ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: ELEKTRYKA z. 60 Nr kol. 552

Barbara KOSAŁA

ODWROTNE ZMODYFIKOWANE PRZEKSZTAŁCENIE Z

Streszczenie. W artykule podano metody wyznaczania odwrotnego zmodyfikowanego przekształcenia Z za pomocą całki okrężnej i metodę szeregów potęgowych. Obie te metody zilustrowano na przykładzie.

Ciągłą funkcję czasu $f(t)\big|_{t=(n-1+m)T}$, będącą odwrotnym zmodyfikowanym przekształceniem Z, można wyznaczyć na podstawie znajomości zmodyfikowanej transformaty Z, oznaczanej $F(z,m)$, przy pomocy procesu zwanego odwrotnym zmodyfikowanym przekształceniem Z, to jest:

$$f(t)\big|_{t=(n-1+m)Z} = f\left[(n-1+m)T\right] = Z_m^{-1}\left[F(z,m)\right].$$

Czas t jest tutaj związany z parametrami n, m następującą zależnością $t = (n-1+m)T$. n przyjmuje wartości całkowite nieujemne, a m zmienia się w sposób ciągły od zera do jedności.

Zupełnie tak jak w przypadku zwykłego przekształcenia Z, można przejść do funkcji czasu za pomocą całki okrężnej, jak też przy pomocy szeregów potęgowych.

1. Metoda całki okrężnej

Ze wzoru Cauchy'ego na współczynniki szeregu Laurenta mamy:

$$f(t)\big|_{t=(n-1+m)T} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} F(z,m)z^{n-1}dz$$

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ldots, \qquad 0 < m \leqslant 1,$$

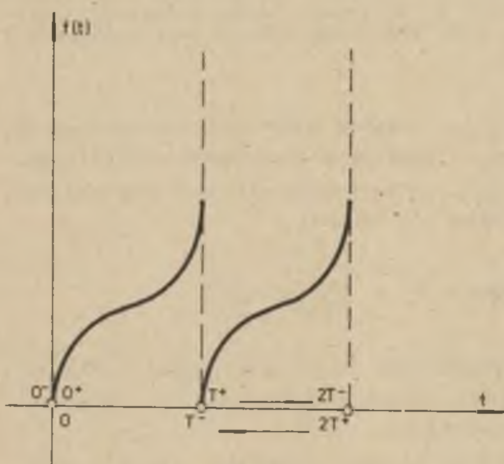
przy czym Γ jest konturem zamkniętym, obejmującym wszystkie punkty osobliwe funkcji podcałkowej. Wzór całkowy daje funkcję czasu $f(t)$ w postaci zamkniętej.

Podczas całkowania m można traktować jako wartość stałą, ponieważ całkowanie zachodzi tylko w płaszczyźnie z. Dla odwrotnego zmodyfikowanego przekształcenia Z można więc używać tablic dla zwykłego przekształcenia Z.

Wartości czasu t są określone wzorem, $t=(n-1+m)T$, gdzie m i n są parametrami. Przy tym n przyjmuje wartości całkowite nieujemne, a m zmienia się ciągle od zera do jedności, określając w przedziałach punkty ciągłego procesu.

Dzięki zastosowaniu zmodyfikowanego przekształcenia Z otrzymujemy wartości wielkości wyjściowej w dowolnym momencie czasu.

Aby otrzymać proces w momentach włączania, należy przejść od zmodyfikowanego przekształcenia Z do zwykłego i dlatego w wyrażeniu $t=(n-1+m)T$ należy założyć $m \to 1$.



Rys. 1

Dla nieciągłej impulsowej charakterystyki (rys. 1) otrzymamy wtedy wartości lewostronne w punktach nieciągłości, to jest wartości w momentach 0^-, T^-, $2T^-$,... .

Aby otrzymać wartości procesu w momentach 0^+, T^+, $2T^+$,..., czyli wartości procesu uzyskiwane za pomocą zwykłego przekształcenia Z, zakładamy $m = 0$, a n następna liczba całkowita większa od tej, której było równe n w równaniu $t=(n-1+m)T$, gdy $m = 1$. Stosując tę metodę, możemy otrzymać zarówno prawostronne i lewostronne wartości reakcji w punktach nieciągłości jak i wartości między chwilami włączania.

2. Metoda szeregów potęgowych

Zmodyfikowane przekształcenie Z funkcji f(t) określamy:

$$F(z,m) = \sum_{n=0}^{\infty} f\left[(n-1+m)T\right] z^{-n}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad 0 \leq m \leq 1.$$

Jeżeli przekształcenie Z funkcji f(t), czyli $Z\left[f(t)\right] = F(z)$, to $Z\left[f(t-nT)u(t-nT)\right] = z^{-n}F(z)$, gdzie $u(t)$ - funkcja skoku jednostkowego dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Stąd mamy:

$$F(z,m) = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} f\left[(n+m)T\right] z^{-n},$$

$$n = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \qquad 0 \leqslant m < 1,$$

albo:

$$zF(z,m) = f_0(m)z^{-0} + f_1(m)z^{-1} + \ldots$$

$$\ldots + f_n(m)z^{-n} + \ldots \quad |z| > R, \quad 0 \leqslant m < 1.$$

Czas t można teraz wyrazić w postaci $t = (n+m)T$.

Przy założeniu analityczności funkcji $F(z,m)$ dla $|z| > R$ (i dla $z = \infty$) otrzymamy rozwinięcie $zF(z,m)$ na szereg potęgowy (szereg Taylora) względem z^{-1}.

Metoda szeregów potęgowych prowadzi do stopniowego wyznaczania funkcji ciągłej, pojmowanej tutaj jako przeciwstawienie funkcji dyskretnej. Wartości $f_0(m)$, $f_1(m), \ldots, f_n(m), \ldots$, gdzie $f_n(m) = f\left[(n+m)T\right]$ przy ciągłej zmianie m od zera do jedności określają proces w dowolnym momencie czasu od momentu czasu nT do $(n+1)T$. $f_0(m)$ dla $0 \leqslant m < 1$ przedstawia ciągłą funkcję czasu w pierwszym przedziale próbkowania, $f_1(m)$ dla $0 \leqslant m < 1$ przedstawia tę samą funkcję w drugim przedziale próbkowania itd.

Funkcja czasu związana jest z $f_n(m)$ zależnością:

$$f(t) = f\left[(n+m)T\right] = f_n(m).$$

Z równania

$$zF(z,m) = f_0(m)\,z^{-0} + f_1(m)\,z^{-1} + f_2(m)\,z^{-2} + \ldots$$

$$\ldots + f_n(m)\,z^{-n} + \ldots$$

wynika, że

$$f_0(m) = \lim_{z\to\infty} zF(z,m),$$

$$f_1(m) = -\frac{1}{1!} \lim_{z\to\infty} \left\{ z^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[zF(z,m)\right] \right\},$$

$$f_2(m) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to\infty} z^2 \frac{\partial}{\partial z} \left\{ z^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[zF(z,m)\right] \right\}.$$

Jeżeli $zF(z,m)$ jest funkcją wymierną z^{-1}, to może być zapisana

$$zF(z,m) =$$

$$= \frac{P_o(m) + P_1(m)z^{-1} + P_2(m)z^{-2} + \ldots + P_n(m)z^{-n}}{q_o + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} + \ldots + q_nz^{-n}}.$$

Dla $q_o = 1$ będzie:

$$zF(z,m) =$$

$$= \frac{P_o(m) + P_1(m)z^{-1} + P_2(m)z^{-2} + \ldots + P_n(m)z^{-n}}{1 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} + \ldots + q_nz^{-n}}$$

Wtedy można $f_n(m)$ obliczyć przez podzielenie licznika przez mianownik. Mamy

$$f_o(m) = P_o(m),$$

$$f_1(m) = P_1(m) - P_o(m)q_1 = P_1(m) - q_1f_o(m),$$

$$f_2(m) = P_2(m) - q_1f_1(m) - q_2f_o(m),$$

$$f_3(m) = P_3(m) - q_1f_2(m) - q_2f_1(m) - q_3f_o(m)$$

$$f_n(m) = P_n(m) - \sum_{i=1}^{n} q_i f_{n-i}(m).$$

$f_n(m)$ można zapisać w postaci wyznacznika

$$f_n(m) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & P_o(m) \\ q_1 & 1 & 0 & \ldots & P_1(m) \\ q_2 & q_1 & 1 \quad 0 & \ldots & P_2(m) \\ \vdots & & & & \vdots \\ q_n & q_{n-1} & \ldots & q_2 \quad q_1 & P_n(m) \\ 1 \quad f_o(m) = P_o(m). & & & & \end{vmatrix} \qquad \text{dla } n > 1$$

Ogół wartości w momentach odbioru danych stanowi część procesu ogólnego, odpowiadającą $m = 0$.

Wartości $f_{n-1}(m)$ przy ciągłej zmianie m od zera do jedności przedstawiają ciągłą funkcję czasu $f(t)$ w przedziale próbkowania od momentu czasu $(n-1)T$ do momentu czasu nT.

Wartości $f_n(m)$ przy ciągłej zmianie m od zera do jedności przedstawiają tę samą ciągłą funkcję czasu $f(t)$ w przedziale próbkowania od momentu czasu nT do momentu czasu $(n+1)T$. Dlatego dla układów, których charakterystyka nie zawiera przerw przy sprawdzaniu prawidłowości obliczeń, korzystamy z zależności:

$$\lim_{m\to 1} f_{n-1}(m) = \lim_{m\to 0} f_n(m).$$

Rozważmy teraz przypadek nieciągłych charakterystyk. Przy skokowych zmianach wartości dla określenia lewostronnych wartości procesu w punktach nieciągłości bierzemy granicę

$$\lim_{m\to 1} f_{n-1}(m),$$

a dla określenia prawostronnych wartości procesu granicę

$$\lim_{m\to 0} f_n(m).$$

3. Przykład

Doprowadźmy do wejścia układu impulsowego skok jednostkowy. Niech transmitancja tego układu

$$G(p) = \frac{K}{p + a}.$$

Wyrażenie dla obrazu wielkości wyjściowej będzie:

$$F(z,m) = K\,\frac{z}{z - 1} - \frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}},$$

a wyrażenie dla oryginału wielkości wyjściowej

$$f(t)\Big|_{t=(n-1+m)T} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} K\,\frac{z}{z - 1}\;\frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}}\,z^{n-1}dz.$$

Podczas całkowania m jest wartością stałą. Wobec tego

$$f(t)\Big|_{t=(n-1+m)T} = \frac{1}{2\pi j} Ke^{-amT} \int_{\Gamma} \frac{z^n dz}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

Funkcja podcałkowa ma bieguny w punktach $z_1 = 1$, $z_2 = e^{-aT}$.

Wartość wyjściowej wielkości jest równa sumie residuów funkcji.

$$\underset{z_1=1}{\mathrm{res}} \frac{z^n}{(z-1)(z-e^{-aT})} = \frac{z_1^n}{2z_1 - (1+e^{-aT})}\Bigg|_{z_1=1} = \frac{1}{1-e^{-aT}}$$

$$\underset{z_2=e^{-aT}}{\mathrm{res}} \frac{z^n}{(z-1)(z-e^{-aT})} = \frac{z_2^n}{2z_2 - (1+e^{-aT})}\Bigg|_{z_2=e^{-aT}} = \frac{-e^{-anT}}{1-e^{-aT}}$$

Otrzymujemy:

$$f(t)\Big|_{t=(n-1+m)T} = Ke^{-amT} \frac{1-e^{-anT}}{1-e^{-aT}}.$$

Proces jest nieciągły w momentach załączania. Aby otrzymać jego wartości w momencie 0^+ zakładamy $m \to 0$, $n \to 1$, a w momencie 0^- zakładamy $m \to 1$, $n \to 0$. Wartości reakcji w momentach T^-, T^+ itd. uzyskujemy w analogiczny sposób.

Zastosujemy drugą metodę do poprzedniego przykładu.
Mamy:

$$zF(z,m) = K \frac{z^2 e^{-amT}}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

$$f_o(m) = \lim_{z \to \infty} zF(z,m),$$

$$f_0(m) = \lim_{z\to\infty} Ke^{-amT} \frac{z^2}{(z-1)\,(z-e^{-aT})} = Ke^{-amT},$$

$$f_1(m) = -\frac{1}{1!} \lim_{z\to\infty} \left\{ z^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[zF(z,m) \right] \right\}$$

$$f_1(m) = -\lim_{z\to\infty} \left[z^2 \frac{\partial}{\partial z} \quad \frac{K\, z^2\, e^{-amT}}{(z-1)\,(z-e^{-aT})} \right] =$$

$$= -\lim_{z\to\infty} z^2 Ke^{-amT} - \frac{(1+e^{-aT})\, z^2 + 2e^{-aT} z}{(z-1)^2\, (z-e^{-aT})^2} =$$

$$= Ke^{-amT}(1+e^{-aT}),$$

$$f_2(m) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to\infty} z^2 \frac{\partial}{\partial z} \left\{ z^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[zF(z,m) \right] \right\}$$

$$f_2(m) = \frac{1}{2} \lim_{z\to\infty} z^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[Kb^m \frac{-(1+b)\, z^4 + 2\, b\, z^3}{(z-1)^2\, (z-b)^2} \right] =$$

gdzie $b = e^{-aT}$

$$= Kb^m \lim z^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{2} \quad \frac{-(1+b)\, z^4 + 2\, b\, z^3}{(z-1)^2\, (z-b)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \frac{-(1+b)\, z^4 + 2\, b\, z^3}{(z-1)^2\, (z-b)^2} \right] =$$

$$= \frac{\left[-2\,(1+b)\, z^3 + 3\, b\, z^2\right] (z-1)\,(z-b)}{(z-1)^3\, (z-b)^3} -$$

$$- \frac{\left[2\, z - (1+b)\right] \left[-(1+b)\, z^4 + 2\, b\, z^3\right]}{(z-1)^3\, (z-b)^3} =$$

$$= \frac{\left[(1+b)^2 - b\right] z^4 - 3\,b\,(1+b)\,z^3 + 3\,b^2\,z^2}{(z-1)^3\,(z-b)^3},$$

$$f_2(m) = Kb^m \lim_{z\to\infty} z^2\,\frac{(1+b+b^2)\,z^4 - 3b\,(1+b)\,z^3 + 3b^2z^2}{(z-1)^3\,(z-b)^3} =$$

$$= Kb^m(1+b+b^2)$$

$$f_2(m) = Ke^{-amT}\left[1 + 2e^{-aT} + (e^{-aT})^2\right].$$

W metodzie szeregów potęgowych wzór:

$$f_n(m) = P_n(m) - \sum_{i=1}^{n} q_i\, f_{n-i}(m)$$

jest wygodny dla rekurencyjnego obliczania wartości $f_o, f_1, f_2, \ldots$, nie stwarza jednak możliwości wyznaczenia ogólnego wyrazu ciągu $\{fn\}$. Ważną zaletą tej metody, istotną zwłaszcza przy rozważaniu układów regulacji wyższych rzędów, jest to, że nie trzeba określać biegunów funkcji $F(z,m)z^{n-1}$.

W metodzie całki okrężnej w przypadku złożonych przekształceń obliczenia residuów funkcji $F(z,m)\,z^{n-1}$ mogą być trudne i długotrwałe. Metoda ta daje zamknięty wzór na wartości funkcji czasu $f(t)$.

LITERATURA

[1] Jury E.J.: Przekształcenie Z i jego zastosowania, WNT, Warszawa 1970, s. 327.

[2] Taft W.A.: Elektriczeskije ciepi s pieriemiennymi paramietrami. Izdatielstwo "Energija", Moskwa 1968, s. 328.

Przyjęto do druku w czerwcu 1977 r.

ПРОТИВОПОЛОЖНОЕ МОДИФИЦИРОВАННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ "З"

Р е з ю м е

В статье приведено метод определения противоположного модифицированного преобразования "З", метод при помощи циркуляции и метод степенного ряда.

Оба метода иллюстрировано на примере.

MODIFIED INVERSE TRANFORMATION Z

S u m m a r y

This paper deals with the methods of estimating the modified inverse transformation Z, i.e. a method by the aid of contour integral of closed circulation and a method of exponential series. Examples illustrating both methods are included.