ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: GÓRNICTWO z. 92 Nr kol. 589

ILONA KOPOCIŃSKA, BOLESŁAW KOPOCIŃSKI
INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU WROCŁAWSKIEGO
WROCŁAW

NIEZAWODNOŚĆ SYSTEMÓW O LOSOWYM OBCIĄŻENIU ELEMENTÓW

W pracy rozważamy niezawodność elementów o zmieniającej się losowo intensywności awarii oraz systemy złożone z takich elementów. Sądzimy, że jest to probabilistyczny model elementu lub systemu mającego pewien repertuar zadań lub pracujących w losowym środowisku przy czym zadania lub warunki środowiska zmieniają się losowo niejednakowo obciążając elementy. Zakładamy, że intensywność awarii elementu jest procesem półmarkowskim i przy tym założeniu znajdujemy funkcję niezawodności elementu i jej własności graniczne. Rozważając systemy elementów o zmieniającej się losowo intensywności awarii elementów dowodzimy, że jeżeli intensywność awarii elementów zależy od losowego otoczenia, to czasy pracy elementów są dodatnio zależne przez mieszanie, natomiast, jeżeli intensywność awarii elementów zależy od liczby sprawnych elementów w systemie, to czasy pracy elementów są stowarzyszonymi zmiennymi losowymi. Te własności pozwalają oszacować niezawodność systemu przy użyciu niezawodności pojedynczych elementów.

1. Niezawodność elementu. Weźmy pod uwagę element pewnego systemu i załóżmy, że jego obciążenie zmienia się w zależności na przykład od zadania wykonywanego przez system, stanu sprawności pozostałych elementów systemu lub warunków otoczenia. Ściślej biorąc przyjmijmy, że intensywność awarii elementu jest pewnym procesem losowym, przedmiotem naszych rozważań będzie funkcja niezawodności elementu oraz jej własności graniczne. Łatwo podać przykłady rozważanych systemów (zob. [3]), mogą to być: silnik statku rybackiego wykorzystywany do poruszania statku w drodze, manewrowania w porcie, napędu przetwórni pokładowych; także kombajn zbożowy przeznaczany do żniwa i omłotu, omłotu na postoju et al.

Niech $\Lambda(t)$, $t \geqslant 0$, oznacza proces półmarkowski na skończonym zbiorze stanów $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, zdefiniowany w sensie Pyke [8] przez chwile regeneracji $t_0=0$, t_1, t_2, ... oraz jednorodny łańcuch Markowa $\Lambda_n = \Lambda(t_n)$, $n=0,1,\ldots$. Proces ten jest opisany przez parę $(F_i, (p_{ij}))$, gdzie F_i oznacza rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej t_n-t_{n-1} pod warunkiem $\Lambda_{n-1} = \lambda_i$, oraz (p_{ij}) oznacza macierz prawdopodobieństw przejścia łańcucha Markowa Λ_n, $n=0,1,\ldots$. Na ogół będziemy zakładali, że istnieje średnia μ_i w rozkładzie prawdopodobieństwa F_i a także graniczny rozkład prawdopodobieństwa σ_i, $i=1,2,\ldots,m$ wartości łańcucha Markowa Λ_n, $n=0,1,\ldots$. Przy tym założeniu prawdopodobieństwa graniczne spełniają układ równań $\sum \sigma_i p_{ij} = \sigma_j$, $j=1,2,\ldots m$, z warunkiem zupełności prawdopodobieństwa $\sum \sigma_i = 1$, natomiast graniczne prawdopodobieństwa wartości procesu $\Lambda(t)$, $t \geqslant 0$, są postaci $q_i = \mu_i \sigma_i / \sum \mu_j \sigma_j$, $i=1,2,\ldots,m$. Tutaj i w przyszłości, gdy sumujemy po zbiorze $J = \{1,2,\ldots,m\}$ - granice sumowania pomijamy.

Przypuśćmy, że $\Lambda(t)$, $t \geqslant 0$ jest procesem intensywności awarii pewnego elementu i niech Z oznacza czas jego pracy. Funkcja niezawodności elementu, pod warunkiem, że $\Lambda_0 = \lambda_i$ ma wówczas postać

$$(1) \qquad P_i(x) = \Pr(Z > x \mid \Lambda_0 = \lambda_i) = $$
$$= E\left(\exp\left(-\int_0^x \Lambda(u)du\right) \mid \Lambda_0 = \lambda_i\right), \qquad i=1,2,\ldots,m.$$

<u>Twierdzenie</u> 1. Jeżeli intensywność awarii elementu jest procesem półmarkowskim $\Lambda(t)$, $t \geqslant 0$, to funkcje niezawodności P_i, $i=1,2,\ldots,m$ spełniają układ równań

$$(2) \qquad P_i(x) = \exp(-\lambda_i x)(1-F_i(x)) + $$
$$+ \int_0^x \sum \exp(-\lambda_i u) p_{ij} P_j(x-u) dF_i(u), \qquad i=1,2,\ldots,m.$$

Przechodząc w (2) do transformat $P_i^*(s) = \int_0^\infty \exp(-sx) P_i(x)dx$, $f_i^*(s) = \int_0^\infty \exp(-sx) dF_i(x)$, $i=1,2,\ldots,m$, otrzymujemy

<u>Wniosek 1</u>. Funkcje $P_i^*(s)$, $i=1,2,\ldots,m$, spełniają układ równań liniowych

$$(3) \qquad \sum (\delta_{ij} - p_{ij} f_i^*(s+\lambda_i)) P_j^*(s) = \frac{1 - f_i^*(s+\lambda_i)}{s+\lambda_i}, \quad i=1,2,\ldots,m,$$

gdzie δ_{ij} jest deltą Kroneckera.

<u>Przykład 1</u>. Weźmy pod uwagę m elementów o niezależnych czasach pracy i jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa wykładniczym z parametrem λ. Niech $m(t)$, $t \geqslant 0$, oznacza liczbę sprawnych elementów w chwili t oraz $\Lambda(t) = \lambda_{m(t)}$ przy danym ciągu $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Traktując proces $\Lambda(t)$, $t \geqslant 0$, jako proces intensywności awarii pewnego elementu, mamy

$$F_i(x) = 1 - \exp(-i\lambda x),$$
$$p_{ij} = \delta_{i\,j-1}, \quad i,j = 1,2,\ldots,m.$$

Zatem, korzystając z twierdzenia 1, dla funkcji niezawodności $P_i(x)$ rozważanego elementu, pod warunkiem, że $m(0) = i$, otrzymujemy układ równań

$$P_i(x) = \exp(-(\lambda_i+i\lambda)x) + \int_0^x \exp(-(\lambda_i+i\lambda)u)i\lambda P_{i-1}(x-u)du,$$
$$i=1,2, \ldots, m,$$

oraz ponadto

$$P_0(x) = \exp(-\lambda_0 x).$$

Funkcję $P_m(x)$ możemy znaleźć przez m-krotne całkowanie funkcji wykładniczej. Nietrudno sprawdzić, że jeżeli $\lambda_i = \lambda$, to $P_i(x) = \exp(-\lambda x)$, $i=0,1, \ldots, m$.

Przechodząc w (3) do granicy przy $s \to 0$ otrzymujemy związki dla wartości oczekiwanych czasu pracy elementu.

Wniosek 2. Wartości oczekiwane $\nu_i = E(Z \mid \Lambda_0 = \lambda_i)$, $i=1,2, \ldots, m$, spełniają układ równań liniowych

$$(4) \qquad \sum(\delta_{ij} - p_{ij}f_i^*(\lambda_i))\nu_j = \frac{1 - f_i^*(\lambda_i)}{\lambda_i}, \qquad i=1,2, \ldots, m.$$

Twierdzenie 2. Jeżeli intensywność awarii elementu jest procesem półmarkowskim $\Lambda(t)$, $t \geq 0$, rozkład graniczny $\{\sigma_j\}$ łańcucha $\{\Lambda_n\}$ przy $n \to \infty$ istnieje i nie zależy od warunku początkowego $\Lambda_0 = \lambda_i$, oraz $\lambda_j = \alpha_j \lambda$, $j=1,2, \ldots, m$, $\lambda \to 0$, to

$$\lim_{\lambda \to 0} P_i(x/\lambda) = \exp(-\alpha x), \qquad i=1,2, \ldots, m,$$

gdzie

$$\alpha = \sum \alpha_j \mu_j \sigma_j / \sum \mu_j \sigma_j.$$

Dowód twierdzenia 1. Niech Y oznacza zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ_i nie zależną od t_1. Aby znaleźć niezawodność $Pr(Z > x \mid \Lambda_0 = \lambda_i)$ rozpatrujemy dwa zdarzenia: pierwsze polegające na tym, że $t_1 > x$ i $Y > x$ i drugie polegające na tym, że $0 < t_1 \leq x$, $Y > t_1$ oraz, że element nie uszkodzi się w przedziale $(t_1, x]$. Mamy więc

$$Pr(Z > x \mid \Lambda_0 = \lambda_i) = Pr(t_1 > x,\ Y > x \mid \Lambda_0 = \lambda_i) +$$
$$+ \int_0^x \sum Pr(Y > u) Pr(\Lambda_1 = \lambda_j \mid \Lambda_0 = \lambda_i) Pr(Z > x-u \mid \Lambda_0 = \lambda_j) dF_i(u).$$

Po podstawieniu oznaczeń mamy twierdzenie 1.

Dowód twierdzenia 2. Niech $A(t) = \Lambda(t)/\lambda$. Niezależnie od warunku początkowego $A(0)$ mamy (por. [1])

$$\frac{1}{T}\int_0^T A(u)du \to \sum \alpha_j q_j = \alpha, \qquad T \to \infty,$$

z prawdopodobieństwem 1. Zatem, korzystając z ciągłości funkcji wykładniczej, mamy

$$\lim_{\lambda \to 0} P_i(t/\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} E[\exp(-\int_0^{t/\lambda} \Lambda(u)du) \mid \Lambda_0 = \lambda_i] =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} E\left[\exp\left(-t \frac{\lambda}{t} \int_0^{t/\lambda} A(u)du\right) \mid A(0) = \alpha_i\right] =$$

$$= \exp\left(-t \lim_{T \to 0} \frac{1}{T} \int_0^T A(u)du \mid A(0) = \lambda_i\right) = \exp(-\alpha t).$$

2. Szczególny przypadek. Przypuśćmy, że $\Lambda(t)$, $t \geqslant 0$ jest procesem Markowa o intensywności przejścia (ϑ_{ij}), gdzie $\vartheta_{ii} = \vartheta_i = \sum_{i \neq j} \vartheta_{ij}$, $i=1,2, \ldots, m$. Traktując proces markowski jako półmarkowski przyjmujemy $F_i(x) = 1 - \exp(-\vartheta_i x)$, $p_{ij} = \vartheta_{ij}/\vartheta_i$ dla $i \neq j$, $p_{ii}=0$, $i,j=1,2, \ldots, m$. Z twierdzenia 1 otrzymujemy więc

$$(5) \qquad P_i(x) = \exp(-(\lambda_i + \vartheta_i)x) + \int_0^x \sum_{j \neq i} \vartheta_i \exp(-(\lambda_i + \vartheta_i)u) \, p_{ij} P_j(x-u)du, \qquad i=1,2, \ldots, m.$$

Zatem

$$(6) \qquad P_i(x) = \exp(-\vartheta_i^* x) + \int_0^x \sum_{j \neq i} \exp(-\vartheta_i^* u)\vartheta_{ij}^* P_j(x-u)du,$$

gdzie

$$(7) \qquad \vartheta_{ij}^* = \vartheta_{ij} \text{ dla } i \neq j, \quad \vartheta_i^* = \vartheta_i + \lambda_i, \qquad i,j=1,2, \ldots, m.$$

Weźmy pod uwagę proces Markowa $\Lambda^*(t)$, $t \geqslant 0$, określony na $m+1$ stanach $0,1, \ldots, m$, ze stanem pochłaniającym 0. Przyjmując macierz intensywności przejścia (7) z uzupełnieniem

$$(8) \qquad \vartheta_{i0}^* = \lambda_i, \quad \vartheta_0^* = 0, \quad \vartheta_{0i}^* = 0, \qquad i=1,2, \ldots, m,$$

i oznaczając przez $P_{ij}^*(t)$ prawdopodobieństwa przejścia dla procesu $\Lambda^*(t)$, $t \geqslant 0$ z (5) otrzymujemy (por. Brodi i Pogosjan [2]),

Wniosek 3. Jeżeli T jest czasem pochłonięcia procesu $\Lambda(t)$, $t \geqslant 0$, to

$$P_i(x) = \Pr(Z > x \mid \Lambda_0 = \lambda_i) = \Pr(T > x \mid \Lambda^*(0) = i) =$$
$$= 1 - P_{i0}^*(x) = \sum_{j=1}^m P_{ij}^*(x).$$

3. Uogólnienie. Załóżmy, że $\Lambda(t)$, $t \geqslant 0$ jest procesem przedziałami Markowa określonym na zbiorze $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, opisanym przez trójkę $(F_k, (p_{ij}), (\vartheta_{ij}^{(k)}))$, gdzie (zob. [6], [7]) oznaczamy przez: F_k - rozkład prawdopodobieństwa długości segmentu markowskiego przy warunku początkowym $\Lambda(0) = \lambda_k$, (p_{ij}) - macierz prawdopodobieństw przejścia w chwili regeneracji procesu, $(\vartheta_{ij}^{(k)})$ - macierz intensywności przejścia procesu na segmencie markowskim przy warunku początkowym $\Lambda(0) = \lambda_k$. Niech μ_k oznacza średnią w rozkładzie prawdopodobieństwa F_k, $(P_{ij}^{(k)}(t))$ - macierz prawdopodobieństw przejścia procesu Markowa o intensywnościach przejścia $(\vartheta_{ij}^{(k)})$. Wówczas $\Lambda_n = \Lambda(t_n)$, $n=0,1, \ldots$, jest włożonym łańcuchem Markowa o macierzy prawdopodobieństw przejścia (P_{ij}), gdzie $P_{ij} = \int_0^\infty \sum_k P_{ik}^{(i)}(u)p_{kj}dF_i(u)$, $i,j=1,2, \ldots, m$. Granicz-

ne prawdopodobieństwa wartości włożonego łańcucha Markowa Λ_n, o ile istnieją i nie zależą od stanu początkowego łańcucha, spełniają układ równań $\sigma_j = \sum \sigma_i P_{ij}$, z warunkiem zupełności prawdopodobieństwa, natomiast graniczne prawdopodobieństwa wartości procesu $\Lambda(t)$, $t \geqslant 0$, są postaci

$$(9) \qquad q_j = \sum \sigma_k \int_0^\infty P_{kj}^{(k)}(u)(1 - F_k(u))du \Big/ \sum \mu_k \sigma_k, \quad j=1,2, \ldots, m.$$

Przypuśćmy, że $\Lambda(t)$, $t \geqslant 0$ jest intensywnością awarii elementu oraz Z jest czasem jego pracy. Przy oznaczeniach (1) analogicznie do twierdzeń 1 i 2 mamy

Twierdzenie 3. Jeżeli intensywność awarii elementu jest procesem przedziałami markowskim $\Lambda(t)$, $t \geqslant 0$, te funkcje P_i, $i=1,2, \ldots, m$, spełniają układ równań

$$(10) \qquad P_i(x) = G_i(x)(1-F_i(x)) + \int_0^x \sum_k \sum_j P_{ij}^{(1)}(u) p_{ji} P_k(x-u) dF_i(u),$$
$$i=1,2, \ldots, m,$$

gdzie $G_i(x) = \sum P_{ij}^{(k)}(x)$ jest określone we wniosku 3 przy założeniu macierzy intensywności przejścia $(\nu_{ij}^{(k)})$.

Twierdzenie 4. Jeżeli rozkład prawdopodobieństwa $\{q_j\}$ procesu $\Lambda(t)$, $t \geqslant 0$, istnieje i nie zależy od warunku początkowego $\Lambda(0) = \lambda_i$, $\lambda_j = \alpha_j \lambda$, $\lambda \to 0$, to

$$\lim_{\lambda \to 0} P_i(x/\lambda) = \exp(-\alpha x),$$

gdzie $\alpha = \sum \alpha_j q_j$.

4. Systemy o zmiennym obciążeniu elementów. Załóżmy, że czas pracy elementu zależy od jego obciążenia. Laboratoryjnie można znaleźć rozkłady wirtualnego czasu pracy elementu przy stałym obciążeniu lub, przy odpowiednio rozbudowanym eksperymencie, można znaleźć rodziny rozkładów czasu pracy elementu przy zmienianym w określony sposób obciążeniu. Weźmy pod uwagę system elementów i załóżmy, że intensywność awarii elementów zależy od obciążenia. Przeanalizujemy teraz rozkład czasu pracy elementów systemu pracującego w zmiennym środowisku i systemu, w którym obciążenie elementów zależy od liczby sprawnych elementów w systemie.

4.1. Niech $\Lambda(t)$, $t \geqslant 0$, będzie procesem półmarkowskim zdefiniowanym w paragrafie 1 charakteryzującym losowe środowisko. Oznaczmy przez $\underline{\Lambda}(t) = (\Lambda_1(\Lambda(t)), \Lambda_2(\Lambda(t)), \ldots, \Lambda_m(\Lambda(t)))$ wektor intensywności awarii oraz przez $\underline{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)$ wektor czasu pracy elementów systemu. Rozkład prawdopodobieństwa wektora $\underline{Z}$ można wyrazić jawnym wzorem ale trudno znaleźć praktycznie użyteczną postać tego wzoru. Zauważmy natomiast, że jest to rozkład prawdopodobieństwa dodatnio zależnych przez mieszanie zmiennych losowych (ang. positive dependent by mixture, zob. Shaked [9]). Rzeczywiście, jeżeli $\Lambda(t, \omega)$, $t \geqslant 0$, jest realizacją procesu $\Lambda(t)$, $t \geqslant 0$, przy ustalonym $\omega \in \Omega$, to składowe wektora $\underline{Z}$ =

$= \underline{Z}(\omega) = (Z_1(\omega), Z_2(\omega), \ldots, Z_m(\omega))$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach brzegowych

$$P_i(z_i,\omega) = Pr(Z_i(\omega) > z_i) = \exp\left(-\int_0^{z_i} \Lambda_i(\Lambda(t,\omega))dt\right), \quad i=1,2,\ldots,m,$$

oraz

$$Pr(\underline{Z} > \underline{z}) = \int_{\Omega} \prod_{i=1}^{m} P_i(z_i,\omega)\, d\mu(\omega),$$

gdzie μ jest pewną miarą probabilistyczną na Ω.

Udowodniona własność rozkładu wektora $\underline{Z}$ może być wykorzystana przy szacowaniu niezawodności systemu (Shaked [9]).

4.2. Załóżmy, że obciążenie elementów systemu zależy od liczby elementów sprawnych. Czas pracy poszczególnych elementów w systemie można opisać w następujący sposób. W chwili początkowej wirtualne czasy pracy elementów $X_1, X_2, \ldots, X_m$, gdzie m jest liczbą elementów w systemie, są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie. W chwili $X_{1,m} = \min X_1, X_2, \ldots, X_m$ ulega uszkodzeniu pewien element a pozostałe pracują pod zmienionym obciążeniem. Możemy przy tym dopuścić możliwość odnowy pewnych (ale nie wszystkich elementów). Zatem resztowe, wirtualne czasy pracy elementów po chwili $X_{1,m}$ ulegają pewnej transformacji $T^{(1)}$. Symbolicznie

$$T^{(1)}: \; X_1-X_{1,m} \to X_1^{(1)}, \; X_2-X_{1,m} \to X_2^{(1)}, \ldots, \; X_m-X_{1,m} \to X_m^{(1)},$$

przy czym $X_i^{(1)} \geqslant 0$ oraz istnieje j takie, że $X_j^{(1)} = 0$ jeżeli $X_j-X_{1,m}=0$. W chwili uszkodzenia się drugiego elementu następuje transformacja $T^{(2)}$ resztowych wirtualnych czasów pracy itd., aż do chwili uszkodzenia się ostatniego sprawnego elementu w systemie.

Gdy dane są rozkłady wirtualnych czasów pracy elementów w chwili początkowej pracy systemu i postać transformacji $T^{(j)}$, $j=1,2,\ldots$, wówczas można znaleźć łączny rozkład czasu pracy elementów w systemie ale to zadanie może prowadzić do złożonych rachunków. Interesujące może być oszacowanie niezawodności systemu przy niepełnej znajomości wspomnianego rozkładu prawdopodobieństwa.

5. Systemy elementów stowarzyszonych. Mówimy, że elementy systemu są stowarzyszone (ang. associated, zob. Esary, Proschan, Walkup [5]), jeżeli czasy pracy $(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \underline{X}$ elementów w systemie są stowarzyszonymi zmiennymi losowymi. Oznacza to, że dla dowolnych funkcji f i g, m zmiennych, monotonicznych względem każdej zmiennej, zmienne losowe $f(\underline{X})$ i $g(\underline{X})$ są nieujemnie skorelowane. Wiadomo, że zmienne losowe stowarzyszone są dodatnio zależne (ang. positively orthant dependent), to znaczy dla dowolnego rozbicia zbioru $J = \{1, 2, \ldots, m\}$ na rozłączne podzbiory $J_1, J_2, \ldots, J_r$ zachodzi nierówność

$$Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \ldots, X_m > x_m) \geqslant \prod_{k=1}^{r} Pr(X_j > x_j, \; j \in J_k).$$

Ta własność rozkładu prawdopodobieństwa czasu pracy elementów pozwala oszacować niezawodność systemów o układzie równoległym z rezerwą, przy użyciu rozkładów brzegowych (zob. Esary, Proschan [4]).

Pokażemy teraz, że w pewnej klasie systemów o zmiennym obciążeniu elementów czasy pracy elementów są dodatnio zależne.

Twierdzenie 5. Niech $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ będzie wektorem zmiennych losowych stowarzyszonych, $X_{1,m}, X_{2,m}, \ldots, X_{m,m}$ będą statystykami pozycyjnymi w tym ciągu oraz $Y_{k,n}$, $k=1,2, \ldots, m$, $n=1,2, \ldots$, będą zmiennymi losowymi niezależnymi od $\underline{X}$ i między sobą.

Rozważmy funkcję $T(x,y)$ monotoniczną dla $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, nieujemną oraz taką, że $x+T(a-x,y)$ jest monotoniczną dla $x \in [0,a]$, $a > 0$.

Wówczas dla każdego $k=1,2, \ldots, m$ zmienne losowe $T^{(k)}(\underline{X}) = (X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \ldots, X_m^{(k)})$ określone następująco

$$X_j^{(k)} = X_{k,m} + I_{X_j > X_{k,m}} T(X_j - X_{k,m}, Y_{j,k}), \quad j=1,2, \ldots, m, \tag{11}$$

gdzie I_A jest indykatorem A, są stowarzyszonymi zmiennymi losowymi.

Twierdzenie 5 wynika z monotoniczności statystyk pozycyjnych oraz funkcji (11) w zależności od składowych wektora $\underline{X}$. Szczegóły dowodu pomijamy.

Podamy teraz przykłady funkcji T mogących być użyte w typowych sytuacjach praktycznych i mechanizmy niszczenia elementów uzasadniające ich użycie.

Przykład 1. (a) Uszkodzenie elementu powoduje włączenie szeregowe dla elementów pozostałych przy pracy dodatkowych mechanizmów zniszczenia

$$T(x,y) = \min (x,y).$$

(b) Uszkodzenie elementu powoduje włączenie równoległe dla elementów pozostałych przy pracy dodatkowych zabezpieczeń

$$T(x,y) = \max (x,y).$$

(c) Chwila uszkodzenia elementu jest chwilą regeneracji sprawnych elementów

$$T(x,y) = y.$$

Przykład 2. Przypuśćmy, że

$$T(x,y) = ax, \qquad 0 < a < 1.$$

Ta funkcja ma naturalną interpretację przy założeniu stałej wirtualnej intensywności awarii. Przypuśćmy, że wirtualna niezawodność elementu jest równa $P(x) = \exp(-\lambda x)$ i x_0 jest chwilą uszkodzenia się pewnego elementu w systemie. Przyjmując $X^{(1)} = a(X-x_0)$ jako wirtualny czas pracy elementu po chwili x_0 mamy

$$\Pr(a(X - x_0) > x \mid X > x_0) = \exp(-x\lambda/a),$$

a więc intensywność awarii elementu po chwili x_0 jest równa λ/a, $0 < a < 1$.

Wniosek 4. Rozważmy system o intensywności awarii elementów zależnej od liczby elementów sprawnych w systemie. Niech $m(t)$ oznacza liczbę elementów uszkodzonych oraz $\lambda_{m(t)}$ będzie intensywnością uszkodzeń elementu. Jeżeli założymy, że $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m$, to czasy pracy elementów w sytemie są zmiennymi losowymi stowarzyszonymi.

Rzeczywiście, niech $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ_0. Z przykładu 2 wynika, że $\underline{X}^{(m)} = T^{(m)} T^{(m-1)} \ldots T^{(1)}(\underline{X})$, przy czym operacje $T^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, są zdefiniowane przez (11) przy $T^{(i)}(x,y) = (\lambda_{i-1}/\lambda_i)x$.

LITERATURA

[1] W. W. Anisimow (В. В. Анисимов), Предельные теоремы для полумарковсских процессов, Теория вероят. 2(1970), str. 3-12.

[2] S. M. Brodi, I. A. Pogosjan (С. М. Броди, И. А. Погосян), Вложенные стохастические процессы в теории массового обсуживания, Киев 1973.

[3] Diagnostyka niezawodnościowa systemów technicznych, Materiały na Szkołę Zimową, Jaszowiec 1978.

[4] J. D. Esary, F. Proschan, Reliability bound for systems of maintained interdependent components, JASA 65(1970), str. 329-338.

[5] J. D. Esary, F. Proschan, D. W. Walkup, Association of random variables, with applications, Ann. Math. Statist. 38(1967), str. 1466-1474.

[6] Maria Jankiewicz, B. Kopociński, Steady-state distributions of piecewise Markov processes, Zastos. Matem. 15(1976), str. 25-32.

[7] A. Kuczura, Piecewise Markov processes, SIAM J. Appl. Math. 24 (1973), str. 169-181.

[8] R. Pyke, Markov renewal processes with finitely many states, Ann. Math. Statist. 32(1961), str. 1243-1259.

[9] M. Shaked, A concept of positive dependence for exchangeable random variables, Ann. Statist. 5(1977), str. 505-515.

Надежность системы со случайной загрузкой элементов

Резюме

В работе рассматриваем надежность элементов со случайной интенсивностью отказов, а также системы построенные такими елементами. Предполагаем, что интенсивность отказов елементов это полумарковский процесс и при этом предположении получаем надежность элементов и её предельные свойства. Рассматривая системы елементов со случайной интенсивностью отказов мы доказываем, что если интенсивность отказов елементов зависит от случайного средства, то время работы элементов - неотрицательно зависимые по перемешиванию, а если эта интенсивность отказов зависит от числа работающих элементов в системе, то время работы элементов - соединионные случайные величины.

On system reliability under random load of elements

Summary

In this note the reliability functions of elements with random failure rate function and the systems consisting of these elements are considered. Assuming that the failure rate function of elements is a semi-Markov process the reliability function is found and its limiting properties are investigated. Considering systems of elements with random failure rate function it is proved that if the failure rate function depends upon the random environment then the working times of elements of the system are positively dependent by mixture and if the above failure rate function depend upon the number of working elements in the system, then the working times of elements are associated random variables.