ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: GÓRNICTWO z. 92 Nr kol. 589

JACEK M.CZAPLICKI
INSTYTUT MECHANIZACJI GÓRNICTWA
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
GLIWICE

MODELE NIEKTÓRYCH STRUMIENI USZKODZEŃ GÓRNICZYCH ODNAWIALNYCH OBIEKTÓW TECHNICZNYCH

W pracy rozważono modele strumieni uszkodzeń w przypadkach, gdy mają one charakter: stacjonarny, pojedynczy i niestacjonarny, pojedynczy oraz zaprezentowano pewien model strumienia niepojedynczego, stacjonarnego.

1. Wstęp

W górnictwie istnieje pewna klasa obiektów technicznych, dla których proces eksploatacji, z niezawodnościowego punktu widzenia, można zidentyfikować jako strumień odnowy - uszkodzeń. Istnieje także obszerna klasa obiektów, dla których strumień może być pierwszym przybliżeniem procesu eksploatacji. Dla tych to klas obiektów technicznych zaistniała potrzeba opracowania takiego zbioru modeli strumieni uszkodzeń, aby z wystarczającą dla praktyki dokładnością można było opisać ogół rzeczywistych strumieni uszkodzeń. Modele takie mogą stanowić podstawę do właściwego sterowania eksploatacją poszczególnych obiektów technicznych - elementów lub systemów.

Celem niniejszej pracy jest zaprezentowanie niektórych rezultatów badań nad konstrukcją modeli strumieni uszkodzeń górniczych odnawialnych obiektów technicznych.

2. Sformułowanie problemu

Rozważania niniejszej pracy dotyczą takiej klasy $\mathcal{C}$ obiektów technicznych, która charakteryzuje się tym, iż każdy obiekt tej klasy podlega dwustanowemu procesowi eksploatacji. Stany te to: praca i uszkodzenie. Uszkodzenie jest rozumiane jako impuls losowy, tzn. długość czasu jego trwania wynosi zoro.

Oznaczmy przez $y(t)$ liczbę uszkodzeń, które pojawiły się w obiekcie od chwili 0 do chwili t. Przyjmijmy, że $y(t) = y(t-o)$. Zatem dla każdej chwili t liczba uszkodzeń, które pojawiły się w chwili t, jest równa różnicy $y(t+o) - y(t-o)$. Funkcja $y(t)$ zmienia swe wartości skokami w chwilach wystąpienia uszkodzeń i w zależności od tego, ile uszkodzeń pojawi się w chwili t, $y(t)$ zmienia swą wartość o odpowiednią liczbę jednostek. Funkcję $y(t)$ nazywać będziemy strumieniem uszkodzeń.

Określenie 1. Niech będzie dany zbiór zdarzeń elementarnych Ω, a także σ-algebra jego mierzalnych podzbiorów $\mathcal{F}_\Omega$. Strumieniem uszkodzeń $y(\mathcal{F})$ z przestrzenią fazową $(\Omega, \mathcal{F})$ nazywać będziemy układ zmiennych losowych $y(G)$ określonych na elementach zbioru $\mathcal{F}$, mających tę własność, że $y(G)$ jest absolutnie addytywną nieujemną funkcją zbioru przyjmującą tylko całkowite wartości.

Wszystkie strumienie uszkodzeń podzielone zostały na cztery klasy, w zależności od własności, jakimi się charakteryzują:
- strumienie stacjonarne pojedyncze; oznaczenie SP,
- strumienie stacjonarne niepojedyncze; SnP,
- strumienie niestacjonarne pojedyncze; nSP,
- strumienie niestacjonarne niepojedyncze; nSnP.

Określenie 2. Jeżeli dla dowolnej grupy ze skończonej liczby niezachodzących na siebie przedziałów czasu, prawdopodobieństwo pojawienia się w nich odpowiednio $k_1, k_2, \ldots, k_n$ uszkodzeń zależy tylko od wymienionych liczb i od długości odpowiednich przedziałów czasu, a nie zależy od ich położenia na osi czasu, to taki strumień nazywamy stacjonarnym.

Określenie 3. Jeżeli w strumieniu prawdopodobieństwo pojawienia się w przedziale czasu o długości h, o dwóch lub więcej uszkodzeniach zmierza do zera, to strumień taki nazywa się strumieniem pojedynczym.

Ponieważ uzyskiwane w wyniku badania teoretycznego modele strumieni uszkodzeń stanowiły dalej podstawę do opracowania metod i sposobów wnioskowania w przyszłość, dlatego też jako model strumienia przyjęto rozkład prawdopodobieństwa pojawienia się w czasie liczby uszkodzeń.

$$P\{Y_t = n\} = P_n(t);\ n = 0,1,\ldots,$$

gdzie: Y_t - zmienna losowa; liczba uszkodzeń w czasie t, i ponadto oprócz funkcji $P_n(t)$ podawano funkcję gęstości czasu pracy obiektu, a dla strumieni niepojedynczych funkcję gęstości liczby uszkodzeń w danej chwili t. Stwarza to możliwości wyboru modelu $P_n(t)$ ogólnie znanymi metodami doboru funkcji rozkładu.

Ze względu na ograniczone ramy niniejszego opracowania przedstawione zostaną tylko niektóre efekty badań w zakresie strumieni SP, nSP oraz pewien model strumienia SnP.

3. Modele strumieni uszkodzeń SP

Spośród ogólnej klasy strumieni uszkodzeń stacjonarnych i pojedynczych rozważono:

- strumienie odnowy /tzw. strumienie typu Palma/,
- złożone strumienie Poissona - Erlanga.

Jak się wydaje, wyżej wymienione klasy strumieni są wystarczające do zastosowań praktycznych.

Rozważmy pierwszą z nich.

Przyjmijmy, że $t_1, t_2, \ldots$ oznaczają kolejne czasy pracy, czasy te są niezależnymi, nieujemnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie F (t).

Określenie 4. Strumieniem odnowy nazywamy ciąg $\{S_n\}$ momentów uszkodzeń, tzn. $S_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$; $i = 1,2, \ldots$

Łatwo zauważyć, że

$$P\{\nu_t \geq n\} = P\{S_n < t\} = F_n(t) \tag{1}$$

Jest to dystrybuanta momentu n-tej odnowy. Zgodnie z definicją jest ona określona następująco

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-x)\,dF(x) \;;\; F_1(x) = F(t). \tag{2}$$

A zatem

$$P_n(t) = F_n(t) - F_{n+1}(t), \tag{3}$$

przy czym $F_0(t) \equiv 1$.

Ponadto

$$f(t) = -P_0'(t). \tag{4}$$

Niestety, n-krotny splot funkcji (2) tylko w nielicznych przypadkach można obliczyć w jawnej postaci. Dlatego omówione zostaną takie strumienie uszkodzeń, dla których wzory na prawdopodobieństwo liczby uszkodzeń w czasie wyrażają się w postaci skończonej bądź nieskończonej, lecz przydatnej do obliczeń praktycznych. Mowa tu o strumieniach o rozkładach czasu pracy klasy gamma i przypadkach szczególnych oraz typu normalnego.

1. Jeżeli rozkład czasu pracy jest rozkładem gamma, tj. gdy

$$f(t) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} \;;\; \alpha, \lambda > 0, \tag{5}$$

to

$$P_n(t) = \frac{\Gamma(n\alpha, \lambda t)}{\Gamma(n)} - \frac{\Gamma(n\alpha+\alpha, \lambda t)}{\Gamma(n\alpha+\alpha)}, \tag{6}$$

gdzie: $\Gamma(x,y)$ - niekompletna funkcja gamma /stablicowana; patrz [7] lub [3]/.

W przypdku szczególnym, gdy $\alpha \in \mathcal{N}$ / $\mathcal{N}$ - zbiór liezb naturalnych/, to

$$P_n(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=n\alpha}^{n\alpha+\alpha-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \tag{6a}$$

W przypadku gdy $\alpha = 1$, to

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \tag{6b}$$

2. Jeżeli rozkład czasu pracy daje się opisać rozkładem normalnym, tj. gdy

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right\}; \; m, \sigma > o, \tag{7}$$

to

$$P_n(t) = \phi\left(a = \frac{t-nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \phi\left(b = \frac{t-nm-m}{\sigma\sqrt{n+1}}\right); \; n \neq o, \tag{8}$$

gdzie: $\phi(x)$ - dystrybuanta standaryzowanego rozkładu normalnego.

Rozkład normalny tylko wówczas może opisywać rozkład czasu pracy obiektu, gdy prawdopodobieństwo pojawienia się wartości niewiększej od zera jest pomijalnie małe. Pomijalność ucięcia należy zweryfikować odpowiednim testem statystycznym [3].

Jeżeli prawdopodobieństwo pojawienia się wartości ujemnych jest pomijalne, wówczas dystrybuanta momentu n-tego uszkodzenia

$$F_n(t) = \phi(a).$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{h=o}^{\infty} \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!!}$$

można rozważyć wzory na $P_n(t)$ w zależności od zakresu zmienności a oraz b, przy czym

$$b = \frac{t-nm-m}{\sigma\sqrt{n+1}} = \frac{t-mn}{\sigma\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \left(1 - \frac{m}{t-mn}\right) = a\,c\,; \; t \neq mn.$$

A zatem

- dla $a < 0$

$$P_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{h=o}^{\infty} \frac{|a|^{2h+1}}{(2h+1)!!} \left(c^{2h+1} e^{-\frac{(ca)^2}{2}} - e^{-\frac{a^2}{2}}\right) \tag{8a}$$

- dla a = o

$$P_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{b^2}{2}} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{|b|^{2h+1}}{(2h+1)!!} \tag{8b}$$

- dla a > o i b< o

$$P_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{a^2}{2}} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{2h+1}}{(2h+1)!!} \left(e^{-\frac{a^2}{2}} + c^{2h+1} e^{-\frac{(ac)^2}{2}} \right) \tag{8c}$$

- dla b > o

$$P_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{2h+1}}{(2h+1)!!} \left(e^{-\frac{a^2}{2}} - c^{2h+1} e^{-\frac{(ac)^2}{2}} \right). \tag{8d}$$

Mimo, że w powyższych wzorach występują szeregi nieskończone, to jak łatwo się przekonać, bardzo szybko zbieżne są do zera i w praktycznych obliczeniach wystarczy uwzględnić na ogół tylko kilka początkowych wyrazów szeregu.

Znakomita większość obiektów technicznych, to zorganizowane zbiory elementów, z których każdy podlega w procesie eksploatacji obiektu strumieniowi uszkodzeń. Wiadomo, że jeżeli liczba elementów obiektu jest bardzo duża $(\to\infty)$, a prawdopodobieństwo uszkodzenia każdego elementu odpowiednio małe, to przy założeniu niezależności uszkodzeń strumień uszkodzeń obiektu, będący superpozycją strumieni jednostkowych /elementów/, dąży do strumienia Poissona. Orzeka o tym twierdzenie Grigelianisa (por. [4]). Na ogół, w przypadku rzeczywistych obiektów o skończonej liczbie elementów, strumienie uszkodzeń albo dają się opisać z założoną dokładnością strumieniem Poissona (6b), albo należy sięgnąć do takiej rodziny strumieni, dla których rozkład czasu pracy ma kształt krzywej wykładniczej, a nie daje się dobrze opisać funkcją ekspotencjalną. Taką rodzinę strumieni otrzymuje się rozpatrując tzw. złożone strumienie Poissona - Erlanga, dla których prawdopodobieństwo warunkowe, że w czasie t pojawi się n uszkodzeń, dane jest wzorem (6a), zaś parametr procesu zmienia się, przybierając wartości ze zbioru liczb rzeczywistych nieujemnych. W ogólnym przypadku można przyjąć, iż $\lambda = \lambda_t$ jest procesem losowym takim, że

$$E\{\lambda_t\} = \bar{\lambda} = \text{const}\ ; \quad \sigma^2\{\lambda_t\} < \infty\ ; \quad \bigwedge_t \lambda_t \in [0,\infty). \tag{9}$$

Ze względu na sposób estymacji, proces λ_t można zdekomponować, przedstawiając np. w postaci addytywnej

$$\lambda_t = \bar{\lambda} + \Xi_t\ ; \tag{10}$$

- gdzie: Ξ_t - stacjonarny proces "czysto" losowy.

Przyjmijmy, że

$$E\{\Xi_t \Xi_{t'}\} = 0 \tag{11}$$

Wówczas λ_t można traktować jako zmienną losową. Zatem prawdopodobieństwo bezwarunkowe pojawienia się n uszkodzeń w czasie t dane jest wzorem

$$P_n(t) = \int \sum_{k=n\alpha}^{n\alpha+\alpha-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \, dF(\lambda) \, . \tag{12}$$

3.1. Jeżeli parametr strumienia (12) ma rozkład gamma

$$f(\lambda) = \frac{r^\beta}{\Gamma(\beta)} \lambda^{\beta-1} e^{-\lambda r} \, ; \; r, \beta > 0, \tag{13}$$

to

$$P_n(t) = \Gamma^{-1}(\beta) \left(\frac{r}{r+\beta}\right)^\beta \sum_{k=n\alpha}^{n\alpha+\alpha-1} \frac{\Gamma(k+\beta)}{k!} \left(\frac{t}{t+r}\right)^k \tag{14}$$

a

$$f(t) = \frac{\beta r^\beta}{(t+r)^{\beta+1}} + \Gamma^{-1}(\beta) \left(\frac{r}{r+\beta}\right)^\beta \sum_{k=1}^{\alpha-1} \frac{\Gamma(k+\beta)}{k!} \frac{t^{k+1}}{(t+r)^{k+1}} (\beta t - rk) \, . \tag{15}$$

Jeżeli $\beta = 1$, to parametr strumienia ma rozkład wykładniczy i wówczas

$$P_n(t) = r \sum_{k=n\alpha}^{n\alpha+\alpha-1} \frac{t^k}{(t+r)^{k+1}} \tag{16}$$

a

$$f(t) = \frac{r}{(t+r)^2} + r \sum_{k=1}^{\alpha-1} \frac{t^{k-1}}{(t+r)^{k+1}} (t - kr) \, . \tag{17}$$

Jeżeli $\alpha = 1$ w strumieniu Erlanga i parametr λ ma rozkład gamma, to

$$P_n(t) = \frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(n+1)} \left(\frac{r}{t+r}\right)^\beta \left(\frac{t}{t+r}\right)^n \; ; \quad f(t) = \frac{\beta r^\beta}{(t+r)^{\beta+1}} \, . \qquad (18), (19)$$

Dla $\beta \in N$ rozkład ten jest rozkładem Pascala.
Jeżeli ponadto $\beta = 1$, to

$$P_n(t) = \frac{r t^n}{(t+r)^{n+1}} \; ; \quad f(t) = \frac{r}{(t+r)^2} \, . \qquad (20), (21)$$

3.2. Jeżeli parametr strumienia (12) ma rozkład normalny ucięty w zerze,

$$f(\lambda) = \phi^{-1}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left\{-\frac{(\lambda-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}; \; \mu, \sigma > 0, \tag{22}$$

to

$$P_n(t) = \Phi^{-1}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) e^{-\mu t+\frac{(t\sigma)^2}{2}} \sum_{k=n\alpha}^{n\alpha+\alpha-1} \frac{t^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\mu-\sigma^2 t)^i \sigma^{k-i} J_{k-i}, \tag{23}$$

gdzie:

$$J_k = \left(\frac{t\sigma^2-\mu}{\sigma}\right)^{k-1} \varphi\left(\frac{\mu-t\sigma^2}{\sigma}\right) + (n-1) J_{k-2} \; ; \; J_o = \Phi\left(\frac{\mu-t\sigma^2}{\sigma}\right) ; \; \varphi(x) = \Phi'(x),$$

a

$$f(t) = \Phi^{-1}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) e^{-\mu t+\frac{(t\sigma)^2}{2}} \Big\{ (\mu-t\sigma^2) J_o - J_o' - t\sigma J_1' + \sum_{k=1}^{\alpha-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \left[(\mu-t\sigma^2)\frac{t}{k} - 1\right] \cdot$$

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\mu-t\sigma^2)^i \sigma^{k-i} J_{k-i} + \sum_{k=1}^{\alpha-1} \frac{t^k}{k!} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (\mu-t\sigma^2)^{i-1} \sigma^{k-1} \Big[\sigma^2 i J_{k-i} - \tag{24}$$

$$- (\mu-t\sigma^2) J_{k-i}' \Big]\Big\} .$$

Jeżeli $\alpha = 1$, to

$$P_n(t) = \Phi^{-1}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \frac{t^n}{n!} e^{-\mu t+\frac{(t\sigma)^2}{2}} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\mu-t\sigma^2)^i \sigma^{n-i} J_{n-i} \tag{25}$$

a

$$f(t) = (\mu - t\sigma^2) e^{-\mu t+\frac{(t\sigma)^2}{2}} \Phi^{-1}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) J_o \left[1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(\mu + \sigma\frac{\varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}\right)\right]. \tag{26}$$

3.3. Jeżeli parametr strumienia (12) ma rozkład skokowy postaci

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^{v} p_i \, \delta(\lambda - w_i) \; ; \; \sum_{i=1}^{v} p_i = 1, \tag{27}$$

gdzie: $\delta(x)$ - funkcja impulsowa [6], to

$$P_n(t) = \sum_{i=1}^{v} p_i e^{-w_i t} \sum_{k=n\alpha}^{n\alpha+\alpha-1} \frac{(w_i t)^k}{k!} \; ; \; f(t) = \sum_{i=1}^{v} p_i w_i e^{-w_i t} \frac{(w_i t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}$$

(28),(29)

Dla $\alpha = 1$ mamy

$$P_n(t) = \sum_{i=1}^{v} p_i e^{-w_i t} \frac{(w_i t)^n}{n!} \; ; \; f(t) = \sum_{i=1}^{v} p_i w_i e^{-w_i t} \qquad (30),(31)$$

3.4. Jeżeli parametr strumienia (12) ma rozkład jednostajny w przedziale [c,d] (por. zasada brakujących racji Laplace'a [1]):

$$f(\lambda) = (d - c)^{-1} \; ; \; d > c \geq 0, \tag{32}$$

to

$$P_n(t) = (d-c)^{-1} \sum_{k=n\alpha}^{n\alpha+\alpha-1} \sum_{h=0}^{k} \frac{t^{h-1}}{h!} \left(c^h e^{-tc} - d^h e^{-td}\right); \quad t \neq 0 \tag{33}$$

$$f(t) = (d-c)^{-1} \sum_{k=0}^{\alpha-1} \sum_{h=0}^{k} \frac{t^{h-2}}{h!} \left[(1+tc-h) c^h e^{-tc} - (1+td-h) d^h e^{-td}\right] \tag{34}$$

Dla $\alpha = 1$ mamy

$$P_n(t) = (d-c)^{-1} \sum_{h=0}^{m} \frac{t^{h-1}}{h!} \left(c^h e^{-tc} - d^h e^{-td}\right) \tag{35}$$

a

$$f(t) = (d-c)^{-1} t^{-2} \left[(1+ct) e^{-tc} - (1+dt) e^{-td}\right]. \tag{36}$$

Na marginesie rozważań dotyczących złożonych strumieni Poissona, gdzie parametr procesu jest zmienną losową, warto zauważyć, że funkcja niezawodności obiektu odnawialnego $P_0(t)$ jest transformatą Laplace'a funkcji gęstości czasu pracy $f(t)$.

4. Modele strumieni uszkodzeń nSP

Znakomita większość obiektów technicznych - w tym także górniczych - to jak to już zostało stwierdzone, zorganizowane zbiory elementów. W obiektach takich, w momencie rozpoczęcia eksploatacji, rozpoczyna się na ogół okres docierania się elementów składowych. W okresie tym, w obiekcie zachodzą określone ukierunkowane zmiany i obiekt jak gdyby adoptuje się do narzuconych mu warunków i sposobu eksploatacji. Okres ten dość często charakteryzuje się wzrastającym średnim czasem trwania pracy. Niestacjonarny przebieg strumienia uszkodzeń można także zaobserwować w wieloelementowych obiektach odnawialnych, dla których proces odnowy niecałkowicie usuwa skutki uszkodzeń i wówczas, np. po okresie "ustabilizowanego" zużycia, następuje okres zużycia katastroficznego. Okres ten charakteryzuje się malejącym średnim czasem trwania pracy. Istnieją także takie górnicze obiekty techniczne, których strumień uszkoszeń ma prawie, że w całym przebiegu życia obiektu, charakter niestacjonarny.

Zauważmy, że ponieważ strumień jest niestacjonarny, więc prawdopodobieństwo pojawienia się n uszkodzeń w przedziale czasu o długości t zależy nie tylko od t, ale i od chwili t_0, która jest początkiem tego przedziału. Spośród ogólnej klasy strumieni uszkodzeń nSP rozważmy taką rodzinę strumieni, dla których prawdopodobieństwo pojawienia się n uszkodzeń w przedziale czasu (t_0, t) ; $t > t_0$ można wyrazić wzorem

$$P_n(t_0, t) = \frac{1}{n!} \left(\int_{t_0}^{t} \lambda(z)\, dz\right)^n \exp\left(- \int_{t_0}^{t} \lambda(z)\, dz\right), \tag{37}$$

przy czym nieujemny parametr strumienia $\lambda(t) \neq$ const.

Łatwo zauważyć, że

$$\int_{t_o}^{t} \lambda(z)\, dz = \Lambda(t_o,t) \tag{38}$$

jest wartością oczekiwaną liczby uszkodzeń w przedziale czasu (t_o,t). Funkcja gęstości czasu pracy jest zmienna z czasem i dana jest wzorem

$$f(t_o,t) = \lambda(t_o,t) \exp\left[-\Lambda(t_o,t)\right] \tag{39}$$

W przypadku różnych postaci funkcji $\lambda(t)$ otrzymuje się różne modele kształtowania się liczby uszkodzeń w czasie. Jak się wydaje, najszersze zastosowanie w górniczej praktyce inżynierskiej mogą znaleźć następujące klasy funkcji $\lambda(t)$.

4. Model ogólny addytywny

$$\lambda(t) = M(t) + S(t), \tag{40}$$

gdzie: $M(t)$ - składowa systematyczna,
$S(t)$ - składowa cykliczna.

Model multiplikatywny obu składowych nie wydaje się godny zalecenia z uwagi na skomplikowaną postać funkcji wartości oczekiwanej $\Lambda(t_o,t)$.

Przypadki szczególne.

Modele przyczynowo - skutkowe i symptomatyczne.

4.1. Klasyczny model liniowy; $S(t) \equiv 0$

$$M(t) = \sum_{i=0}^{q} \alpha_i X_i(t)\ ;\quad X_o \equiv 1, \tag{41}$$

gdzie: α_i - parametry strukturalne funkcji $M(t)$,
X_i - zmienne objaśniające /np. liczba ton wydobytego bądź przetransportowanego urobku, typ obiektu, parametry techniczne obiektu itp/.

4.2. Klasyczny model multiplikatywny; $S(t) \equiv 0$

$$M(t) = \alpha_o \prod_{i=1}^{q} \left[X_i(t)\right]^{\alpha_i}. \tag{42}$$

Modele tendencji rozwojowej.

4.3. Funkcja potęgowa

$$\lambda(t) = \alpha t^{\beta} + \gamma\ ;\quad \alpha,\beta > 0\ ;\quad \beta \neq 1\ ;\quad \gamma \geq 0 \tag{43}$$

$$\Lambda(t_o,t) = \frac{\alpha}{\beta+1} t^{\beta+1} + \gamma t - \left(\frac{\alpha}{\beta+1} t_o^{\beta+1} + \gamma t_o\right) \tag{44}$$

4.4. Funkcja hiperboliczna

$$\lambda(t) = \frac{\alpha}{\beta+t} + \gamma\ ;\quad \alpha,\beta > 0\ ;\quad \gamma \geq 0 \tag{45}$$

$$\Lambda(t_0,t) = \alpha \ln(\beta+t) + \gamma t - [\alpha \ln(\beta+t_0) + \gamma t_0] \tag{46}$$

4.5. Funkcja wymierna

$$\lambda(t) = \frac{\alpha t}{\beta+t} + \gamma ; \quad \alpha,\beta > 0 ; \quad \gamma \geq 0 \tag{47}$$

$$\Lambda(t_0,t) = (\alpha+\gamma) t - \alpha\beta \ln(t+\beta) - [(\alpha+\gamma) t_0 - \alpha\beta \ln(t_0+\beta)] \tag{48}$$

4.6. Funkcja wykładnicza

$$\lambda(t) = \alpha\beta^t + \gamma ; \quad \alpha,\beta > 0 ; \quad \gamma \geq 0 \tag{49}$$

$$\Lambda(t_0,t) = \frac{\alpha}{\ln\beta}\beta^t + \gamma t - \left(\frac{\alpha}{\ln\beta}\beta^{t_0} + \gamma t_0\right) \tag{50}$$

4.7. Model cykliczny

$$\lambda(t) = \alpha \sin^r(\beta t + \gamma) ; \quad \beta,\gamma \in \mathcal{R} ; \beta \neq 0; \alpha > 0; r \in 2k ; k \in \mathcal{R} \tag{51}$$

$\mathcal{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych

$$\Lambda(t_0,t) = S_r(t_0,t) = \frac{-1}{r\beta}[\sin^{r-1}(\beta t+\gamma)\cos(\beta t+\gamma) - \sin^{r-1}(\beta t_0+\gamma)\cos(\beta t_0+\gamma)] + \frac{r-1}{r} S_{r-2}(t_0,t) \tag{52}$$

4.8. Model liniowy z losowymi parametrami strukturalnymi ; $S(t) \equiv 0$

$$M(t) = \sum_{i=0}^{q} \alpha_i X_i(t) ; \quad X_0 \equiv 1 ; \quad dF(\alpha_i) \tag{53}$$

$$\Lambda(t_0,t) = \int_{t_0}^{t} M(t)\,dt = \sum_{i=0}^{q} \alpha_i \int_{t_0}^{t} X_i(u)\,du = \sum_{i=0}^{q} \alpha_i U_i \tag{54}$$

Zauważmy, że w tym przypadku nie wystarczą wzory (39) ÷ (41), albowiem

$$P_n(t_0,t) = \int_{A_0} \cdots \int_{A_q} \frac{1}{n!}[\Lambda(t_0,t)]^n \exp[-\Lambda(t_0,t)] = \tag{55}$$

$$= \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^{q} \sum_{k_j=0}^{k_{j-1}} \binom{k_{j-1}}{k_j} U_{j-1}^{k_{j-1}-k_j} U_q^{k_q} \prod_{i=0}^{q} \int_{A_i} e^{-\alpha_i U_i} \alpha_i^{k_i-k_{i+1}} dF(\alpha_i)$$

gdzie: $k_0 = n$; $k_{q+1} = 0$; A_i - obszar określoności zmiennej α_i .

Jeżeli $\bigwedge_i \alpha_i : N(\bar{\alpha}_i, \sigma_i)$, t_0

$$P_n(t_0,t) = \frac{1}{n!} \exp\left\{-\sum_{i=0}^{q}\left[\bar{\alpha}_i U_i - \frac{1}{2}(U_i\sigma_i)^2\right]\right\} \prod_{j=1}^{q} \sum_{k_j=0}^{k_{j-1}} \binom{k_{j-1}}{k_j} U_{j-1}^{k_{j-1}-k_j}$$

$$\frac{d^{k_{j-1}-k_j} M_{j-1}(s)}{ds^{k_{j-1}-k_j}} U_q^{k_q} \frac{d^{k_q} M_q(s)}{ds^{q}}, \tag{56}$$

przy czym $M_j(s)$ jest funkcją tworzącą momenty dla zmiennej α_j.

$$f(t_o,t) = \sum_{i=o}^{q} X_i \sum_{j=o}^{q} \int_{A_j} \alpha_i \exp\{-\alpha_j U_j\} dF(\alpha_j). \tag{57}$$

Jeżeli $\bigwedge_i \alpha_i : N(\bar{\alpha}_i, \sigma_i)$, to

$$f(t_o,t) = \sum_{i=o}^{q} X_i (\bar{\alpha}_i - U_i \sigma_i^2) \exp\left\{-\sum_{j=o}^{q}\left[\bar{\alpha}_j U_j - \frac{1}{2}(U_j \sigma_j)^2\right]\right\}. \tag{58}$$

5. Model strumienia uszkodzeń SnP

Analizując dokładnie odnowy dokonywane w obiektach górniczych, tak jak i w wielu innych obiektach technicznych, można zetknąć się z takimi przypadkami, że zaistniałe uszkodzenie pewnego elementu obiektu pociągnęło za sobą uszkodzenie innego bądź innych elementów tego obiektu. Tak np. wytopienie się korka topikowego w sprzęgłach hydrokinetycznych oznacza na ogół wylanie się oleju z komory pracy sprzęgła. Ten typ uszkodzeń nosi nazwę wtórnych. Ogólnie można mówić o takich uszkodzeniach, które pociągają za sobą uszkodzenia "z" elementów obiektu. Jeżeli strumień uszkodzeń jest stacjonarny i niepojedynczy, to dla pełnego scharakteryzowania strumienia niezbędne jest posiadanie informacji o:

- λ_t intensywności strumienia chwil, w których pojawiają się uszkodzenia, a_i prawdopodobieństwie pojawienia się w każdej z nich dokładnie "i" uszkodzeń, przy czym $a_i \geq 0$, $\sum_{i=1} a_i = 1$; z - maksymalna liczba uszkodzeń obiektu w jednej chwili t,
- współzależności pomiędzy λ_t a a_i, przy czym współzależność ta nie może naruszać warunku stacjonarności strumienia /z założenia/.

W praktyce zastosowane m.in. znalazła rodzina strumieni SnP, dla których prawdopodobieństwo pojawienia się n uszkodzeń w czasie t dane jest wzorem

$$P_n(t) = \sum_{i=1}^{n} P_i^*(t)\, f_i(a_j;\ j = 1,2,\dots,n), \tag{59}$$

gdzie: $f_i(a_j;\ j = 1,2,\dots,n)$ jest i-tą funkcją opisującą sposób pojawienia się n uszkodzeń w ciągu i chwil,

$P_i^*(t)$ odpowiadające funkcji $f_i(a_j;\ j = 1,2,\dots,n)$ prawdopodobieństwo.

Rozpatrzmy najprostszy przypadek strumienia (59).

Jeżeli λ i a są niezależne, λ = const i ponadto $P_o(t) = \exp(-\lambda t)$,

to

$$P_n(t) = e^{-\lambda t} \, u_n(t) \quad (60)$$

gdzie: $u_n(t)$ jest taką funkcją, że

$$u_n'(t) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \, u_{n-i}(t) \; ; \; u_n(0) = 0 \; ; \; u_o(t) = 1 .$$

Łatwo zauważyć, rozwiązując powyższe równanie różniczkowe, że funkcję $P_n(t)$ można przedstawić jako

$$P_n(t) = e^{-\lambda t} \sum_{i=1}^{n} \frac{(\lambda t)^i}{i!} f_i(a_j;\ j=1,2,\dots,n) . \quad (61)$$

Powyższy przypadek można uogólnić, przyjmując, że $\lambda_t = \bar{\lambda} + \Xi_t$ i $E\{\Xi_t \Xi_{t'}\} = o$. Otrzymamy wówczas podobny wzór do wzoru (12), a mianowicie

$$P_n(t) = f_i(a_j;\ j=1,2,\dots,n) \int e^{-\lambda t} \sum_{i=1}^{n} \frac{(\lambda t)^i}{i!} dF(\lambda) . \quad (62)$$

Przypadki różnych postaci rozkładów parametru λ nie będziemy tu rozważali. Funkcje $P_n(t)$ są prawie że analogiczne do wzorów (14), (16), (23), (28) i (33).

6. Zakończenie

Ze względu na ograniczone ramy niniejszego opracowania nie przedstawiono modeli strumieni uszkodzeń zarówno pojedynczych niestacjonarnych oraz niepojedynczych stacjonarnych, dla których rozkład czasów międzyuszkodzeniowych jest różny od wykładniczego bądź pokrewnych rozkładów (15), (24), (29) i (34). Osobnego omówienia wymagają strumienie niestacjonarne niepojedyncze.

Jak wykazały dotychczasowe badania empiryczne najszersze zastosowanie w praktyce górniczej, spośród strumieni stacjonarnych i pojedynczych, znalazły strumienie typu Palma z rozkładem międzyuszkodzeniowym klasy gamma /w szczególności strumień Poissona/ i złożony strumień Poissona (18), a spośród strumieni niestacjonarnych i pojedynczych, strumień (39) z potęgową funkcją intensywności uszkodzeń.

Badania nad różnymi procedurami wnioskowania w przyszłość, na podstawie zaprezentowanych modeli kształtowania się liczby uszkoszeń, trwają. Pewne wyniki tych badań można znaleźć w pracy [2].

LITERATURA

[1] Czaplicki J.M.: Estymacja przy informacjach a priori parametrów funkcji gęstości czasu pracy obiektu ZEM, z 2, 1978.

[2] Czaplicki J.M.: Pewien model procesu uszkodzeń i problem jego predykcji. ZEM, z 4, 1976.

[3] Firkowicz S.: Statystyczne badanie wyrobów. WNT, Warszawa 1970.

[4] Gniedenko B.W., Kowalenko I.N.: Wstęp do teorii obsługi masowej. PWN, Warszawa 1971.

[5] Kopociński B.: Zarys teorii odnowy i niezawodności. PWN, Warszawa 1972.

[6] Papoulis A.: Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne WNT, Warszawa 1972.

[7] Pearson K.: Tables of Incomplette Γ - Function. Camb. Univ. Press, London 1957.

МОДЕЛИ, НЕКОТОРЫХ ПОТОКОВ ШАХТНЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ РЕМОНТИРУЕМЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Резюме;

В статье были обсуждены модели потоков повреждений стационарного, одиничного и нестационарного, единичного характера, а также модель потока неединичного, стационарного.

PATTERNS OF SOME RANDOM FAILURE PROCESSES OF MINING RENEWABLE TECHNICAL OBJECTS

Summary

This paper deals with patterns of random failure processes in cases of their stationary, singular and non - stationary, singular characters. There has been also presented a certain pattern of non - singular stationary process.