

Jacek T. TOPORKIEWICZ.

ANALIZA NAPIĘĆ FAZOWYCH WIELOFAZOWEGO UKŁADU STEROWANEGO IMPULSOWO

Streszczenie. W pracy przeprowadzono analizę napięć fazowych m-fazowego układu obciążenia z cyklicznie zwieranym punktem zerowym systemu gwiazdowego. Rozważono przypadki sterowania podsynchronicznego, synchronicznego i nadsynchronicznego układu obciążenia. Określono zakres optymalnych częstotliwości impulsowania.

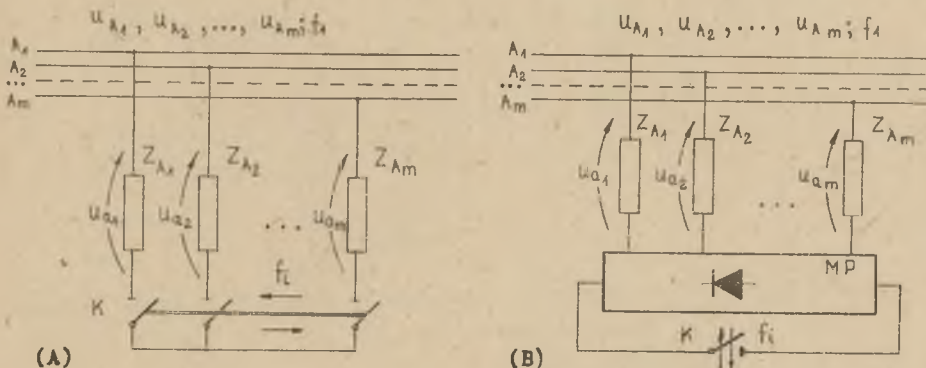
Rozważmy m-fazowy symetryczny liniowy układ obciążenia o impedancji fazowej

$$Z_{A_1} = Z_{A_2} = \dots = Z_{A_m} = Z$$

z cyklicznie zwieranym punktem zerowym systemu gwiazdowego z częstotliwością f_1 za pomocą klucza K, zasilany z m-fazowej sieci symetrycznej napięcia sinusoidalnego o amplitudzie:

$$U_{A_{1\max}} = U_{A_{2\max}} = \dots = U_{A_{m\max}} = U_{\max}.$$

częstotliwości f_1 i kącie międzyfazowym $\frac{2\pi}{m}$ przedstawiony na rys. 1.



Rys. 1. Schemat m-fazowego układu obciążenia sterowanego impulsowo

A - Układ z m-biegunowym kluczem K, B - układ z mostkiem prostowniczym MP i jednobiegunowym kluczem K

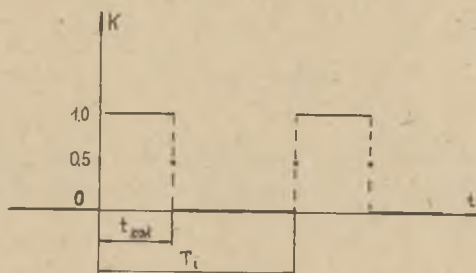
Przyjmijmy wszystkie elementy wykonawcze, tj. klucz K, mostek prostownikowy MP itp. jako elementy idealne.

Układ napięć fazowych sieci zasilającej jest postaci:

$$U_A(t) = \begin{pmatrix} u_{A_1}(t) \\ u_{A_2}(t) \\ \dots \\ u_{A_m}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{\max} \sin(\omega_1 t - \alpha) \\ U_{\max} \sin(\omega_1 t - \frac{2\pi}{m} - \alpha) \\ \dots \\ U_{\max} \sin(\omega_1 t - (m-1)\frac{2\pi}{m} - \alpha) \end{pmatrix} \quad (1)$$

gdzie:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 2\pi f_1$$



Rys. 2. Przebieg czasowy funkcji impulsowania (klucza) K

Niech pracę elementu zwierającego (klucza) K opisuje funkcja dana w postaci analitycznej:

$$K(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in (nT_1, (n+\delta)T_1) \\ \frac{1}{2} & \text{dla } t \in \left\{ \left\{ nT_1 \right\} \cup \left\{ (n+\delta)T_1 \right\} \right\}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{dla } t \in ((n+\delta)T_1, (n+1)T_1) \end{cases} \quad (2)$$

przy czym:

$\delta = \frac{t_{zal}}{T_1} \in [0, 1]$ - względny czas załączenia układu obciążenia do sieci zasilającej (rys. 2),

t_{zal} - czas załączenia/klucza K,

T_1 - okres impulsowania układu.

Funkcje napięć fazowych sieci zasilającej, jako funkcje okresowe klasy $C^{(1)}$ na \mathbb{R} , przedziałami monotoniczne, wyrażają sumy bezwzględnie i jednostajnie zbieżnych ich szeregów Fouriera, których elementy tworzą ciągi potęgi:

$$\begin{pmatrix} 0, U_{\max} \sin(\omega_1 t - \alpha), & 0, 0, 0, \dots \\ 0, U_{\max} \sin(\omega_1 t - \frac{2\pi}{m} - \alpha), & 0, 0, 0, \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0, U_{\max} \sin(\omega_1 t - \frac{(m-1)}{m} 2\pi - \alpha), & 0, 0, 0, \dots \end{pmatrix} \quad (3)$$

Funkcja K , okresowa, przedziałami klasy $C^{(1)}$, przedziałami monotoniczna oraz spełniająca w punktach nieciągłości

$$\left\{ \{nT_1\} \cup \{(n+\delta)T_1\} \right\}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

założenia twierdzenia Dirichleta, jest rozwijalna w szereg Fouriera:

$$\begin{aligned} K(t) &= \delta + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin 2k\pi\delta}{k\pi} \cos k\omega_1 t + \frac{1 - \cos 2k\pi\delta}{k\pi} \sin k\omega_1 t \right) \\ &= \delta + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi\delta}{k} \cos(k\omega_1 t - k\pi\delta), \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie: $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}, \quad k \in \mathbb{N}$

Napięcia fazowe m-fazowego układu obciążenia

$$\mathbf{U}_a = (u_{a_1}, u_{a_2}, \dots, u_{a_m})^T \quad (5)$$

wyrażają się następująco:

$$\mathbf{U}_a(t) = (K \times \mathbf{U}_A)(t) \quad (6)$$

lub w sposób równoważny:

$$U_a(t) = \begin{pmatrix} u_{a_1}(t) \\ u_{a_2}(t) \\ \dots \\ u_{a_m}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K(t) u_{A_1}(t) \\ K(t) u_{A_2}(t) \\ \dots \\ K(t) u_{A_m}(t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Na mocy twierdzenia Martensa o iloczynie Cauchy'ego szeregów Fouriera zachodzi:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

$$u_{a_i}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{i_n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(t) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} u_{A_{in}}(t) = (K u_{A_i})(t),$$

przy czym:

$$C_{i_n}(t) = \sum_{k=0}^n (K_k u_{A_{i, n-k}})(t), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (8)$$

dla każdego $t \in \mathbb{R}$

Ze względu na sinusoidalny przebieg napięć fazowych sieci zasilającej iloczyn Cauchy'ego szeregów Fouriera funkcji K i u_A przyjmuje szczególną postać:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

$$u_{a_i}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (K_n u_{A_{11}})(t) = (K u_{A_{11}})(t) \quad (9)$$

dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Po wykonaniu działań i uporządkowaniu otrzymano:

$$U_a(t) = \left(\begin{aligned} & U_{\max} \delta \sin(\omega_1 t - \alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{U_{\max} \sin k\pi\delta}{k\pi} (\sin(\Omega_k^1 t - k\pi\delta - \alpha) + \sin(\Omega_k^2 t + k\pi\delta - \alpha)) \right] \\ & U_{\max} \delta \sin(\omega_1 t - \frac{2\pi}{m} - \alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{U_{\max} \sin k\pi\delta}{k\pi} (\sin(\Omega_k^1 t - k\pi\delta - \frac{2\pi}{m} - \alpha) + \right. \\ & \quad \left. + \sin(\Omega_k^2 t + k\pi\delta - \frac{2\pi}{m} - \alpha)) \right] \\ & \dots \\ & U_{\max} \delta \sin(\omega_1 t - (m-1)\frac{2\pi}{m} - \alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{U_{\max} \sin k\pi\delta}{k\pi} (\sin(\Omega_k^1 t - k\pi\delta - (m-1)\frac{2\pi}{m} - \alpha) + \right. \\ & \quad \left. + \sin(\Omega_k^2 t + k\pi\delta - (m-1)\frac{2\pi}{m} - \alpha)) \right] \end{aligned} \right)$$

przy czym:

$$\Omega_k^1 = \omega_1 + k\omega_1; \quad \Omega_k^2 = \omega_1 - k\omega_1 \quad (10)$$

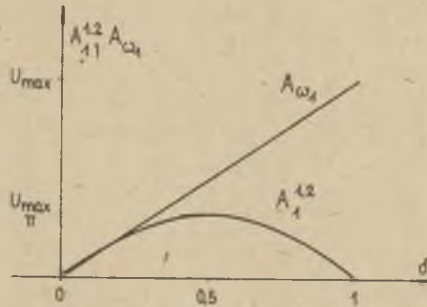
Napięcia fazowe układu obciążenia zasilanego impulsowo zawierają trzy charakterystyczne składowe:

- składową zależną od pulsacji napięcia zasilającego ω_1 ,
- składową zależną od sumy pulsacji napięcia zasilającego i pulsacji przebiegu impulsującego $\Omega_k^1 = \omega_1 + k\omega_1$,
- składową zależną od różnicy pulsacji napięcia zasilającego i pulsacji przebiegu impulsującego $\Omega_k^2 = \omega_1 - k\omega_1$.

Poszczególne składowe napięć fazowych odbiornika Z o jednakowych pulsacjach tworzą m-fazowe symetryczne systemy napięć. Spośród składowych napięć o pulsacjach $\left\{ \Omega_k^1 \right\}_{k \in N^1}$ i $\left\{ \Omega_k^2 \right\}_{k \in N}$ największą amplitudę mają składowe dla $k = 1$, to jest:

$$A_1^{1,2} = \frac{U_{\max}}{\pi} \sin \pi \delta$$

Porównując z amplitudą składowej napięcia o pulsacji sieciowej A_{ω_1} zachodzi (rys. 3):



Rys. 3. Przebiegi amplitud harmonicznych A_{ω_1} , A_1^1 , A_1^2 jako funkcje δ

$$\begin{aligned} \forall \delta \in (0, 1] \quad A_{\omega_1} &> A_1^{1,2} \geq A_k^{1,2}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \\ \delta = 0 \quad A_{\omega_1} &= A_1^{1,2} = A_k^{1,2} = 0, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \end{aligned} \quad (11)$$

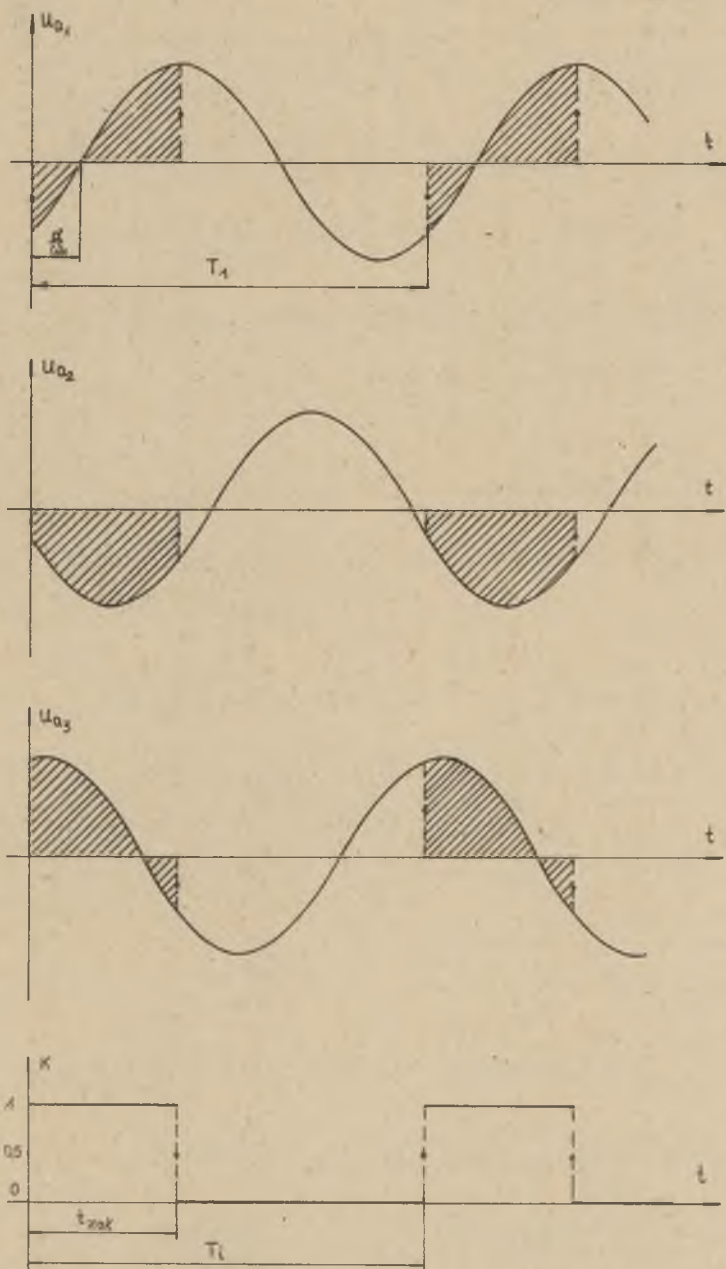
Jako harmoniczną^{x)} podstawową (dominującą) napięć fazowych układu obciążenia przyjęto składową o pulsacji napięcia sieci zasilającej ω_1 :

$$U_{\omega_1}(t) = \begin{pmatrix} U_{\max} \delta \sin(\omega_1 t - \alpha) \\ U_{\max} \delta \sin(\omega_1 t - \frac{2\pi}{m} - \alpha) \\ \dots\dots\dots \\ U_{\max} \delta \sin(\omega_1 t - (m-1) \frac{2\pi}{m} - \alpha) \end{pmatrix} \quad (12)$$

Zmieniając względny czas załączenia δ klucza K w przedziale $[0, 1]$ można sterować amplitudą harmonicznej podstawowej napięcia w zakresie $[0, U_{\max}]$.

W zależności od wartości pulsacji impulsowania ω_1 względem pulsacji napięcia zasilania ω_1 możliwe są następujące warianty pracy układu:

^{x)} W niniejszej pracy termin "harmoniczna" oznacza ogólnie dowolną harmonijkę, niekoniecznie składnik szeregu trygonometrycznego funkcji.



Rys. 4. Przebiegi czasowe napięć fazowych 3-fazowego układu obciążenia przy sterowaniu synchronicznym dla $\alpha \neq 0$, $\delta = 0,375$

1. Układ sterowany synchronicznie: $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_m = \omega$

Przebiegi czasowe napięć fazowych układu obciążenia są funkcjami okresowymi o okresie $T = T_1$, to jest pulsacji $\omega = \omega_1$ (rys. 4):

$$\begin{aligned}
 & \frac{U}{\pi} \left\{ \sin \pi \delta \sin (\pi \delta - \alpha) + \pi \delta \sin (\omega_1 t - \alpha) - \frac{\sin 2 \pi \delta}{2} \sin (\omega_1 t - 2 \pi \delta + \alpha) + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{\sin (k-1) \pi \delta}{k-1} \sin (k \omega_1 t - (k-1) \pi \delta - \alpha) - \frac{\sin (k+1) \pi \delta}{k+1} \sin (k \omega_1 t - (k+1) \pi \delta + \alpha) \right] \right\} \\
 U_k(t) = & \frac{U}{\pi} \left\{ \sin \pi \delta \sin \left(\pi \delta - \frac{2 \pi}{m} - \alpha \right) + \pi \delta \sin \left(\omega_1 t - \frac{2 \pi}{m} - \alpha \right) - \frac{\sin 2 \pi \delta}{2} \sin \left(\omega_1 t - 2 \pi \delta + \frac{2 \pi}{m} + \alpha \right) + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{\sin (k-1) \pi \delta}{k-1} \sin (k \omega_1 t - (k-1) \pi \delta - \frac{2 \pi}{m} - \alpha) - \frac{\sin (k+1) \pi \delta}{k+1} \sin (k \omega_1 t - (k+1) \pi \delta + \frac{2 \pi}{m} + \alpha) \right] \right\} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \frac{U}{\pi} \left\{ \sin \pi \delta \sin \left(\pi \delta - (m-1) \frac{2 \pi}{m} - \alpha \right) + \pi \delta \sin \left(\omega_1 t - (m-1) \frac{2 \pi}{m} - \alpha \right) - \frac{\sin 2 \pi \delta}{2} \sin \left(\omega_1 t - 2 \pi \delta + (m-1) \frac{2 \pi}{m} + \alpha \right) + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{\sin (k-1) \pi \delta}{k-1} \sin (k \omega_1 t - (k-1) \pi \delta - (m-1) \frac{2 \pi}{m} - \alpha) - \frac{\sin (k+1) \pi \delta}{k+1} \sin (k \omega_1 t - (k+1) \pi \delta + (m-1) \frac{2 \pi}{m} + \alpha) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Po uporządkowaniu otrzymano:

$$U_m(t) = C_0 + \left[\sum_{k=1}^{\infty} C_k \max \sin (k \omega_1 t - \psi_k) \right] \tag{14}$$

gdzie:

$$C_0 = \begin{pmatrix} C_{01} \\ C_{02} \\ \dots \\ C_{0m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U}{\pi} \sin \pi \delta \sin (\pi \delta - \alpha) \\ \frac{U}{\pi} \sin \pi \delta \sin \left(\pi \delta - \frac{2 \pi}{m} - \alpha \right) \\ \dots \\ \frac{U}{\pi} \sin \pi \delta \sin \left(\pi \delta - (m-1) \frac{2 \pi}{m} - \alpha \right) \end{pmatrix}$$

$$C_{1 \max} = \begin{pmatrix} C_{1 \max 1} \\ C_{1 \max 2} \\ \dots \\ C_{1 \max m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U}{\pi} \sqrt{(\pi \delta)^2 + \left(\frac{\sin 2 \pi \delta}{2} \right)^2 - \pi \delta \sin 2 \pi \delta \cos 2 (\pi \delta - \alpha)} \\ \frac{U}{\pi} \sqrt{(\pi \delta)^2 + \left(\frac{\sin 2 \pi \delta}{2} \right)^2 - \pi \delta \sin 2 \pi \delta \cos 2 \left(\pi \delta - \frac{2 \pi}{m} - \alpha \right)} \\ \dots \\ \frac{U}{\pi} \sqrt{(\pi \delta)^2 + \left(\frac{\sin 2 \pi \delta}{2} \right)^2 - \pi \delta \sin 2 \pi \delta \cos 2 \left(\pi \delta - (m-1) \frac{2 \pi}{m} - \alpha \right)} \end{pmatrix}$$

$$C_{kmax} = \begin{pmatrix} C_{kmax1} \\ C_{kmax2} \\ \dots \\ C_{kmaxn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_{max}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\sin(k-1)\pi\delta,2}{k-1} + \frac{\sin(k+1)\pi\delta,2}{k+1} - \frac{2\sin(k-1)\pi\delta\sin(k+1)\pi\delta\cos 2(\pi\delta-\alpha)}{k^2-1}} \\ \frac{U_{max}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\sin(k-1)\pi\delta,2}{k-1} + \frac{\sin(k+1)\pi\delta,2}{k+1} - \frac{2\sin(k-1)\pi\delta\sin(k+1)\pi\delta\cos 2(\pi\delta - \frac{2\pi}{m} - \alpha)}{k^2-1}} \\ \dots \\ \frac{U_{max}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\sin(k-1)\pi\delta,2}{k-1} + \frac{\sin(k+1)\pi\delta,2}{k+1} - \frac{2\sin(k-1)\pi\delta\sin(k+1)\pi\delta\cos 2(\pi\delta - (m-1)\frac{2\pi}{m} - \alpha)}{k^2-1}} \end{pmatrix}$$

$$\text{tg } \psi_I = \begin{pmatrix} \text{tg } \psi_{11} \\ \text{tg } \psi_{12} \\ \dots \\ \text{tg } \psi_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi\delta\sin\alpha - \sin 2\pi\delta\sin(2\pi\delta - \alpha)}{2\pi\delta\cos\alpha - \sin 2\pi\delta\cos(2\pi\delta - \alpha)} \\ \frac{2\pi\delta\sin(\frac{2\pi}{m} + \alpha) - \sin 2\pi\delta\sin(2\pi\delta - \frac{2\pi}{m} - \alpha)}{2\pi\delta\cos(\frac{2\pi}{m} + \alpha) - \sin 2\pi\delta\cos(2\pi\delta - \frac{2\pi}{m} - \alpha)} \\ \dots \\ \frac{2\pi\delta\sin((m-1)\frac{2\pi}{m} + \alpha) - \sin 2\pi\delta\sin(2\pi\delta - (m-1)\frac{2\pi}{m} - \alpha)}{2\pi\delta\cos((m-1)\frac{2\pi}{m} + \alpha) - \sin 2\pi\delta\cos(2\pi\delta - (m-1)\frac{2\pi}{m} - \alpha)} \end{pmatrix}$$

$$\text{tg } \psi_k = \begin{pmatrix} \text{tg } \psi_{k1} \\ \text{tg } \psi_{k2} \\ \dots \\ \text{tg } \psi_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(k+1)\sin(k-1)\pi\delta\sin((k-1)\pi\delta + \alpha) - (k-1)\sin(k+1)\pi\delta\sin((k+1)\pi\delta - \alpha)}{(k+1)\sin(k-1)\pi\delta\cos((k-1)\pi\delta + \alpha) - (k-1)\sin(k+1)\pi\delta\cos((k+1)\pi\delta - \alpha)} \\ \frac{(k+1)\sin(k-1)\pi\delta\sin((k-1)\pi\delta + \frac{2\pi}{m} + \alpha) - (k-1)\sin(k+1)\pi\delta\sin((k+1)\pi\delta - \frac{2\pi}{m} - \alpha)}{(k+1)\sin(k-1)\pi\delta\cos((k-1)\pi\delta + \frac{2\pi}{m} + \alpha) - (k-1)\sin(k+1)\pi\delta\cos((k+1)\pi\delta - \frac{2\pi}{m} - \alpha)} \\ \dots \\ \frac{(k+1)\sin(k-1)\pi\delta\sin((k-1)\pi\delta + (m-1)\frac{2\pi}{m} + \alpha) - (k-1)\sin(k+1)\pi\delta\sin((k+1)\pi\delta - (m-1)\frac{2\pi}{m} - \alpha)}{(k+1)\sin(k-1)\pi\delta\cos((k-1)\pi\delta + (m-1)\frac{2\pi}{m} + \alpha) - (k-1)\sin(k+1)\pi\delta\cos((k+1)\pi\delta - (m-1)\frac{2\pi}{m} - \alpha)} \end{pmatrix}$$

W napięciach fazowych odbiornika nie występuje składowa stała tzn.

$$C_0 = 0 \quad \text{dla } \delta \in \{0\} \cup \{1\}$$

Wartości ekstremalne składowej stałej napięcia wynoszą $\pm \frac{U_{\max}}{\pi}$. Harmoniczna podstawowa, będąca jednocześnie pierwszą harmoniczną napięcia, jest postaci:

$$\left[C_{1\max} \sin(\omega_1 t + \Psi_1) \right].$$

Składowe napięć fazowych układu obciążenia o pulsacjach:

$$\{\omega_1\}, \quad \left\{ \Omega_k^1 = \omega_1(1+k), k \in \mathbb{N} \right\}$$

tworzą m-fazowe układy napięć zgodnych względem napięć sieci zasilającej, natomiast składowe o pulsacjach:

$$\left\{ \Omega_k^2 = \omega_1(1-k), k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \right\}$$

tworzą m-fazowe układy napięć przeciwnych względem napięć sieci zasilającej.

Na rys. 5 przedstawiono widmo amplitudowe napięć fazowych układu obciążenia przy $\alpha = 0$ dla $\delta = 0,25; 0,50; 0,75; 1,00$.

2. Układ sterowany asynchronicznie: $\omega_1 \neq \omega_1 \Leftrightarrow T_1 \neq T_1$

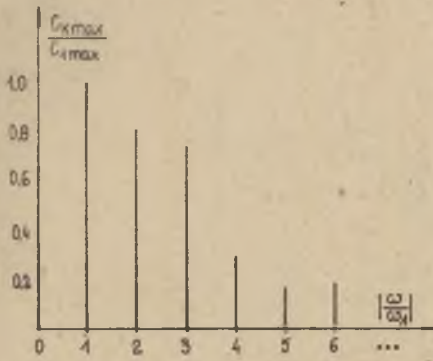
Przebiegi czasowe napięć fazowych układu obciążenia są w tym przypadku funkcjami okresowymi o okresie $T = [T_1, T_1]$ dla $\frac{1}{T_1} \in \mathbb{Q}$.

[...] - najmniejsza wspólna wielokrotność,

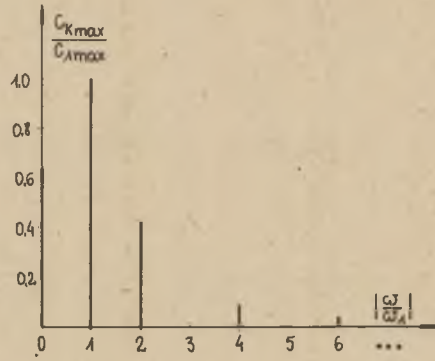
Q - ciało liczb wymiernych.

Stąd pulsacja przebiegu napięć fazowych odbiornika:

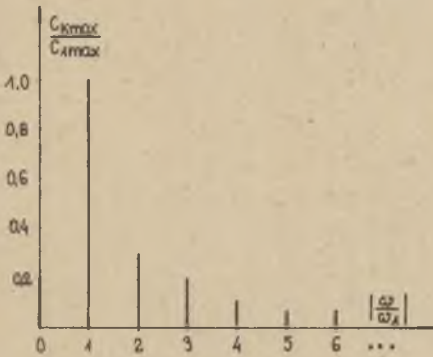
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{[T_1', T_1]}$$



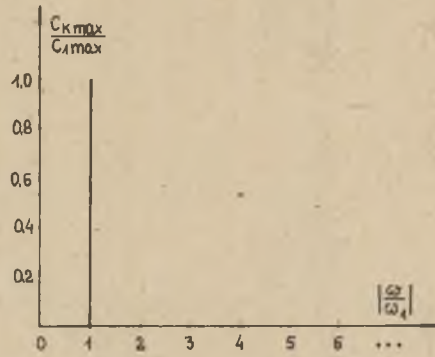
(I)



(II)



(III)



(IV)

Rys. 5. Widmo amplitudowe napięć fazowych układu obciążenia przy sterowaniu synchronicznym i $\alpha = 0$ dla (I) - $\delta = 0,25$; (II) - $\delta = 0,50$, (III) - $\delta = 0,75$, (IV) - $\delta = 1,00$

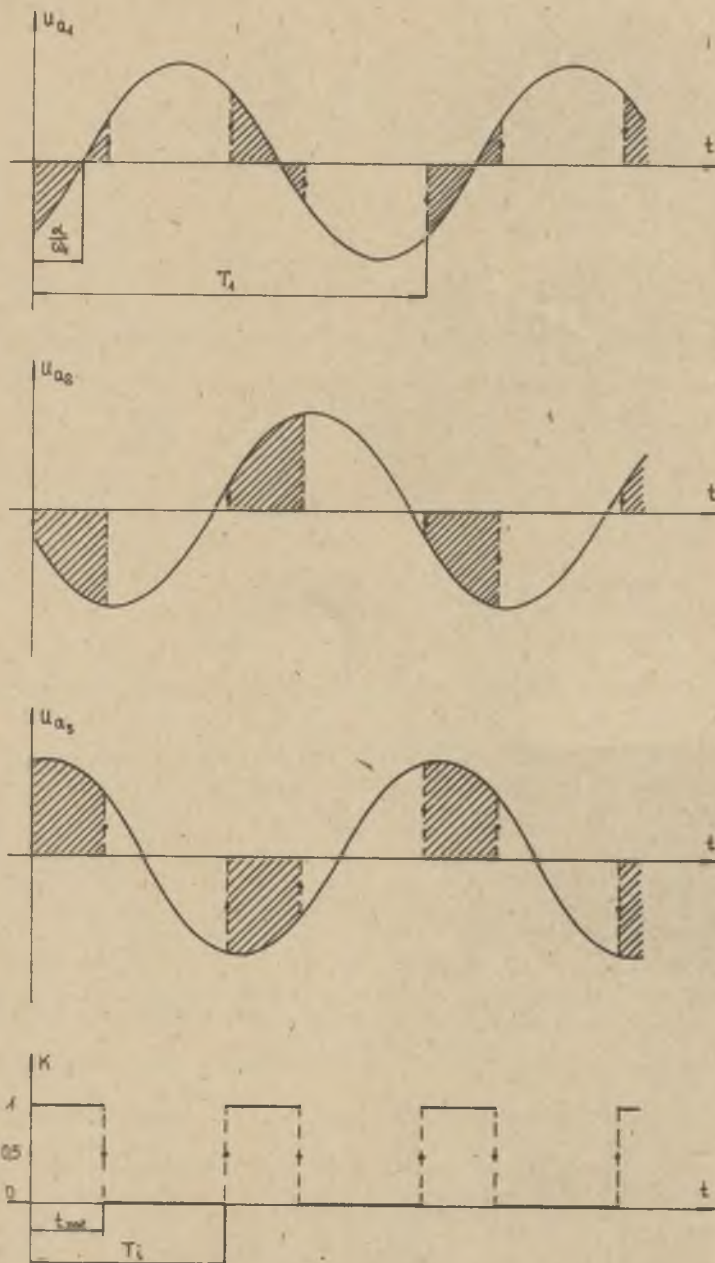
2.1. Układ sterowany nad synchronicznie: $\omega_1 > \omega_1 \Leftrightarrow T_1 < T_1$ (rys. 6)

Okres przebiegów napięć fazowych układu obciążenia jest nie mniejszy niż okres napięć sieci zasilającej:

$$T > T_1 > T_1.$$

Zatem pulsacja napięć fazowych odbiornika:

$$\omega \ll \omega_1 < \omega_1.$$



Rys. 6. Przebiegi czasowe napięć fazowych 3-fazowego układu obciążenia przy sterowaniu nadsynchronicznym $\omega_2 = 2\omega_1$ i $\alpha \neq 0$ dla (I) - $\delta = 0,25$, (II) - $\delta = 0,50$, (III) - $\delta = 0,75$, (IV) - $\delta = 1,0$

Najmniejszy z możliwych okres funkcji napięć fazowych:

$$T_{\text{MIN}} = T_1.$$

Stąd maksymalna pulsacja napięć fazowych odbiornika:

$$\omega_{\text{MAX}} = \frac{2\pi}{T_{\text{MIN}}} = \frac{2\pi}{T_1} = \omega_1.$$

Układy napięć zgodnych względem napięć sieci zasilającej tworzą harmoniczne o pulsacjach:

$$\left\{ \omega_1 \right\}$$

$$\left\{ \Omega_k^1 = \omega_1 + k\omega_1, k \in \mathbf{N} \right\}$$

Układy napięć przeciwnych tworzą składowe o pulsacjach:

$$\left\{ \Omega_k^2 = \omega_1 - k\omega_1, k \in \mathbf{N} \right\}$$

Harmoniczna podstawowa napięć fazowych odbiornika jest w ogólnym przypadku postaci (12). Przebiegi napięć fazowych układu nie zawierają:

(i) składowej stałej C_0 ,

(ii) składowej o pulsacji przebiegu impulsującego $\left\{ \omega_1 \right\}$.

Jeśli spełniona jest relacja:

$$\omega_1 = \frac{2\omega}{n}, \quad n \in \mathbf{N}$$

co w przyjętym zakresie częstotliwości impulsowania zachodzi jedynie dla $n = 1$, tj.:

$$\omega_1 = 2\omega,$$

to w zbiorze składowych $\left\{ \Omega_k^2, k \in \mathbf{N} \right\}$ wystąpi przeciwna harmoniczna o pulsacji sieciowej ω_1 :

Wartości ekstremalne amplitudy podstawowej harmonicznej napięć fazowych odbiornika wynoszą:

$$U_{\max} \left(\delta + \frac{\sin \pi \delta}{\pi} \right); \quad U_{\max} \left(\delta - \frac{\sin \pi \delta}{\pi} \right).$$

Dla przyjętej częstotliwości impulsowania harmoniczna podstawa napięcia jest jednocześnie pierwszą harmoniczną, a widmo napięć fazowych układu obciążenia zawiera wyłącznie harmoniczne nieparzyste.

Dla pulsacji przebiegu impulsującego ω_1 , leżących w przedziale

$$\omega_1 < \omega_i < \frac{2\omega_1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

co dla sterowania nadsynchronicznego ($n = 1$) odpowiada przedziałowi:

$$\omega_1 < \omega_i < 2\omega_1,$$

w widmie napięć fazowych odbiornika wystąpi podharmoniczna przeciwna o pulsacji $|\omega_1 - \omega_i|$ postaci:

$$\begin{pmatrix} \frac{U_{\max}}{\pi} \sin \pi \delta \sin [(\omega_1 - \omega_i)t + \pi \delta - \alpha] \\ \frac{U_{\max}}{\pi} \sin \pi \delta \sin [(\omega_1 - \omega_i)t + \pi \delta - \frac{2\pi}{n} - \alpha] \\ \dots \dots \dots \\ \frac{U_{\max}}{\pi} \sin \pi \delta \sin [(\omega_1 - \omega_i)t + \pi \delta - (m-1)\frac{2\pi}{m} - \alpha] \end{pmatrix} \quad (18)$$

Gdy:

$$\omega_i \geq 2\omega_1,$$

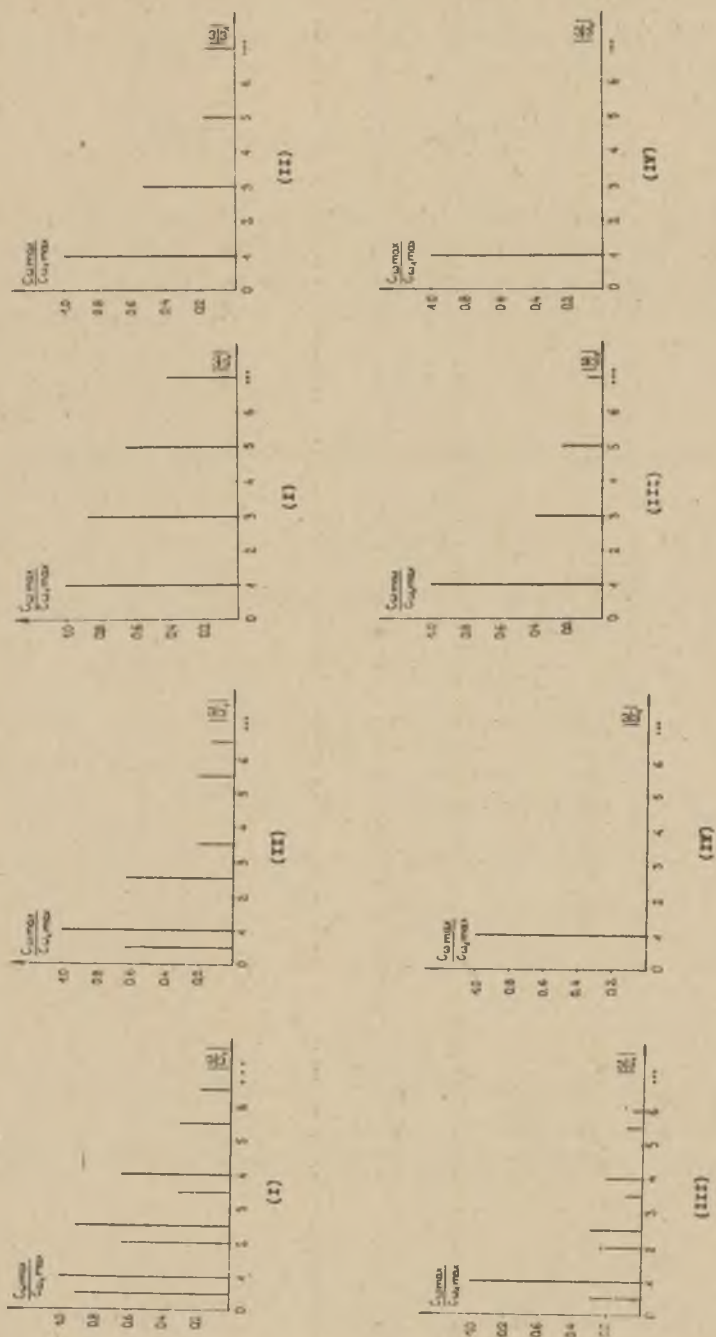
w przebiegach napięć fazowych odbiornika nie występują podharmoniczne względem podstawowej harmonicznej napięcia.

Jeśli pulsacja impulsowania jest krotnością pulsacji napięć sieci zasilającej, tzn.:

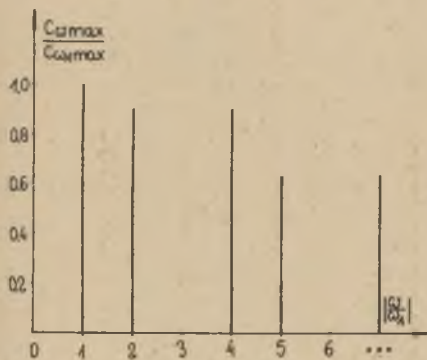
$$\omega_i = n \omega_1 \iff T_i = n T_1, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

to okres napięć fazowych odbiornika wynosi:

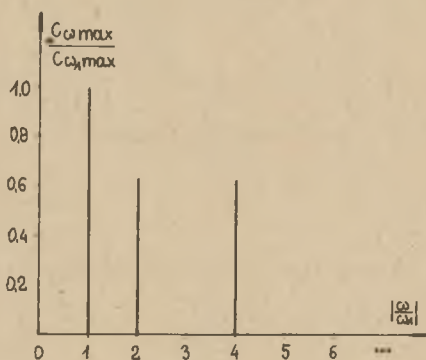
$$T = [T_1, T_i] = \left[T_1, \frac{T_i}{n} \right] = T_1.$$



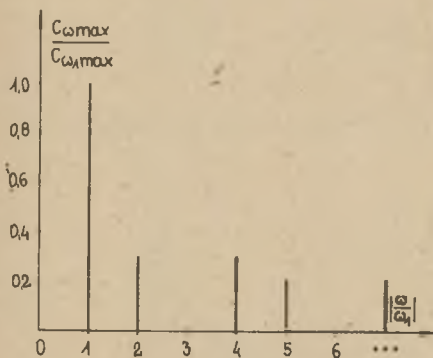
Rys. 7. Widmo amplitudowe napięć fazowych układu obciążenia przy sterowaniu nadsynchronicznym i $\alpha = 0$ dla:
 (A) - $\omega_1 = 1,5\omega_1$, (I) - $\delta = 0,25$, (II) - $\delta = 0,50$, (III) - $\delta = 0,75$, (IV) - $\delta = 1,00$
 (B) - $\omega_1 = 2\omega_1$, (I) - $\delta = 0,25$, (II) - $\delta = 0,50$, (III) - $\delta = 0,75$, (IV) - $\delta = 1,00$



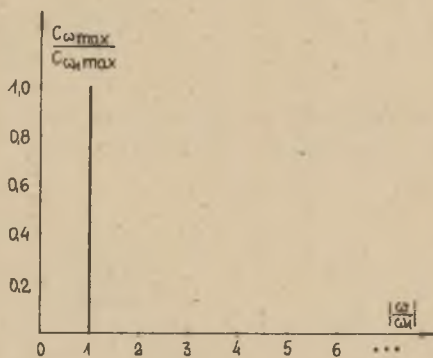
(I)



(II)



(III)



(IV)

Rys. 7. Widmo amplitudowe napięć fazowych układu obciążenia przy sterowaniu nadsynchronicznym i $\alpha = 0$ dla

(C) - $\omega_1 = 3\omega_1$, (I) - $\delta = 0,25$, (II) - $\delta = 0,50$, (III) - $\delta = 0,75$,
(IV) - $\delta = 1,00$

a stąd pulsacja

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_1} = \omega_1.$$

Oznacza to, że pierwsza harmoniczna napięć fazowych układu obciążenia jest jednocześnie harmoniczną podstawową, która jest znanej postaci - (12).

Na rys. 7 przedstawiono widmo amplitudowe napięć fazowych odbiornika przy $\alpha = 0$ oraz $\omega_1 = 1,5\omega_1$; $2\omega_1$; $3\omega_1$; dla $\delta = 0,25$; $0,50$; $0,75$; $1,00$.

2.2. Układ sterowany podsynchronicznie: $\omega_1 < \omega_1 \leftrightarrow T_1 > T_1$ (rys.8)

Okres przebiegów napięć fazowych układu obciążenia jest nie mniejszy niż okres przebiegu impulsującego:

$$T > T_1 > T_1,$$

zatem pulsacja napięć fazowych:

$$\omega \leq \omega_1 < \omega_1.$$

Najmniejszy z możliwych okres przebiegów napięć fazowych

$$T_{\text{MIN}} = T_1.$$

Stąd maksymalna pulsacja napięć fazowych odbiornika

$$\omega_{\text{MAX}} = \frac{2\pi}{T_{\text{MIN}}} = \frac{2\pi}{T_1} = \omega_1.$$

Układy napięć zgodnych względem napięć fazowych sieci zasilającej tworzą harmoniczne o pulsacjach:

$$\begin{aligned} & \{ \omega_1 \} \\ & \left\{ \Omega_k^1 = \omega_1 + k\omega_1, \quad k \in \mathbb{N} \right\} \\ & \left\{ \Omega_k^2 = \omega_1 - k\omega_1, \quad k < \frac{\omega_1}{\omega_1}, \quad k \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

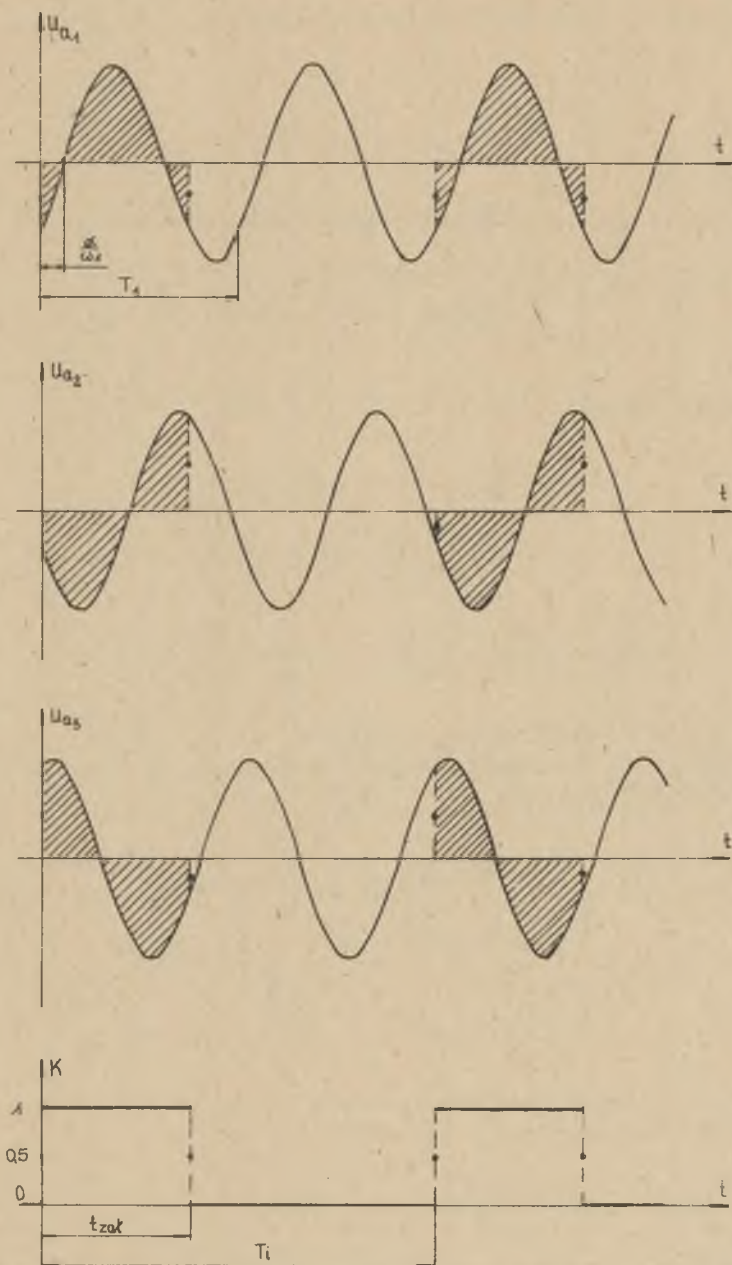
Układy napięć przeciwnych tworzą składowe o pulsacjach:

$$\left\{ \Omega_k^2 = \omega_1 - k\omega_1, \quad k > \frac{\omega_1}{\omega_1}, \quad k \in \mathbb{N} \right\}$$

Harmoniczna podstawowa napięć fazowych układu obciążenia jest ogólnie postaci (12).

Jeśli pulsacja przebiegu impulsującego spełnia relację:

$$\omega_1 = \frac{\omega_1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$



Rys. 8. Przebiegi czasowe napięć fazowych 3-fazowego układu obciążenia przy sterowaniu podsynchronicznym $\omega_1 = 0.5 \omega_2$ i $\alpha \neq 0$ dla $d = 0.375$

wówczas napięcia fazowe układu obciążenia zawierają składową stałą postaci:

$$C_0 = \begin{pmatrix} \frac{U_{\max}}{n\pi} \sin n\pi\delta \sin(n\pi\delta - \alpha) \\ \frac{U_{\max}}{n\pi} \sin n\pi\delta \sin(n\pi\delta - \frac{2\pi}{m} - \alpha) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{U_{\max}}{n\pi} \sin n\pi\delta \sin(n\pi\delta - (m-1)\frac{2\pi}{m} - \alpha) \end{pmatrix} \quad (19)$$

a ich pulsacja wynosi:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\left[\frac{T_1}{n}, T_1\right]} = \frac{2\pi}{T_1} = \omega_1.$$

Jeżeli:

$$\omega_1 = \frac{2\omega_z}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

co dla sterowania podasynchronicznego zachodzi dla $n = 3, 4, 5, \dots$, to w zbiorze składowych o pulsacjach $\{\Omega_k^2, k \in \mathbb{N}\}$ wystąpi harmoniczna o pulsacji sieciowej ω_1 postaci:

$$\begin{pmatrix} \frac{U_{\max}}{\pi} \frac{\sin n\pi\delta}{n} \sin(\omega_1 t - n\pi\delta + \alpha) \\ \frac{U_{\max}}{\pi} \frac{\sin n\pi\delta}{n} \sin(\omega_1 t - n\pi\delta + \frac{2\pi}{m} + \alpha) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{U_{\max}}{\pi} \frac{\sin n\pi\delta}{n} \sin(\omega_1 t - n\pi\delta + (m-1)\frac{2\pi}{m} + \alpha) \end{pmatrix} \quad (20)$$

przy czym jest to zawsze składowa przeciwna. Harmoniczna podstawowa napięć fazowych odbiornika jest wtedy postaci:

$$U_{\omega_1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{U_{\max}}{\pi} \left[\pi\delta \sin(\omega_1 t - \alpha) - \frac{\sin n\pi\delta}{n} \sin(\omega_1 t - n\pi\delta + \alpha) \right] \\ \frac{U_{\max}}{\pi} \left[\pi\delta \sin(\omega_1 t - \frac{2\pi}{m} - \alpha) - \frac{\sin n\pi\delta}{n} \sin(\omega_1 t - n\pi\delta + \frac{2\pi}{m} + \alpha) \right] \\ \dots\dots\dots \\ \frac{U_{\max}}{\pi} \left[\pi\delta \sin(\omega_1 t - (m-1)\frac{2\pi}{m} - \alpha) - \frac{\sin n\pi\delta}{n} \sin(\omega_1 t - n\pi\delta + (m-1)\frac{2\pi}{m} + \alpha) \right] \end{pmatrix} \quad (21)$$

lub w postaci równoważnej:

$$U_{\omega_1}(t) = \left[C_{\omega_1} \sin(\omega_1 t + \psi_{\omega_1}) \right] \quad (22)$$

gdzie:

$$C_{\omega_1} = \begin{pmatrix} C_{\omega_{11}} \\ C_{\omega_{12}} \\ \dots \\ C_{\omega_{1m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_{\max}}{\pi} \sqrt{(\pi\delta)^2 + \left(\frac{\sin n\pi\delta}{n}\right)^2 - 2\pi\delta \frac{\sin n\pi\delta}{n} \cos(n\pi\delta - 2\alpha)} \\ \frac{U_{\max}}{\pi} \sqrt{(\pi\delta)^2 + \left(\frac{\sin n\pi\delta}{n}\right)^2 - 2\pi\delta \frac{\sin n\pi\delta}{n} \cos(n\pi\delta - \frac{4\pi}{m} - 2\alpha)} \\ \dots \\ \frac{U_{\max}}{\pi} \sqrt{(\pi\delta)^2 + \left(\frac{\sin n\pi\delta}{n}\right)^2 - 2\pi\delta \frac{\sin n\pi\delta}{n} \cos(n\pi\delta - (m-1)\frac{4\pi}{m} - 2\alpha)} \end{pmatrix}$$

$$\text{tg } \psi_{\omega_1} = \begin{pmatrix} \text{tg } \psi_{\omega_{11}} \\ \text{tg } \psi_{\omega_{12}} \\ \dots \\ \text{tg } \psi_{\omega_{1m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{n\pi\delta \sin\alpha - \sin n\pi\delta \sin(n\pi\delta - \alpha)}{n\pi\delta \cos\alpha - \sin n\pi\delta \cos(n\pi\delta - \alpha)} \\ -\frac{n\pi\delta \sin(\frac{2\pi}{m} + \alpha) - \sin n\pi\delta \sin(n\pi\delta - \frac{2\pi}{m} - \alpha)}{n\pi\delta \cos(\frac{2\pi}{m} + \alpha) - \sin n\pi\delta \cos(n\pi\delta - \frac{2\pi}{m} - \alpha)} \\ \dots \\ -\frac{n\pi\delta \sin[(m-1)\frac{2\pi}{m} + \alpha] - \sin n\pi\delta \sin[n\pi\delta - (m-1)\frac{2\pi}{m} - \alpha]}{n\pi\delta \cos[(m-1)\frac{2\pi}{m} + \alpha] - \sin n\pi\delta \cos[n\pi\delta - (m-1)\frac{2\pi}{m} - \alpha]} \end{pmatrix}$$

Wartości ekstremalne amplitudy podstawowej harmonicznej napięć wynoszą:

$$U_{\max}(\delta + \frac{\sin n\pi\delta}{n}), \quad U_{\max}(\delta - \frac{\sin n\pi\delta}{n}).$$

Gdy:

$$\omega_1 = \frac{\omega_1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

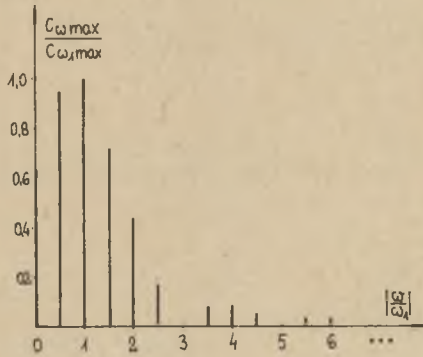
to w widmie napięć fazowych układu wystąpi składowa zgodna o pulsacji przebiegu impulsującego ω_1 . Gdy natomiast

$$\omega_1 = \frac{\omega_1}{n-1}, \quad n = 3, 4, \dots,$$

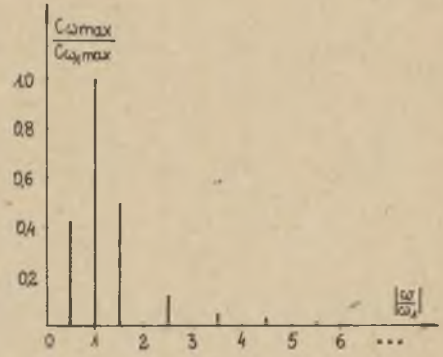
to w widmie napięć układu wystąpi składowa przeciwna o pulsacji ω_1 .

Dla przypadku sterowania podsynchronicznego w napięciach fazowych układu obciążenia zawsze występują podharmoniczne, zarówno zgodne jak i przeciwne, względem harmonicznej podstawowej napięcia.

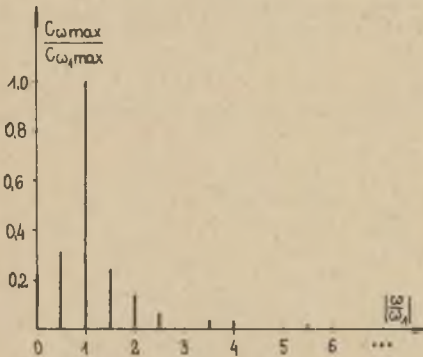
Na rys. 9 przedstawiono widmo amplitudowe napięć fazowych odbiornika przy $\alpha = 0$ oraz $\omega_1 = 0,5 \omega_1$ dla $\delta = 0,25; 0,50; 0,75; 1,00$.



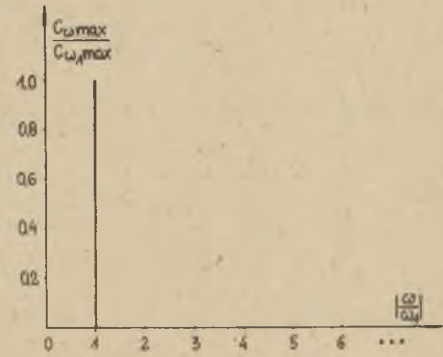
(I)



(II)



(III)



(IV)

Rys. 9. Widmo amplitudowe napięć fazowych układu obciążenia przy sterowaniu podsynchronicznym $\omega_1 = 0,5 \omega_1$ i $\alpha = 0$ dla (I) - $\delta = 0,25$, (II) - $\delta = 0,50$, (III) - $\delta = 0,75$, (IV) - $\delta = 1,00$

Uwagi i wnioski

Z przeprowadzonej analizy funkcji napięć fazowych wielofazowego układu obciążenia sterowanego impulsowo wynika, że:

- przebiegi czasowe napięć fazowych są funkcjami okresowymi dla $\frac{T_1}{T_1} \in \mathbb{Q}$ o okresie $T = [T_1, T_1]$, czyli o pulsacji $\omega = \frac{2\pi}{[T_1, T_1]}$,
- poszczególne składowe napięć fazowych m -fazowego układu obciążenia o jednakowych pulsacjach tworzą m -fazowe symetryczne systemy napięć dla każdego $m \in \mathbb{N}$,
- jako harmoniczną podstawową (dominującą) napięć fazowych odbiornika przyjęto składową o pulsacji napięć sieci zasilającej ω_1 ,
- zmieniając względny czas załączenia δ klucza K w przedziale $[0, 1]$ steruje się, w ogólnym przypadku, amplitudą podstawowej harmonicznej napięcia w zakresie $[0, U_{\max}]$,
- wraz ze zmniejszaniem względnego czasu załączenia δ klucza K wzrasta zawartość harmonicznych względem harmonicznej podstawowej w widmie napięć fazowych układu obciążenia,
- dla pulsacji impulsowania $\omega_1 > 2\omega_1$ w widmie napięć fazowych układu obciążenia nie występuje składowa stała ani podharmoniczne względem harmonicznej podstawowej napięcia; ten zakres pulsacji ω_1 jest zatem najkorzystniejszy, zwłaszcza gdy obciążeniem jest maszyna asynchroniczna,
- dla pulsacji impulsowania leżących w przedziale $\omega_1 < \omega_1 < 2\omega_1$ w widmie napięć fazowych układu obciążenia nie występuje składowa stała, wystąpi natomiast podharmoniczna przeciwna o pulsacji $|\omega_1 - \omega_1|$,
- w przypadku sterowania synchronicznego, tj. $\omega_1 = \omega_1$, napięcia fazowe odbiornika zawierają składową stałą, nie występują natomiast podharmoniczne względem harmonicznej podstawowej napięcia,
- dla sterowania podsynchronicznego układu, tj. $\omega_1 < \omega_1$, w widmie napięć fazowych odbiornika zawsze występują podharmoniczne względem podstawowej harmonicznej napięcia; jeśli ponadto $\omega_1 = \frac{\omega_1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, to przebiegi napięć fazowych odbiornika zawierają również składową stałą.

Jak więc widać, częstotliwość impulsowania wykazuje istotny wpływ na skład jakościowy harmonicznych w napięciach fazowych układu obciążenia sterowanego impulsowo. Poprzez właściwy jej dobór można w naturalny sposób eliminować pewne składowe napięć, szczególnie niekorzystne dla danego układu obciążenia, np. składową stałą, podharmoniczne itp. Fakt ten ma olbrzymie znaczenie i może być szeroko wykorzystywany w praktyce impulsowego sterowania układów.

LITERATURA

- [1] Bólkowski S.: Obwody elektryczne liniowe w stanie ustalonym, WNT, Warszawa 1974.
- [2] Brandt A.: Der Netztaktumrichter, ein neues Umrichtungsverfahren für kollektorlose Drehstromantriebe NT 1969.
- [3] Cholewicki T.: Elektrotechnika teoretyczna, t. II, WNT, Warszawa 1971.
- [4] Kuratowski K.: Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN, Warszawa 1971.
- [5] Kurdziel R.: Podstawy elektrotechniki, WNT, Warszawa 1973.
- [6] Leja F.: Funkcje zespolone, PWN, Warszawa 1973.
- [7] Opiał Z.: Algebra wyższa, PWN, Warszawa 1970.
- [8] Rudin W.: Principles of Mathematical Analysis McGraw-Hill Book Company (tłum. pol.), PWN, Warszawa 1976.
- [9] То́лстов G.P.: Ряды Фурье (tłum. pol.), PWN, Warszawa 1954.
- [10] Tunia H., Poźniak T.: Przemienник częstotliwości o komutacji wewnętrznej. Przegląd Elektrotechniczny Nr 9, 1974.
- [11] Tunia H., Winiarski B.: Podstawy energoelektroniki, WNT, Warszawa 1975.
- [12] Zagajewski T.: Układy elektroniki przemysłowej, WNT, Warszawa 1971.

Przyjęto do druku w maju 1977 r.

АНАЛИЗ ФАЗНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ МНОГОФАЗНОЙ СИСТЕМЫ С ИМПУЛЬСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Р е з ю м е

В работе проведен анализ фазных напряжений m -фазной системы нагрузки с периодическим замыканием накоротко нулевой точки системы. Рассмотрено подсинхронное, синхронное и надсинхронное управление системы нагрузки. Определен диапазон оптимальных частот управляемых импульсов.

THE ANALYSIS OF THE PHASE VOLTAGES OF THE POLYPHASE CIRCUIT WITH PULSE CONTROL

S u m m a r y

In the paper the analysis of the phase voltages of the m -phase load circuit with periodical short-circuit of the load neutral point is presented. There is considered subsynchronous, synchronous and supersynchronous control of the load circuit. The optimum pulse frequency range is defined.