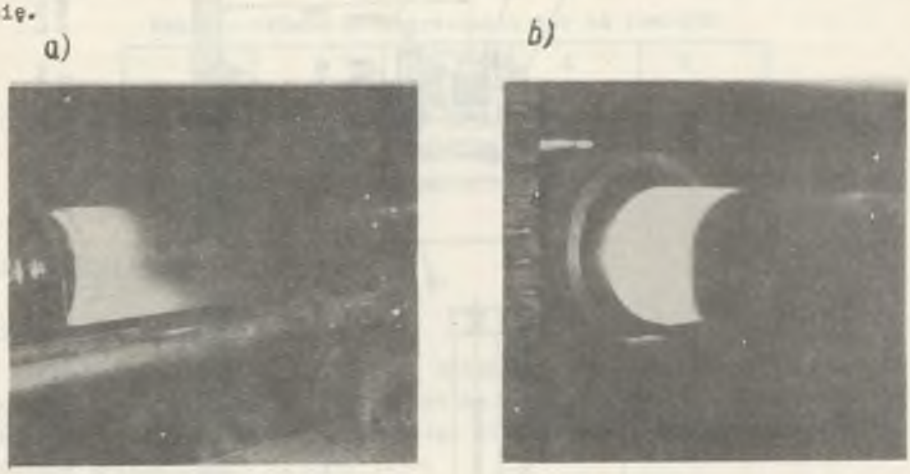
Na Wydziale Walcowni Rur jednej z hut krajowych prowadzone było nagrzewanie końców rur w szczelinowych piecach gazowych przed obróbką plastyczną. Z uwagi na to, że ten sposób nagrzewania posiadał szereg wad a w szczególności dawał nierównomierny rozkład temperatury na obwodzie, co powodowało powstawanie tzw. krzywych końców na skutek nierównomiernego płynięcia materiału, występowanie różnych grubości ścianek i deformacje kształtu w czasie stygnięcia. W związku z planowaną modernizacją wydziału poszukiwano innej technologii nagrzewania.

Opierając się na zachęcających wynikach prób laboratoryjnych z indukcyjną nagrzewnicą wewnętrzną do końców rur, ustawiono na omawianym wydziale huty w pobliżu tzw. tłoczni, prototyp przemysłowy. Nagrzewnica zasilana była z wybudowanej w tym celu komory transformatorowej z transformatorem pieca łukowego o mocy 2 MVA. Celem zmniejszenia strat cieplnych - wyposażono nagrzewnicę w dodatkowy pierścień ceramiczny, obejmujący koniec rury od zewnątrz. Próby nagrzewania prowadzono w toku produkcji. Nagrzewane rury przenoszono natychmiast przy pomocy dźwigu na tłocznię. Otrzymane rozkłady temperatur są widoczne na zdjęciach (rys. 5.28).

Dla porównania stopnia utleniania przy nagrzewaniu indukcyjnym i płomiennym zdjęto powstałą zgorzelinę z końców rur nagrzanych za pomocą obu sposobów. Okazało się, że po nagrzaniu indukcyjnym ma ona postać proszku, natomiast po nagrzaniu płomiennym, postać płatków. Oprócz tego ciężar zdjętej zgorzeliny był przy nagrzewaniu indukcyjnym kilkakrotnie mniejszy.

W oparciu o przeprowadzone badania dyrekcja huty podjęła decyzję zastosowania nagrzewnicy indukcyjnej na wydziale rurowni przy najbliższej modernizacji wydziału. W oparciu o założenia autora zlecono więc do biura projektowego "Biprohut" opracowanie dokumentacji technicznej nagrzewnicy wraz z urządzeniami zasilającymi i pomocniczymi. W rozwiązaniu tym (rys. 5.29) założono, że rura przesuwać się będzie na samotokach aż do obojnika (13). Gdy ten z kolei schowa się do obudowy (14) napęd pneumatyczny (4) wprowadzi wzbudnik (5) do końca rury (12). Po nagrzaniu wzbudnik wraca w

w pozycję wyjściową, jak na rysunku a zostanie ze pomocą wyrzutnika z toru samotoku przełożona na pochylnię, wzdłuż której stacza się pod tłocznię.



Rys. 5.28. Porównanie równomierności nagrzewania końców rur w piecu gazowym (a) i za pomocą nagrzewnicy indukcyjnej (b)

Przedstawione rozwiązanie nie tylko gwarantuje równomierne nagrzewanie na obwodzie rury, lecz również stwarza warunki dla zautomatyzowania procesu i zwiększenia wydajności przy mniejszej pracochłonności*).

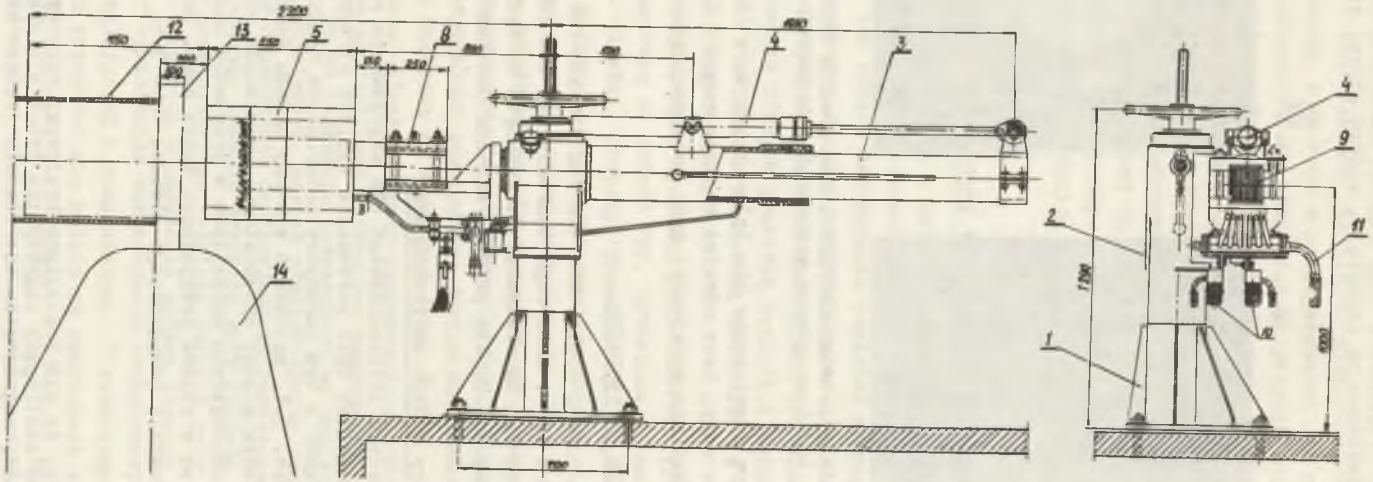
5.3. Nagrzewanie od zewnątrz

Zgodnie z p.p.5.1, obliczenia dla nagrzewania rur od zewnątrz zostały przeprowadzone w nieco mniejszym zakresie niż dla nagrzewania od wewnątrz. Z uwagi także na to, że większość otrzymanych tu wyników jest analogiczna do wyników z p.p.5.2.3, nie poddaje się ich już tak dokładnej analizie.

5.3.1. Parametry modelu obliczeniowego

Parametry modelu obliczeniowego dla nagrzewania rur od zewnątrz przyjęto tak, aby możliwe było porównanie wyników otrzymanych w obydwu przypadkach. W związku z tym parametry materiałowe wsadu i zasilania są identyczne jak w tab. 5.1, natomiast wymiary układu dobrano w ten sposób, że wielkości szczelin między bocznikiem i uzwojeniem oraz między uzwojeniem i rurą są równe odpowiednim szczelinom w przypadku nagrzewania wewnętrznego. Średnice rury są w obydwu przypadkach takie same. Dane przyjęte do obliczeń dla nagrzewania zewnętrznego zawiera tab. 5.5.

*) Z uwagi na to, że nie znaleziono krajowego wykonawcy, który wykonałby transformator zasilający nagrzewnicę przed planowanym terminem modernizacji wydziału, nagrzewnica nie została jeszcze zbudowana.



Rys. 5.29. Rysunek zestawieniowy przemysłowej nagrzewnicy indukcyjnej do końców rur

1 - podstawa wsporcza, 2,3 - konstrukcja nośna, 4 - napęd pneumatyczny, 5 - wzbudnik, 8 - zamek wzbudnika, 9 - rdzeń magnetyczny, 10 - przewody zasilające, 11 - węże wodne, 12 - koniec rury, 13 obojnik w pozycji górnej, 14 - obudowa obojnika

Tablica 5.5

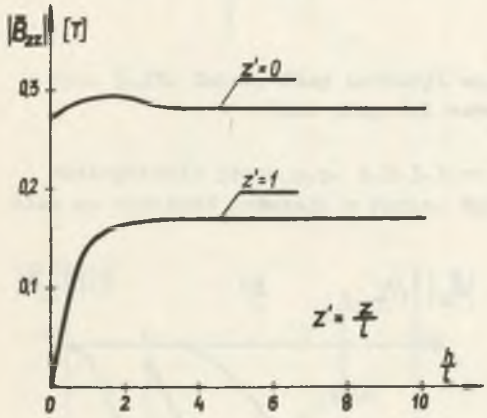
Wymiary układu do nagrzewania rur od zewnątrz

a m	b m	c m	d m	l m
0,367	0,308	0,227	0,219	0,2285

5.3.2. Obliczenia

5.3.2.1. Dobór stosunku h/l

Analogicznie jak w p.p. 5.2.3.1, optymalny dla rozważanego układu stosunek h/l, wybrano badając jego wpływ na wielkość indukcji w układzie. Wyniki otrzymane za pomocą sprowadzonego do postaci bezwymiarowej wzoru na indukcję przedstawiono na rys. 5.30.



Rys. 5.30. Zależność składowej wzdłużnej indukcji B_{2z} od stosunku h/l

Poszukiwanym optymalnym dla rozważanego układu stosunkiem h/l jest

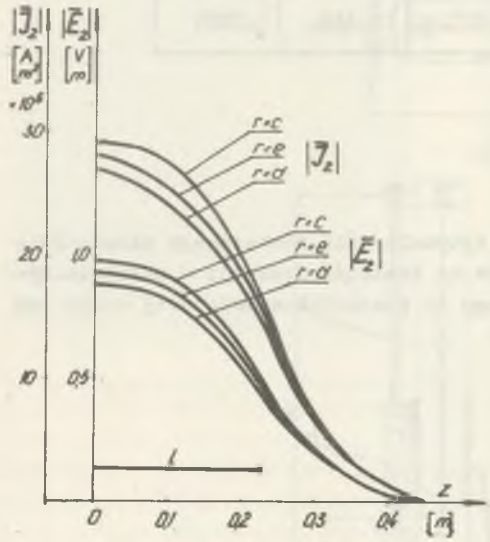
$$\frac{h}{l} = 1$$

czyli

$$h = l = 0{,}2285 \text{ m.}$$

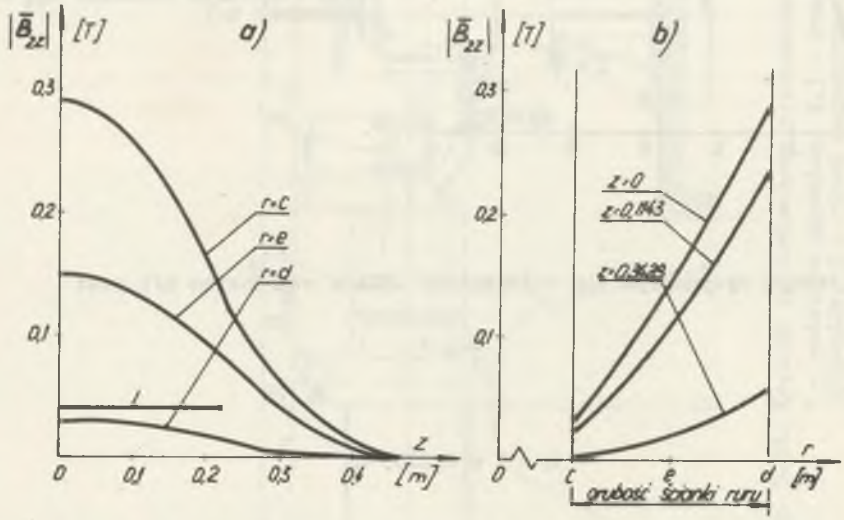
5.3.2.2. Natężenie pola elektrycznego i gęstość prądów indukowanych we wsadzie

Zgodnie z (3-52) i (3-53) obliczono natężenie pola elektrycznego $\bar{E}_2$ i gęstość prądów indukowanych $\bar{J}_2$ we wsadzie. Wyniki przedstawiono na rys. 5.31.



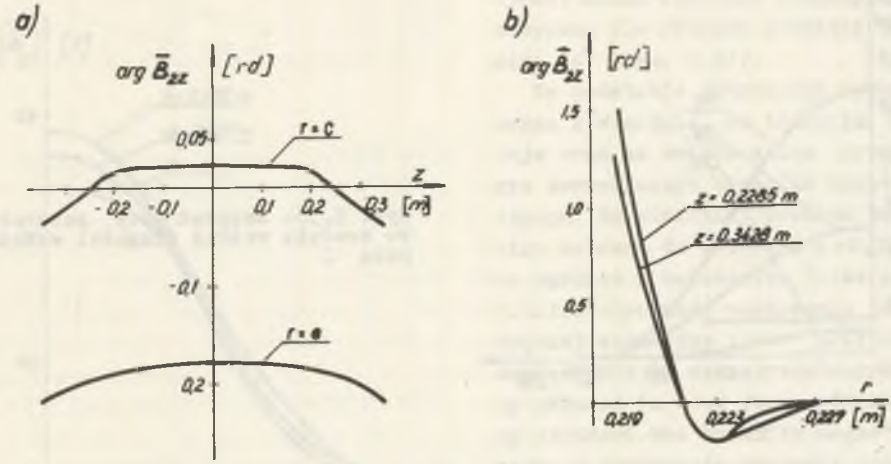
Rys. 5.31. Natężenie pola elektrycznego i gęstość prądów indukowanych we wsadzie wzdłuż długości wzbudnika dla różnych odległości od powierzchni rury (vide rys. 3.3)

5.3.2.3. Indukcja magnetyczna



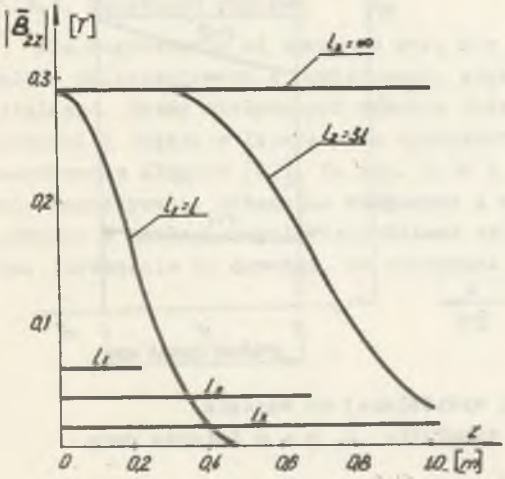
Rys. 5.32. Rozkład indukcji magnetycznej w rurze nagrzewanej od zewnątrz a - wzdłuż długości wzbudnika (l = 0,2285 m), b - w ściance rury

Indukcję magnetyczną obliczono na podstawie (3-54). Otrzymane wyniki przedstawiono na rys. 5.32 i rys. 5.33. Z uwagi na to, że uzyskane przebiegi są analogiczne jak w p.p. 5.2.3.3 rezygnuje się tu z ich dokładniejszego omawiania.



Rys. 5.33. Zmiany fazy indukcji magnetycznej w rurze
a - wzdłuż długości wzbudnika, b - w ściance rury

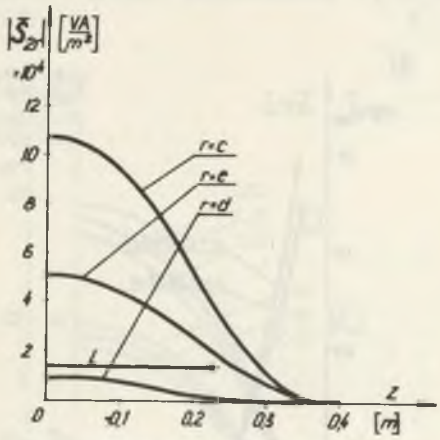
Analogicznie jak w p.p. 5.2.3.3 rozważano także wpływ długości wzbudnika na wielkość indukcji w rurze. Wyniki pokazano na rys. 5.34.



Rys. 5.34. Wpływ długości wzbudnika na rozkład indukcji w rurze przy nagrzewaniu od zewnątrz (l = 0,2285 m)

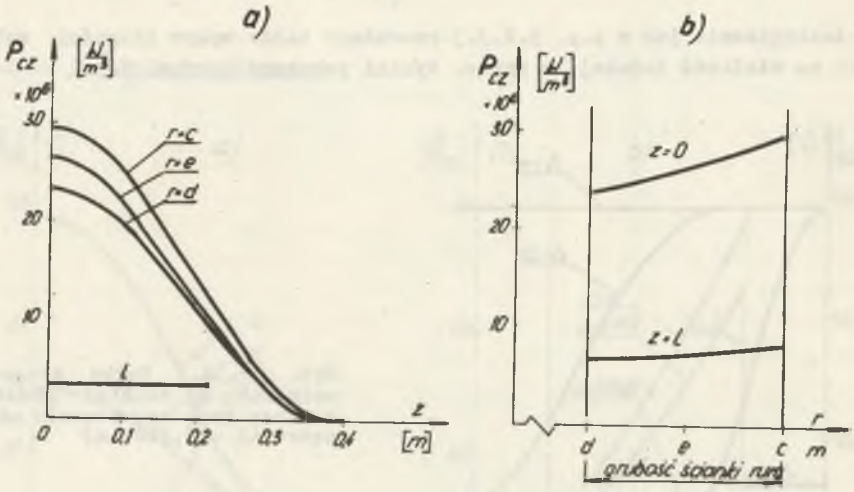
5.3.2.4. Wektor Poyntinga, gęstość mocy czynnej oraz cos φ

Wektor Poyntinga obliczono zgodnie z (3-58) - rys. 5.35.



Rys. 5.35. Rozkład mocy pozornej we wsadzie wzdłuż długości wzbudnika l

a gęstość mocy czynnej $P_{cz}(r,z)$ na podstawie (3-60) - rys. 5.36.

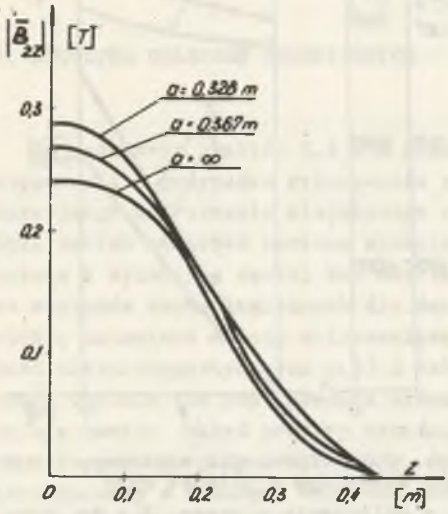


Rys. 5.36. Gęstość mocy czynnej wydzielanej we wsadzie
a - wzdłuż długości wzbudnika l, b - w ściance rury

Zmiany współczynnika mocy (cos φ) w rurze są analogiczne jak na rys. 5.17, więc rezygnuje się tu z ich przytaczania.

5.3.2.5. Analiza wpływu bocznika magnetycznego na wielkość indukcji

Analizę roli bocznika magnetycznego, w układzie na rys. 3.3, przeprowadzi się w oparciu o badanie jego wpływu na wielkość indukcji we wsadzie. Korzystając ze wzorów (3-63) oraz (3-64) można obliczyć indukcję magnetyczną dla różnych promieni bocznika "a" (rys. 5.37).

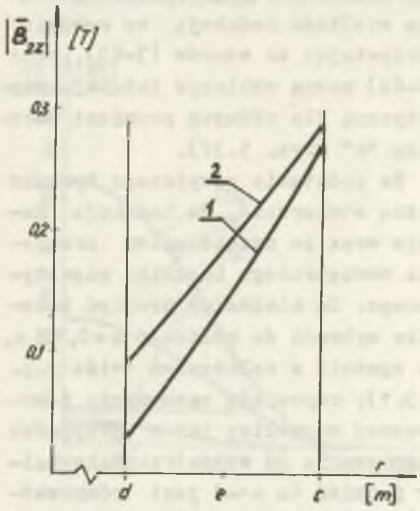


Rys. 5.37. Przebiegi indukcji magnetycznej na powierzchni rury (r=c) dla różnych promieni bocznika magnetycznego

Na podstawie powyższego rysunku można stwierdzić, że indukcja maleje wraz ze zwiększaniem promienia wewnętrznego bocznika magnetycznego. Za minimalny promień bocznika wybrano do obliczeń a = 0,328 m, co zgodnie z założeniem (vide p.p. 5.3.1), odpowiada zachowaniu identycznej szczeliny jak w przypadku nagrzewania od wewnątrz. Maksymalny promień (a = ∞) jest równoważny układowi bez bocznika magnetycznego. Z porównania wartości indukcji dla ww. promieni widać, że indukcja w układzie bez bocznika stanowi jeszcze ponad 80% indukcji w układzie rozważanym.

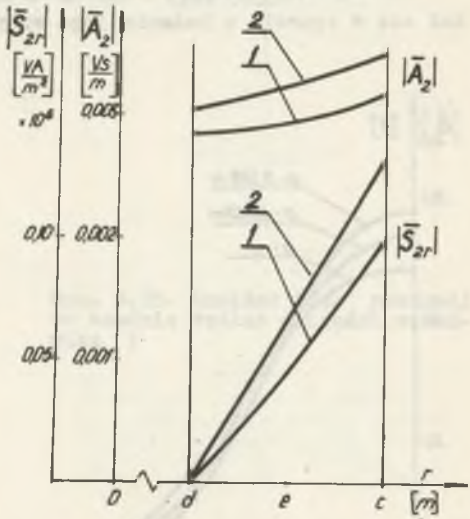
5.3.3. Zbieżność wyników

Dla nagrzewania od zewnątrz rur, nie można przeprowadzić porównania wyników obliczeniowych z pomiarowymi, gdyż nie zbudowano prototypu doświadczalnego. Oceny otrzymanych wyników dokona się więc przez porównanie ze znanymi i często w literaturze wykorzystywanymi wzorami dla układów nieskończenie długich [82]. Na rys. 5.38 i na rys. 5.39 przedstawiono indukcję magnetyczną, potencjał wektorowy i wektor Poyntinga w ściance rury porównane z analogicznymi wielkościami obliczonymi za pomocą wzorów Wajnberga. Porównanie to dowodzi, że otrzymane w pracy wyniki są sensowne.



Rys. 5.38. Indukcja magnetyczna w ściance rury

1 - obliczenia z pracy, 2 - wg wzorów Wajnberga



Rys. 5.39. Potencjał wektorowy i wektor Poyntinga w ściance rury

1 - obliczenia z pracy, 2 - wg wzorów Wajnberga

6. METODYKA OBLICZEŃ TECHNICZNYCH

Na podstawie punktów 3,4 i 5 pracy można zbudować ogólny schemat postępowania w przypadku wykonywania obliczeń technicznych dla procesów indukcyjnego nagrzewania miejscowego rur od zewnątrz i od wewnątrz*). Metodyka takich obliczeń powinna spełniać dwa podstawowe warunki: powinna być prosta i wykonalna raczej bez użycia EMC. Punkt wyjścia stanowi, żądany ze względów technologicznych dla danego procesu, rozkład temperatury końcowej, natomiast metodę obliczeniową - metodą szeregu Fouriera (dla obliczeń elektromagnetycznych p.3) i metoda Fouriera (dla obliczeń cieplnych p.4). Ogólnie tok postępowania można scharakteryzować następująco: zakłada się pewien okład prądowy wzbudnika i wykonuje wszystkie obliczenia, aż do uzyskania pola temperatury. Jeśli obliczony rozkład temperatury nie jest zbieżny z żądanym, cały tok powtarza się dla innego okładu prądowego wzbudnika. W ten sposób, drogą kolejnych przybliżeń, można otrzymać odpowiednie parametry uzwojenia nagrzewnicy. Szczegółowo droga obliczeń powinna przebiegać następująco:

1) ustalenie danych do obliczeń, a to: na podstawie wymiarów geometrycznych nagrzewanego elementu (rury lub walca) dobranie średnicy wzbudnika i rdzenia magnetycznego wg znanych zasad projektowania układów elektrotermicznych np. [75](przy czym należy pamiętać, że do obliczeń przyjmuje się średnicę efektywną wzbudnika - p.p.5.2.2 oraz że największą sprawność nagrzewania uzyskuje się przy możliwie minimalnych szczelinach powietrznych), obliczenie średnich wartości parametrów materiałowych wsadu (μ, σ, ρ, c, α, λ, -vide D.5), przyjęcie wartości okładu prądowego wzbudnika i częstotliwości prądu w oparciu o posiadane urządzenia zasilające i znane zasady doboru [1,6,7,77].

2) rozwinięcie na szereg Fouriera założonego okładu prądowego wzbudnika wg wzoru (3-5) i p.p. 3.4,

3) określenie optymalnego, dla przyjętego układu, stosunku h/l (zgodnie z p.p. 5.2.3.1 oraz 5.3.2.1),

---

*) Przedstawione obliczenia elektromagnetyczne stosuje się także do nagrzewania walców, gdyż nagrzewanie walca (cylindra pełnego) jest szczególnym przypadkiem nagrzewania od zewnątrz rury o promieniu wewnętrznym d = 0. W związku z tym wystarczy na wzorach z p.p. 3.2.2 wykonać przejście graniczne $d \to 0$, aby uzyskać żądane wzory dla cylindra pełnego. Operacja ta jest stosunkowo prosta, a wykonuje się ją analogicznie jak w p.p. 3.2.1.4 i 3.2.2.4.

4) dla obranego stosunku $\frac{h}{I}$ i przyjętych parametrów układu, obliczenie potencjału wektorowego, przy czym dla elementów o dużych promieniach (spełniających warunek z p.p. 3.2.1.5) należy stosować wzory (3-40) ew. (3-62) natomiast przy małych promieniach wzory (3-16) ew. (3-45),

5) określenie zgodnie z (3-3b,c), wykorzystując obliczony potencjał wektorowy, modułu gęstości prądów indukowanych we wsadzie,

6) obliczenie na podstawie (3-35) gęstości mocy czynnej wydzielonej we wsadzie,

7) zaaproksymowanie analityczne otrzymanej funkcji P_{cz} (analogicznie jak w p.p. 5.2.3.6) w oparciu o znane metody np. [2,10],

8) obliczenie rozkładu temperatury w nagrzewanym elemencie, zgodnie z (4-44) i (4-40), przy czym za funkcję $w(x,z)$ należy podstawić zaaproksymowaną funkcję P_{cz},

9) w przypadku nieuzyskania żądanego rozkładu temperatury, powtórzenie powyższego toku postępowania dla zmienionego okładu prądowego wzbudnika (vide p. 1),

10) ocena wielkości popełnionych błędów obliczeniowych, a w szczególności: porównanie rozbieżności między układem rzeczywistym, a modelem obliczeniowym oraz niedokładności w przyjęciu uśrednionego współczynnika α.

Całość obliczeń zawartą w powyższych 10 punktach można wykonać przy użyciu arytmometru lub nawet minikalkulatora.

7. PODSUMOWANIE

W pracy można wyodrębnić dwie zasadnicze części:

- obliczeniową,
- techniczną.

W części pierwszej w stosunku do literatury zagadnienie poszerzono o niepublikowane[x)] dotychczas rozwiązania, a to:

1) rozwiązanie zagadnienia elektromagnetycznego dla nagrzewania rur od wewnątrz wzbudnikiem z rdzeniem magnetycznym (począwszy od okładu prądowego wzbudnika, aż do obliczenia mocy wydzielanej we wsadzie), w oparciu o metody szeregu i całki Fouriera,

2) rozwiązanie zagadnienia elektromagnetycznego dla nagrzewania rur od zewnątrz wzbudnikiem z bocznikiem magnetycznym - jw.,

3) przygotowanie metodyki obliczeń dla nagrzewania przy użyciu wzbudników wielosekcyjnych,

4) rozwiązanie zagadnienia cieplnego dla nagrzewania indukcyjnego rur, a tym samym (łącznie z powyższymi punktami 1,2,3) przygotowanie metodyki obliczeń dla kompleksowej analizy problemów elektrotermicznych.

Część ta obejmuje więc, od strony elektromagentycznej, całość zagadnień związanych z miejscowym nagrzewaniem indukcyjnym rur o μ = const, natomiast od strony cieplnej problem potraktowano wycinkowo, tzn. dla rur cienkościennych o dużych promieniach, ale to wyczerpuje większość przypadków spotykanych w zastosowaniach technicznych.

W ten sposób uzyskano uogólnienie metod obliczeniowych, zasygnalizowane we wstępie i p.p. 2.6, stosowanych w literaturze do obliczania pola elektromagnetycznego i temperaturowego w układach rura-wzbudnik.

Część techniczna pracy wyrosła z konkretnych potrzeb przemysłowych, w oparciu o patent autora dotyczący indukcyjnego nagrzewania od wewnątrz końców rur i obejmuje:

1) projekt nagrzewnicy z uwzględnieniem specyfiki technologii produkcji rur (p.p. 5.2.5),

---

x) Nie licząc wcześniejszej publikacji autora [13], w której zawarte są już pewne rozwiązania częściowe.

2) budowę prototypu i przeprowadzenia prób w warunkach przemysłowych (p.p. 5.2.1 i 5.2.5),

3) przeprowadzenie pomiarów na prototypie doświadczalnym:
   - indukcji magnetycznej, oryginalną metodą zaproponowaną przez autora (p.p. 5.2.4.1),
   - temperatury, po zaadoptowaniu przemysłowego układu zasilającego urządzenie do elektrożużlowego przetapiania stali (p.p.5.2.4.2),

4) metodykę obliczeń technicznych, która daje możliwość ustalenia założeń projektowych oraz sprawdzenia, czy żądany rozkład temperatury jest technicznie osiągalny (p.6),

Reasumując, można stwierdzić, że przedstawione w pracy obliczenia (ze szczególnym uwzględnieniem p.6) i przykłady zastosowania tworzą nowe, dokładniejsze od dotychczas stosowanych, metody inżynierskie stanowiące podstawę dla usprawnienia starych i wprowadzenie nowych technologii elektrotermicznych w hutnictwie.

8. SPIS OZNACZEŃ

$\bar{A}$	potencjał wektorowy
A_φ	składowa kątowa potencjału wektorowego
$\bar{A}_i$	potencjały wektorowe w poszczególnych obszarach obliczeniowych
$\bar{A}(k,r)$	transformata Fourierowska potencjału wektorowego
A_{nk}	ciąg stałych całkowania
$\bar{B}$	indukcja magnetyczna
$\bar{B}_r$, $\bar{B}_z$	składowe indukcji magnetycznej
B_w	wartość średnia indukcji pomiarowej
B_{nk}	ciąg stałych całkowania
C,D	stałe całkowania w metodzie całki Fouriera dla nagrzewania od wewnątrz
C_n,D_n	stałe całkowania w metodzie szeregu Fouriera dla nagrzewania od wewnątrz
C',D'	stałe całkowania w metodzie całki Fouriera dla nagrzewania od zewnątrz
C'_n,D'_n	stałe całkowania w metodzie szeregu Fouriera dla nagrzewania od zewnątrz
$\bar{E}$	natężenie pola elektrycznego
$\bar{H}$	natężenie pola magnetycznego
$\bar{H}_r$,$\bar{H}_z$	składowe natężenia pola magnetycznego
I	prąd wzbudnika
I_o,I_1	zmodyfikowane funkcje Bessela
$\bar{J}$	gęstość prądu przewodzenia
K_o,K_1	zmodyfikowane f. Bessela 2 rodzaju
L	długość 2(l+h)
L'	długość nagrzewanej rury
M_i,N_i	współczynniki w metodzie całki Fouriera odpowiednio dla nagrzewania od wewnątrz i od zewnątrz
M_{ni},N_{ni}	współczynniki w metodzie szeregu Fouriera odpowiednio dla nagrzewania od wewnątrz i od zewnątrz
M'_n,M''_n	współczynniki w metodzie szeregu Fouriera
N,N_1,N_2	liczby zwojów wzbudnika
P_{cz}	gęstość mocy czynnej
R_1,R_2	promienie ustalone
$\bar{S}_r$,$\bar{S}_z$	składowe wektora Poyntinga

$T(t)$	funkcja własna zagadnienia termokinetycznego
U	napięcie
$X'; X_n$ X'_n, X''_n	współczynniki w metodzie szeregu Fouriera
$X(x)$	funkcja własna zagadnienia termokinetycznego
$Y'; Y_n$ Y'_n, Y''_n	współczynniki w metodzie szeregu Fouriera
$Z(z)$	funkcja własna zagadnienia termokinetycznego
a, b, c, d, e	promienie układu obliczeniowego w części elektromagnetycznej pracy
a	współczynnik wyrównywania temperatur w części cieplnej pracy
c	średnie ciepło właściwe
$2d$	grubość ścianki rury w części cieplnej pracy
f	częstotliwość prądu
h	odstęp pomiędzy hipotetycznymi wzbudnikami w metodzie szeregu Fouriera
h	współczynnik wymiany ciepła, w części cieplnej pracy
$j = \sqrt{-1}$	jednostka urojona
k, k_n	stałe odpowiednio w metodach całki i szeregu Fouriera
$2l$	długość wzbudnika
$2l'$	odcinek wsadu, na którym moc czynna praktycznie wytłumia się
n	numer kolejny
p, p_n, q_n	stałe odpowiednio w metodach całki i szeregu Fouriera
r	współrzędna w układzie walcowym
t	czas
w	funkcja wydajności źródeł cieplnych
x	współrzędna w układzie prostokątnym
z	współrzędna w układzie prostokątnym lub walcowym
α	współczynnik przejmowania ciepła w części cieplnej pracy
α^2, β^2	współczynniki w części elektromagnetycznej pracy
γ_k, μ_n	stałe (pierwiastki równań trygonometrycznych)
$\varepsilon, \varepsilon_o$	współczynniki przenikalności elektrycznej ośrodka i próżni
$\vartheta, \vartheta, \vartheta_o$	funkcje określające pole temperatury
λ	współczynnik przewodności cieplnej
ξ, ξ_n $\varkappa, \varkappa_k$	wartości własne zagadnienia termokinetycznego
μ, μ_o, μ_r	współczynniki przenikalności magnetycznej ośrodka, próżni oraz przenikalność względna
ρ	gęstość właściwa ciała
σ	konduktywność
φ	współrzędna w układzie walcowym
ψ	potencjał skalarny
ω	pulsacja prądu

9. D O D A T K I

D.1. Założenia upraszczające do p.3

W p.3 pracy poczyniono szereg założeń upraszczających, w wyniku których otrzymano modele obliczeniowe (rys. 3.2, 3.3, 3.4, 3.5). Niżej przeprowadzono dyskusję ich wpływu na dokładność otrzymanych rozwiązań i wyników:

1) Zastąpienie nagrzewanej rury nieskończenie długim modelem. W przypadku nagrzewania miejscowego długość rury jest zawsze dużo większa od długości wzbudnika. Przyjęcie do obliczeń nieskończenie długiej rury jest uzasadnione wtedy, gdy w rzeczywistym układzie rura wystaje poza wzbudnik więcej, niż wynosi zasięg pola (tzn. gdy na tym odcinku indukcja spadnie do kilku procent wartości maksymalnej). W przykładzie (p.5) całkowite wytłumienie pola następowało na odcinku ok. 0,3 m od końca wzbudnika, przy czym długość rury wynosiła 1,5 m, natomiast długość wzbudnika 0,46 m. Tak więc w tym przypadku przyjęcie w obliczeniach rury nieskończenie długiej było dopuszczalne i nie wprowadzało większego błędu.

2) Pominięcie grubości uzwojenia. Grubość uzwojenia można w obliczeniach bezpiecznie pominąć przy dużych, a nawet średnich częstotliwościach prądu. W przypadku częstotliwości małych, należy rzeczywistą średnicę uzwojenia zastąpić tzw. średnicą efektywną, którą uzyskuje się odejmując od średnicy zewnętrznej głębokość wnikania prądu w miedź dla danej częstotliwości. W przykładzie (p.5) postąpiono właśnie w ten sposób, przyjmując do obliczeń średnicę pomniejszoną o ok. 11.

3) Zastąpienie bocznika magnetycznego nieskończenie długim cylindrem o $\mu = \infty$ i $\sigma = 0$ jest uproszczeniem powszechnie stosowanym w literaturze np. [19,34,51,77] (w literaturze podaje się, że już od $\mu_r > 9$ można stosować to uproszczenie). Ze względu na duże szczeliny, jakie z konieczności występują w układach elektrotermicznych, ma ono niewielki wpływ na dokładność obliczeń.

4) Przyjęcie do obliczeń jednorodnego i izotropowego wsadu o niezależnych od temperatury i natężenia pola, stałych materiałowych jest konieczne w przedstawionych w pracy metodach analitycznych. W przypadku wsadów nieferromagnetycznych (dla których wykonywano konkretne obliczenia w p.5) przyjęcie to nie jest źródłem większych błędów, gdyż stałe mate-

riałowe zmieniają się tylko w wąskich zakresach. W przypadku zaś wsadów stalowych nagrzewanych do temperatury Curie należałoby przyjąć model warstwowy tzn. podzielić wsad na warstwy (wzdłuż prostych r=const), a następnie obliczać średnie wartości stałych materiałowych w każdej warstwie z osobna [7].

Reasumując, można stwierdzić, że poczynione dla uzyskania modeli obliczeniowych założenia upraszczające były w rozważanych przypadkach dopuszczalne.

D.2. Ocena i eliminacja współczynników α^2 i β^2 w równaniu (3-8)

Współczynniki α^2 i β^2 występujące w równaniu (3-8), zgodnie np. z[19] mają postać:

$$\alpha^2 = \varepsilon\mu\omega^2; \qquad \beta^2 = \sigma\mu\omega \tag{D-1}$$

W większości zagadnień elektrotermicznych przyjmuje się do obliczeń dla wsadów nieferromagnetycznych następujące wartości parametrów:

$$\varepsilon = \varepsilon_o = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \left[\frac{F}{m}\right]; \qquad \mu = \mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}\left[\frac{H}{m}\right]$$

$$\sigma \approx 10^7 \ (\Omega m)^{-1}; \qquad \omega = 2\pi f, \quad f = 50 \text{ Hz} \div 10^7 \text{Hz}$$

wtedy dla częstotliwości sieciowej współczynniki (D-1) są rzędu:

$$\alpha^2 = 1{,}01 \cdot 10^{-12} \qquad \beta^2 = 3{,}95 \cdot 10^3,$$

natomiast dla częstotliwości wysokiej ($f = 10^7$ Hz)

$$\alpha^2 = 4{,}39 \cdot 10^{-2} \qquad \beta^2 = 7{,}89 \cdot 10^8.$$

W związku z powyższym, dla całego zakresu częstotliwości stosowanych w elektrotermii przemysłowej zachodzi:

$$\alpha^2 \ll \beta 2,$$

co uzasadnia przyjętą w p.p. 3.2.1.1 zależność.

Zgodnie z (3-10) w obszarach powietrznych przyjęto

$$k_n^2 - \alpha^2 = q_n^2 > 0 \tag{D-2}$$

co zezwala na zapisanie równania różniczkowego potencjału, w postaci (3-9), a jego rozwiązań w postaci (3-13). Dla zorientowania się w rzędzie wartości k_n^2 i α^2 dla typowych parametrów występujących w przemysłowym grzejnictwie indukcyjnym, zostaną wykonane obliczenia pomocnicze. W związku z tym należy zauważyć, że wartość współczynnika k_n^2 rośnie wraz z n,

a wartość współczynnika α^2 rośnie wraz z f. Celowym więc jest zbadanie wartości współczynnika q_n^2 dla najmniejszego n (n=1) i największych stosowanych w praktyce częstotliwości ($f = 10^7$ Hz). Wtedy warunek (D-2) można zapisać w postaci:

$$L < \frac{\pi}{\alpha}, \tag{D-3}$$

a dla przyjętej częstotliwości maksymalnej

$$L = \frac{\pi}{2\ 10^{-1}} \approx 14 \text{ m}. \tag{D-4}$$

Wyrażenie (D-4) określa więc minimalną długość nagrzewnicy, dla której jeszcze spełniony będzie warunek (D-2). Z uwagi na to, że budowane w praktyce nagrzewnice są (szczególnie dla dużych częstotliwości) wielokrotnie krótsze, można powiedzieć, że przyjęte w p.p. 3.2.1.1 założenia są uzasadnione.

D.3. Wybrane twierdzenia dla szeregów i całek Fouriera

Przy wykonywaniu warunków brzegowych (3-19), (3-48) oraz warunków dla całek Fouriera z p.p. 3.3 należy stosować odpowiednie twierdzenia dotyczące szeregów i całek Fouriera:

- dla szeregów Fouriera
  1) Tw. Heinego - Cantora [17]
  2) Tw. o różniczkowalności potencjału wektorowego i indukcji (danych szeregami Fouriera). Różniczkowanie szeregu nieskończonego wyraz po wyrazie jest możliwe, gdy szereg ten i szereg pochodnych są jednostajnie zbieżne [17]. Różniczkowanie to nie powoduje żadnych komplikacji, jeśli szereg zostanie ograniczony do skończonej liczby wyrazów.
  3) Tw. o przejściu granicznym pod znakiem szeregu

$$\lim_{r \to r_o} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r) \cos k_n z = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{r \to r_o} A_n(r) \cos k_n z,$$

  co jest słuszne dla szeregów jednostajnie zbieżnych [17].
- dla całek Fouriera
  1) Jeżeli dla dwóch całek Fouriera zachodzi

$$\int_0^{\infty} f_1(k_1 R) \cos kz \, dk = \int_0^{\infty} f_2(k_1 R) \cos kz \, dk$$

  dla pewnego ustalonego R i każdego z, to

$$f_1(k,R) = f_2(k,R)$$

  np. [4,8,17].
  2) Twierdzenia o różniczkowalności i przejściu granicznym pod znakiem całki Fouriera są analogiczne jak w przypadku szeregów Fouriera [17].

D.4. Wzory dla nieskończenie długich układów wzbudnik - rura

W dodatku tym podano wzory stosowane w pracy do obliczeń porównawczych (zgodnie z [82]), odpowiednio przekształcone.

- Nagrzewanie rur od wewnątrz:

$$B_{2z}(r,t) = \frac{NI\mu_o}{2\,l}\sqrt{\frac{c}{r}}\;\frac{sh\left[(1+j)\frac{d-r}{\Delta}\right]}{sh\left[(1+j)\frac{d-c}{\Delta}\right]}\;e^{j\omega t} \tag{D-5}$$

$$A_{2\varphi}(r,t) = -\frac{NI}{l\omega\sigma\Delta(1+j)}\sqrt{\frac{c}{r}}\;\frac{ch\left[(1+j)\frac{d-r}{\Delta}\right]}{sh\left[(1+j)\frac{d-c}{\Delta}\right]}\;e^{j\omega t} \tag{D-6}$$

- Nagrzewanie rur od zewnątrz:

$$B_{2z}(r,t) = \frac{NI\mu_o}{2\,l}\sqrt{\frac{c}{r}}\;\frac{\frac{(1-j)\Delta}{d}\,ch\left[(1+j)\frac{d-r}{\Delta}\right] - sh\left[(1+j)\frac{d-r}{\Delta}\right]}{\frac{(1-j)}{d}\,ch\left[(1+j)\frac{c-d}{\Delta}\right] + sh\left[(1+j)\frac{c-d}{\Delta}\right]}\;e^{j\omega t} \tag{D-7}$$

$$A_{2\varphi}(r,t) = -\frac{NI}{l\omega\sigma(1+j)}\sqrt{\frac{c}{r}}\;\frac{\frac{(1-j)}{d}\,sh\left[(1+j)\frac{c-r}{\Delta}\right] - ch\left[(1+j)\frac{d-r}{\Delta}\right]}{\frac{(1-j)}{d}\,ch\left[(1+j)\frac{c-d}{\Delta}\right] + sh\left[(1+j)\frac{c-d}{\Delta}\right]}\;e^{j\omega} \tag{D-8}$$

gdzie:

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\,\mu_o\sigma}}$$

D.5. Obliczenie średniej wartości współczynnika α

Wartość średnią współczynnika oddawania ciepła przez nagrzewaną rurę, łącznie przez konwekcję i promieniowanie obliczono zgodnie z [46,86]. Do obliczeń przyjęto takie dane (temperaturę rury, powietrza, stałe materiałowe), jakie występowały w trakcie pomiaru temperatury:

- Oddawanie ciepła przez konwekcję przez zewnętrzną powierzchnię rury (α_{kz}).

$$\alpha_{kz} = 0{,}135\,\frac{\lambda_p}{2d}(P_r G_r)^{\frac{1}{3}} = 18{,}29\left[\frac{W}{m^2\,{}^oC}\right] \tag{D-9}$$

gdzie

λ_p - przewodność cieplna powietrza,

P_r, G_r - liczby Prandtla i Grasshoffa.

- Oddanie ciepła przez promieniowanie przez zewnętrzną powierzchnię rury (α_{pz})

$$\alpha_{pz} = 0{,}0498\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^2 + \left(\frac{T_2}{100}\right)^2\right]\left[\frac{T_1}{100} + \frac{T_2}{100}\right] = 11{,}8\left[\frac{W}{m^2\,{}^oC}\right] \tag{D-10}$$

gdzie:

ε - emisyjność rury

T_1, T_2 - temperatury otoczenia i rury.

- Oddawanie ciepła przez konwekcję przez wewnętrzną powierzchnię rury (α_{kw})

$$\alpha_{kw} = \frac{0,22\,\lambda_p}{c - b}\left[P_r G_r \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^3\right]^{\frac{1}{4}} = 50,9\left[\frac{W}{m^2\,{}^oC}\right] \qquad (D-11)$$

gdzie:

$\frac{L_1}{L_2}$ - stosunek długości drogi strumienia konwekcyjnego od dolnego brzegu rury aż do wzbudnika (L_1), do wysokości tej drogi (L_2).

- Oddawanie ciepła przez promieniowanie przez wewnętrzną powierzchnię rury (α_{pw}), zgodnie z (D-10)

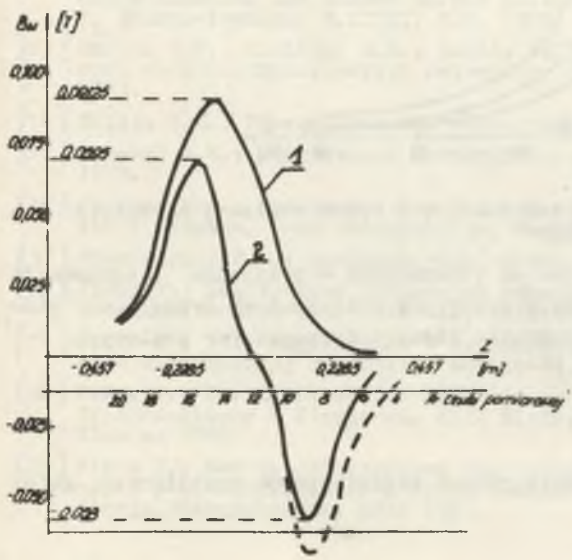
$$\alpha_{pw} = 16,39\left[\frac{W}{m^2\,{}^oC}\right].$$

- Średnia wartość przyjęta do obliczeń (α):

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[\alpha_{kz} + \alpha_{pz} + \alpha_{kw} + \alpha_{pw}\right] = 48,7\left[\frac{W}{m^2\,{}^oC}\right]. \qquad (D-12)$$

D.6. Pomiarowe rozkłady indukcji i temperatury nie posiadające swych odpowiedników obliczeniowych

D.6.1. Rozkłady indukcji



Rys. D.1. Pomierzone średnie wartości indukcji w rurze przy nagrzewaniu od wewnątrz

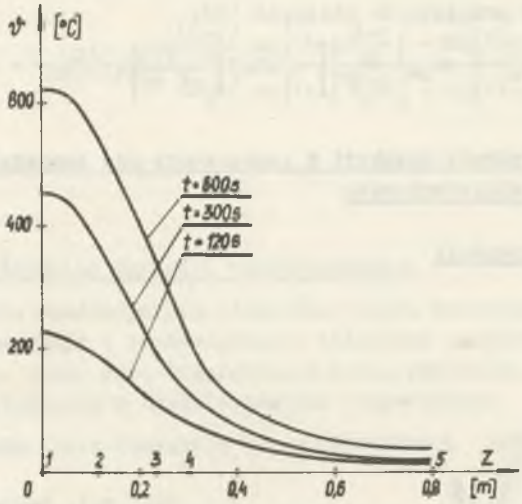
1 - dla wzbudnika krótkiego
2 - dla wzbudnika składającego się z dwóch cewek z prądami skierowanymi przeciwnie.
Krzywa kreskowana stanowi odbicie zwierciadlane gałęzi lewej ($z<0$)

Na prototypie doświadczalnym indukcyjnej nagrzewnicy wewnętrznej do końców rur wykonano jeszcze pomiary indukcji przy innych konfiguracjach wzbudnika (rys. D.1), tzn. dla wzbudnika krótkiego (2 l = 0,2285 m) oraz dla wzbudnika składającego się z dwóch cewek, w których płyną prądy w przeciwnych kierunkach (2 l = 0,457 m).

Na podstawie porównania rozkładów indukcji dla wzbudnika krótkiego (krzywa 1 na rys. D.1) i dla wzbudnika długiego (rys. 5.23) można stwierdzić, że kształty indukcyji w obu przypadkach są zbliżone, ale wartość indukcji maksymalnej maleje wraz ze zmniejszaniem długości wzbudnika. Obie krzywe na rys. D.1 uwidaczniają wyraźny wpływ asymetrii rdzenia magnetycznego (rdzeń wystaje poza wzbudnik tylko z lewej strony - vide rys. 5.23) na wartość i kształt indukcji.

D.6.2. Rozkłady temperatury

W układzie pomiarowym jak na rys. 5.25 wykonano również pomiary temperatury przy nagrzewaniu wewnętrznym niemagnetycznych rur stalowych 1H18N9[x]. Wyniki przedstawia rys. D.2.



Rys. D.2. Pomierzone rozkłady temperatury w rurze stalowej w trakcie nagrzewania indukcyjnego

Krzywe na rys. D.2 są podobne do otrzymanych w przypadku nagrzewania rur aluminiowych. Przedstawiony w pracy tok obliczeniowy (vide p.6) stosuje się w pełni także do nagrzewania niemagnetycznych rur stalowych.

x) Pomiary temperatury w stalowych rurach magnetycznych opublikował autor wcześniej w [26].

10. LITERATURA

[1] Altgauzen A.P.: Elektrotiermiczeskoje oborudowanie. I-wo Energija, Moskwa 1967.

[2] Angot A.: A l'usage des ingenieurs de l'elektrotechnique et des telecommunications. Tłum. ros., Moskwa 1967.

[3] Antoniewicz J.: Tablice funkcji dla inżynierów. PWN, Warszawa 1969.

[4] Aramanowicz J.G., Lewin W.I.: Urawnienija matiematiczieskcj fiziki. I-wo Nauka, Moskwa 1964.

[5] Baker R.M.: Design and calculation of induction-heating coils. 1957.

[6] Bodażkow W.A.: Indukcjonnyj nagriew trub. I-wo, Maszinostrojenie.Leningrad 1969.

[7] Bogdanow W.N., Ryskin S.E., Szamow A.N.: Indukcjonnyj nagriew w kuzniecznom proizwodstwie. I-wo Maszgiz, Moskwa 1956.

[8] Bracewall R.: Przekształcenie Fouriera i jego zastosowanie. PWN,Warszawa 1965.

[9] Brokmeier H.: Induktives Schmelzen. BBC Brown Boveri, Essen 1966.

[10] Bronstein I.N., Semendajew K.A.: Taschenbuch der Mathematik. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1963,

[11] Brühl F., Mueler H.: Beeinflussung der Temperaturverteilung bei der induktiven Waermebehandlung von Hochdruckrohreleitungen aus warmfesten Stählen. Schweissen und Schneiden, H.1, 1972.

[12] Buchholtz S.H.: Das Magnetfeld der Wirbelströme in einem elektrischen Induktionsofen und andere daraus ableitbare Wirbelstromfelder.Archiv f. Elektrotechnik. B.XLIII, H.6, 1958.

[13] Cholin W.N., Cicikjan G.N.: Analiz osiesimetriczeskich polej niekotorych elektrotermiczieskich ustrojstw. Energietika i Transport, nr 3, 1973.

[14] Collin R.E.: Prowadzenie fal elektromagnetycznych, PWN,Warszawa 1966.

[15] Donskoj A.W.: Nagrzewanie indukcyjne i pojemnościowe. WNT, Warszawa 1970.

[16] Farbman S.A., Kolobnew I.F.: Indukcjonnyje pieczi dla pławki mietałłow i spławow. I-wo Metałłurgija, Moskwa 1968.

[17] Fichtenholz G.M.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN,Warszawa 1966.

[18] Fikus F.: Nagrzewnica indukcyjna częstotliwości sieciowej. III Krajowa Konferencja Elektrotermii, Gliwice 1965.

[19] Fikus F.: Pole magnetyczne w cylindrycznych nagrzewnicach indukcyjnych o skończonej długości. Hutnictwo, z. 4 1974.

[20] Fikus F.: Der Einfluss der Magnetjoche auf die Leistung beim Querfeldinduktions - Klappofen. XIII Międzynarodowe Kolokwium Naukowe, Ilmenau 1968.

[21] Fikus F.: Metoda obliczeniowa dla cylindrycznej nagrzewnicy indukcyjnej z polem poprzecznym i przeprowadzone pomiary. IV Krajowa Konferencja Elektrotermii, Łódź 1969.

[22] Fikus F.: Wpływ ekranu magnetycznego na moc nagrzewnicy indukcyjnej z polem poprzecznym. Przegląd Elektrotechniczny, nr 2 1969.

[23] Fikus F.: Równania ogólne na indukcję i moc cylindrycznej nagrzewnicy indukcyjnej o polu poprzecznym. Archiwum Elektrotechniki, z. 1, 1970.

[24] Fikus F.: Indukcyjna nagrzewnica trzpieniowa do końców rur. Sesja Naukowa Dnia Hutnika Politechniki Śląskiej, Katowice 1971.

[25] Fikus F.: Uproszczone obliczanie otwieralnej cylindrycznej nagrzewnicy indukcyjnej dla dużych wałów korbowych. Sesja naukowa Dnia Hutnika Politechniki Śląskiej, Katowice 1972.

[26] Fikus F.: Induktionserwaermung mit einem Innenfeldinduktor für Netzfrequenz. VII Międzynarodowa Konferencja Elektrotermii, Warszawa 1972.

[27] Fikus F.; Gudra P.: Magnetfeldberechnung für Induktionserwaermer mit einem Innen-Induktor. I Krajowa Bułgarska Konferencja Elektrotermii, Sofia 1972.

[28] Fikus F., Wieczorek T.W.: Parametry elektryczne układu wsad-wzbudnik cylindrycznej nagrzewnicy zewnętrznej. Archiwum Elektrotechniki, t.XXIV, z.4 1975.

[29] Fikus F., Wieczorek T.W.: Rozkład gęstości prądu indukowanego wzdłuż wysokości kanału roboczego dozownika elektrodynamicznego. Archiwum Elektrotechniki (w druku).

[30] Fikus F., Wieczorek T.W.: Obliczanie parametrów elektrycznych wzbudnika cylindrycznej nagrzewnicy zewnętrznej z bocznikiem magnetycznym. Hutnictwo, z. 7 1975.

[31] Fikus F., Michałowski M., Klimek J.: Grzewcze piece płomienno-indukcyjne. Hutnik, z.1 1973.

[32] Fluerescu C., Galan N.: Eddy currents and the power converted into heat inside a very long cylindrical conductor placed in an a.c. circural coil of finite length. Rev.Rouv.Sci.Techn.-Elektrotechn.-Energ, nr 2, Bucarest 1966.

[33] Głuchanow N.P.: Elektromagnitnyje processy w płastinach i cilindrach pri wysokich czastotach. Trudy WNIITWCZ, wyp. 1-2, Leningrad 1960.

[34] Głuchanow N.P.: Elektromagnitnoje pole w prowodiasczej trubie pomieszczenoj w pietlewyj induktor. Trudy WNIITWCZ, wyp. 3, Leningrad 1961.

[35] Guz E., Kącki E.: Pola temperatury w ciałach stałych. PWN, Warszawa 1967.

[36] Jeffreys H., Swirles B.: Methods of mathematical physics. Tłum. ros., Moskwa 1970.

[37] Kamke E.: Sprawocznik po obyknowiennym differencjalnym urawnieniam. Moskwa 1961.

[38] Kącki E.: Termokinetyka. WNT, Warszawa 1967.

[39] Korfel M.: Podział stali na grupy technologiczne przy nagrzewaniu i chłodzeniu. Wiadomości Hutnicze, nr 12 1974.

[40] Komarow I.S., Niemkow W.S., Pawłow N.A.: Zonalnyj indukcjonnyh nagriew tonkostiennych trub. Elektrotermija, wyp. 5 (141) 1974.

[41] Korniejew W.G.: Wwiedienije w teoriu besslewych funkcij. Moskwa 1971.

[42] Krakowski M., Szymański G.: Eddy current losses in a cylindrical ferromagnetic core due to a.c.in coaxial coils of small length. Archiwum Elektrotechniki, t. XXIV, z. 1 1975.

[43] Krumin J.K.: Wzaimodiejstwie bieguszczego magnitnogo pola s prowadieszczej sredoj. Riga 1969.

[44] Krzyżański M.: Równania liniowe o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu. Kraków 1952.

[45] Kupalan S.D.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1967.

[46] Kutalieladze S.S., Boriszanskij W.M.: Sprawocznik po tiepłopienieda-czie. I-wo Energija, Leningrad-Moskwa 1958.

[47] Mc Lachlan N.W.: Funkcje Bessela dla inżynierów. PWN, Warszawa 1964.

[48] Lammeraner J., Sztafl M.: Wichrewyje toki. I-wo Energija,Moskwa 1967.

[49] Langer E.: Teorie indukcniho a dielektrického tepla. N-vi Ceskoslov. Akademie Ved., Praha 1964.

[50] Langer E.; Der Einfluss der Abschirmung auf den Wirkungsgrad eines Induktionsschmelz-ofens. Wissenschaftliche Zeitschrif Ilmenau, H.4, 1963.

[51] Lavers J.D., Biringer P.P.: An analysis of the corless induction furnace: axial distribution of electric and magnetic fields.Elektrowarme International 4, 1971.

[52] Lebiediew N.N.: Specjalnyje funkcji i ich priłożenija. I-wo F.M, Moskwa 1963.

[53] Lewicz W.G.: Kurs tieoreticzeskoj fiziki. Moskwa 1969.

[54] Liwiński W.: Nagrzewanie indukcyjne skrośne. WNT, Warszawa 1968.

[55] Lupi S., Morini A.: Induction heating of cylindrical rods using mulfiple coils. Elektrowaerme International 29, nr 12 1971.

[56] Lupi S.; Morini A.: Industrial frequency heating of hollow rotating cylinders by means of internal inductors. UIE VII, Warszawa 1972.

[57] Łozinskij M.G.: Promyszlennyje primienienije indukcjonnogo nagriewa. I-wo AN SSSR, Moskwa 1958.

[58] Łykow A.W.: Teoria tiepłoprowodnosti. I-wo Wyższaja Szkoła, Moskwa 1967.

[59] Machmudow K.M., Słuchocki A.E.: Rasçzet elektriczeskich parametrow cilindriczeskich induktorow proizwolnoj dliny. Trudy WNIITWCZ,wyp.10 1969.

[60] Machmudow K.M., Słuchacki A.E.: Rasczet elektriczeskich parametrow clindriczeskich induktorow metodom nawiediennych EDS. Trudy WNIITWCZ, wyp.11 1970.

[61] Moon P., Spencer D.E.: Teoria pola. PWN, Warszawa 1966.

[62] Niemkow W.S., Słuchocki A.E.: Raszcet parametrow korotkich induktorow s pomoszczju. schemzamieszczanija. Trudy WNIITWCZ, wyp.11 1970.

[63] Ostendorf H.: Praktische Annwendung der Induktionsheizing.Maschinenmarkt, nr 23, 1973.

[64] Papas Ch.H.: Teoria rasprostranienija elektromagnitnych wołn. Erewań 1974.

[65] Paszek W., Fikus F.: Podstawowe i wyższe harmoniczne pola magnetycznego we wzbudniku cylindrycznym o polu poprzecznym nagrzewnicy indukcyjnej. Elektryka, z. 24, 1969.

[66] Paszek W., Fikus F.: Wpływ rozkładu prądu na moc w cylindrycznej nagrzewnicy indukcyjnej o polu poprzecznym. Elektryka, z. 29 1971.

[67] Paszek W., Fikus F.: Zastosowanie nagrzewania indukcyjnego przy produkcji dużych wałów korbowych. Hutnik, z. 7-8 1970.

[68] Reichert K.: Ein numerisches Verfahren zur Berechnung magnetischer Felder. Archiv.f.Elektrotechnik, B.52, H.3 1968.

[69] Reichert K.: Die numerische Berechnung der elektromagnetisch verursachten Strömung in Induktionstigelöfen. Scientia Electrica, V.XVI, Fasc.4 1970.

[70] Reichert K.: Ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Anordnungen zur induktiven Erwämung. Elektrowärme International, B.26, nr 4 1968.

[71] Rodigin N.M.: Indukcjonnyj nagriew stalnych izdielej.Metałłurgizdat, Moskwa 1950.

[72] Rüppel R.: Induktives Rohrschweissen mit Hochfrequenz Elektrowärme Int., B.22, nr 10 1964.

[73] Ryżyk I.M., Gradsztajn I.S.: Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów. PWN, Warszawa 1964.

[74] Schwartz T.: Termokinetyka układów elektrotermicznych. WNT, Warszawa 1966.

[75] Simpson P.G.: Grzanie indukcyjne. WNT, Warszawa 1964.

[76] Słuchocki A.E.: Priblizennyj rasczet priwiediennych parametrów zagruzki korotkich induktorow. Trudy WNIIWTCZ, wyp.6 1965.

[77] Słuchocki A.E., Ryskin S.E.: Induktory dla indukcjonnogo nagriewa. Leningrad 1974.

[78] Snythe W.R.: Static and dynamic electricity. Tłum. ros., Moskwa 1974.

[79] Sosinow J.I. i in.: Rasczet tiermiczeskich naprażenij pri indukcjonnom nagriewie cilindriczeskich zagotowok. Elektrotermija, wyp.106, Moskwa 1971.

[80] Tichonow A.W., Samarski A.A.: Urawnienija matiematiczeskoj fiziki. I-wo Nauka, Moskwa 1966.

[81] Tozoni O.W.: Rasczet elektromagnitnych polej na wyczislitielnych maszinach. I-wo Technika, Kijew 1967.

[82] Wajnberg A.M.: Indukcjonnyje pławilnyje pieczi. I-wo Energija, Moskwa 1967.

[83] Walter F.: Die Grundlagen der elektrischen Ofen-Heizung. Geest und Portig, Leipzig 1950.

[84] Zimin N.W.: Osobiennosti raspriedielenija tiempieratur pri indukcjonnom nagriewie pod otpusk obsadnych trud. Trudy WNIITWCZ, wyp.6 1965.

[85] Poradnik: Nagrzewanie indukcyjne i pojemnościowe. WNT, Warszawa 1969.

[86] Poradnik: Sprawocznik konstruktora pieczej prokatnogo proizwodstwa. Moskwa 1960.

[87] Poradnik: Kratkij sprawocznik prokatnika. Moskwa 1955.

ЛОКАЛЬНЫЙ ИНДУКЦИОННЫЙ НАГРЕВ ТРУБ В ПРОЦЕССАХ ТЕРМООБРАБОТКИ

Р е з ю м е

Применения методов индукционного нагрева в процессах термообработки. Анализ литературы в отношении к подсчету электромагнитных и температурных полей, особенно учитывая подсчёт систем труба индуктор.

Характеристика основных уравнений электромагнитного поля а также подсчётных методов и ряда Фурье. Подсчёт с помощью методов интеграла и ряда Фурье векторного потенциала, напряженности электрического поля, плотности тока, индукции и напряженности магнитного поля, вектора Пойнтинга, плотности активной мощности и $\cos\varphi$, при индукционном нагреве труб из внутри и снаружи. Оценка влияния магнитных стержней на величину индукции в рассматриваемых системах нагрева. Введение упрощенных формул для векторного потенциала и магнитной индукции. Представление методики подсчёта электрического и магнитного поля при нагреве многосекторными индукторами. Математический анализ температурного поля: характеристика модели и подсчётного метода, подсчёт распада температуры при индукционном нагреве труб большого радиуса. Подсчёт поля температуры при постоянном распаде мощности и подготовка основы для подсчётов многосекционных индукторов.

Примеры примененных методов подсчёта: нагрев труб из внутри и снаружи. Строение и параметры прототипа нагревательной установки к концам труб. Итоги напряженности электрического поля, плотности тока, магнитной индукции, вектора Пойнтинга, плотности активной мощности при нагреве труб из внутри и снаружи. Примеры при нагреве индукторами разной длины а также для разных размеров магнитных цепей. Итого подсчётов распада температуры в загрузке. Измерение индукции и температуры а также сравнение измерительных и подсчётных итогов. Обсуждение промышленных испытаний и перспектив применения индукционного нагрева концов труб. Общая схема хода в случае выполнения технических подсчётов.

S u m m a r y

The application of induction heating method in plastic working processes. The analysis of literature concerning the calculation of electromagnetic and temperature fields with special regard being put on the calculation of pipe induction coil.

The characteristic of fundamental equation of electromagnetic field and calculation methods of integral and Fourier series. The calculation of vector potential, intensity of electric field, inductive current density, induction and intensity of magnetic field, Poynting vector, active power density as well as cos, during the outside and inside induction heating of pipes. All that done withe the help of integral method and Fourier series. The evaluation of the influence of magnetic core on the value of induction in the heating system under consideration. The introduction of the simplified formulae for the vector potential and magnetic induction. The presentation of the method of electromagnetic field calculation during multizone induction coil heating. The mathematical anylysis of the electromagnetic field: the characteristic of model and calculation method, the calculation of temperature distribution during induction heating of pipes with big radii. The calculation of temperature field at constant power distribution as well as preparation of basis for calculation of multizone induction coils.

The examples of application of the presented calculation method: outside and inside heating of pipes. The construction and parameters of the prototypical heater for pipe points. The calculation results of intensity of electric field, induction current density magnetic induction, Poynting vector, active power density during outside and inside heating of pipes. The induction distribution during the heating with induction coils of different lengths as well as for different sizes of the magnetic circuit. The results of temperature distribution in furnace charge. The measurements of induction and temperature as well as the comparison of the measuring and calculating results. The discussion of industrial testings and the perspectives of the application of sinside induction heating of pipe points. The general scheme of carring out of technical calculation.