ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978
Seria: GÓRNICTWO z. 93 Nr kol. 597

DANUTA MILEWSKA
EUGENIUSZ SROCZYNSKI
INSTYTUT MATEMATYKI
POLITECHNIKA SLASKA
GLIWICE

PEWIEN PROBLEM PODWYŻSZENIA NIEZAWODNOŚCI DZIAŁANIA ODDZIAŁU WYDOBYWCZEGO

W pracy rozpatruje się ścianę zapasową w celu zmniejszenia strat wydobywczych powstałych z powodu remontu lub awarii. Rozwiązanie otrzymuje się przez zastosowanie teorii decyzji oraz teorii gier z wyborem momentu czasu.

1. Sformułowanie zadania

W pracy rozpatruje się następujące zagadnienie praktyczne: w określonym pokładzie kopalni pracuje n ścian zmechanizowanych. k ścian wyposażonych i przygotowanych do produkcji stanowi ściany zapasowe, które można uruchomić w razie potrzeb celem zapewnienia realizacji zadania produkcyjnego. Uruchomienie tych ścian wymaga oczywiście kosztów i czasu.

W przypadku awarii uruchomienie ściany zapasowej wydaje się oczywiste, ale zależy ono od rodzaju awarii oraz czasu jej pojawienia się. Należy rozpatrzeć problem, czy naprawa awarii nie jest tańsza od uruchomienia ściany zapasowej oraz czy czas pozwala na uruchomienie ściany zapasowej.

Z drugiej strony wiadomo, że wyposażenie mechaniczne od czasu do czasu powinno podlegać remontom planowanym. Na ten czas można uruchomić ścianę zapasową. Wydłużenie czasu pracy powoduje wzrost zagrożenia pojawienia się awarii, pozostaje więc problem wyznaczenia odpowiedniego momentu remontu, czyli wyznaczenie momentu wymiany uprzedzającego awarię.

Przez używany w pracy termin 'awaria ściany' rozumie się wszystkie awarie mechaniczne jak i górnicze powodujące przerwanie pracy na ścianie.

Całe zadanie proponuje się rozwiązać następująco: dla każdej ściany wyznaczyć moment wymiany uprzedzającej, a w przypadku pojawienia się awarii rozpatrzenie celowości uruchomienia ściany zapasowej.

Sformułowane zadanie zostanie rozwiązane w oparciu o teorię gier oraz teorię decyzji.

2. Podstawy teoretyczne pracy

Grą dwuosobową antagonistyczną nazywamy każdą trójkę $T=\langle X,Y,K\rangle$, gdzie X,Y są dowolnymi zbiorami, a $K:X\times Y\to R$ jest dowolną funkcją rzeczywistą. Każdy element $x\in X$ nazywamy strategią czystą I gracza, a każdy element $y\in Y$ nazywamy strategią czystą II gracza. Funkcję $K(x,y)$ nazywa się funkcją wypłaty (wygrana I gracza lub przegrana II gracza).

Jeżeli gracz I obierze strategię x, to jego wygrana nie będzie mniejsza niż:

$$\underline{v}(x)=\inf_{y\in Y} K(x,y)$$

W interesie I gracza jest obrać taką strategię x, aby $v(x)$ było możliwie największe. Jego wygrana wynosi wówczas:

$$\underline{v}=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} K(x,y)$$

W interesie II gracza natomiast jest obrać taką strategię y, aby $\overline{v}(y)=\sup_{x\in X} K(x,y)$ było możliwie najmniejsze. Jego przegrana wynosi wówczas:

$$\overline{v}=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} K(x,y)$$

Gra nazywa się zamknięta, jeżeli $\underline{v}=\overline{v}=v$, v nazywa się wówczas wartością gry. W przypadku $\underline{v}<\overline{v}$ gra nazywa się otwarta.

Jeżeli strategie x_0, y_0 spełniają warunek:

$$K(x,y_0)\leqslant v\leqslant K(x_0,y)$$

to $v=K(x_0,y_0)$ i strategie te nazywamy strategiami optymalnymi I i II gracza.

W przypadku gry otwartej żaden z graczy nie posiada optymalnej strategii czystej i wówczas przechodzimy do tak zwanej gry randomizowanej

$$\overline{T}=\langle\overline{X},\overline{Y},\overline{K}\rangle$$

gdzie $\overline{X},\overline{Y}$ są rozkładami prawdopodobieństwa na zbiorach X,Y.

W pracy tej rozpatrywana będzie gra, dla której $X=Y=\langle 0,1\rangle$. W tym przypadku $\overline{X},\overline{Y}$ oznaczają wszystkie zbiory mierzalne odcinka $\langle 0,1\rangle$, a

$$\overline{K}=\int_0^1\int_0^1 K(x,y)\,dF(x)\,dG(y)=\overline{K}(F,G)$$

gdzie $F(x)$ i $G(y)$ są funkcjami rozkładów prawdopodobieństwa na odcinku $\langle 0,1\rangle$. Funkcje nazywamy strategiami mieszanymi gry T.

Wartość gry randomizowanej $\bar{T}$ nazywamy wartością gry T.

Będziemy rozpatrywać grę o funkcji:

$$K(x,y)=\begin{cases} L(x,y) & x<y \\ \Phi(x) & x=y \\ M(x,y) & x>y \end{cases}$$

gdzie funkcje $L(x,y)$, $M(x,y)$ spełniają następujące założenia:

(a) $L(x,y)$ i $M(x,y)$ posiadają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego odpowiednio w trójkącie $0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$.

(b) $\dfrac{\partial L(x,y)}{\partial x}>0$ i $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial x}>0$

$\dfrac{\partial L(x,y)}{\partial y}<0$ $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}<0$

$L(x,y)$ oraz $M(x,y)$ rośnie względem x dla wszystkich y oraz maleją względem y dla wszystkich x

(c) $L(x,y)>\Phi(x)>M(x,y)$ dla wszystkich x oraz $L(0,0)=\Phi(0)=M(0,0)$

Dla rozkładu prawdopodobieństwa $F(x)$ na odcinku $\langle 0,1\rangle$ oznaczamy $f(x)=F'(x)$ dla $x\in(a,1\rangle$. Niech y będzie dowolnym punktem z przedziału $\langle a,1\rangle$, wtedy fundamentalne równanie całkowe dla I gracza jest postaci:

$$f(y)-\int_a^1 T_k(x,y)f(x)dx=\alpha^0 p_0(y) \tag{1}$$

gdzie $\alpha^0=F(0^+)$ $0\leqslant\alpha^0<1$

$$T_k(x,y)=\begin{cases} \dfrac{-\dfrac{\partial L(x,y)}{\partial y}}{L(y,y)-M(y,y)} & a\leqslant x<y\leqslant 1 \\[2ex] \dfrac{-\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{L(y,y)-M(y,y)} & a\leqslant y<x\leqslant 1 \end{cases}$$

i $p_0(y)=\dfrac{-\dfrac{\partial L(x,y)}{\partial y}}{L(y,y)-M(y,y)}$

oraz

$$\int_a^1 f(x)dx=1-\alpha^0 \tag{2}$$

$$v=\alpha^0 L(0,y)+\int_a^y L(x,y)f(x)dx+\int_y^1 M(x,y)f(x)dx \tag{3}$$

<u>Twierdzenie</u>: Optymalna strategia $F(x)$ istnieje i jest postaci:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ \alpha^0 & 0<x<a \\ \alpha^0+\int_a^x f(t)dt & a\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby α^0, a $(0\leqslant\alpha^0<1; 0\leqslant a<1)$ i taka funkcja $f(x)$określona dla $a \leqslant x \leqslant 1$, która spełnia warunki (1),(2)i(3).

Elementami określającymi problem decyzyjny bez danych są:zbiór F stanów przyrody T_1, zbiór D dostępnych działań oraz funkcja $l(T_1,d)$,która stanowi miarę liczbową konsekwencji pary akcja-stan.Wartość funkcji $l(t,d)$ możemy interpretować jako stratę wywołaną podjęciem decyzji d przy faktycznym stanie przyrody t.

Zakładamy,że istnieje niepewność odnośnie prawdziwego stanu przyrody, np. T_1 jest zmienną losową i przed podjęciem którejkolwiek decyzji ze zbioru akcji dostępnych należy przeprowadzić analizę zagadnienia.

W niektórych zagadnieniach przed podjęciem decyzji można uzyskać dodatkowe informacje o stanie przyrody,np.wykonać doświadczenie,w wyniku którego otrzymamy informację z.Doświadczenie musi być tak zorganizowane, aby otrzymane dane były generowane przez faktyczny stan przyrody.Zakładamy więc,że z jest zmienną losową,przy czym znamy rozkład prawdopodobieństwa

$$f(z/T_1)=P(Z=z/T_1)$$

Decyzja musi w tym wypadku zależeć od otrzymanego wyniku z obserwowanej wielkości Z.

Zatem $d=d(Z)$

jest też zmienną losową,jak również funkcja straty

$$l(T_1,d(Z))$$

jest zmienną losową.

Wartość oczekiwaną strat nazwiemy funkcję ryzyka:

$$R(T_1,d)=E(l(T_1,d(Z))) = \sum_i l(T_1,d(Z))\, f(z_i/T_1)$$

lub

$$R(T_1,d)= \int_Z l(T_1,d(Z))\, f(z/T_1)dz$$

Problem decyzji bez danych i z danymi jest w istocie taki sam.Wybór funkcji decyzyjnej $d(Z)$,gdy znana jest funkcja ryzyka ,ale stan przyrody jest nieznany pod względem matematycznym,jest tym samym problemem,co wybór działania d przy znanej funkcji straty l i nieznanym T_1.Zwykle lista funkcji decyzyjnych jest dłuższa niż liczba działań.W obu problemach trzeba znaleźć schemat porządkowania reguł decyzyjnych.

Zasada 1.

$$M(d)=\max_{T_1} R(T_1,d)$$

Wybieramy tę funkcję decyzyjną d,dla której maksymalne ryzyko $M(d)$ jest najmniejsze.

Zasada 2.

Przypiszemy stanom przyrody T_1 rozkład a priori z funkcją gęstości $g(t)$ i wyznaczymy ryzyko przeciętne dla wszystkich stanów

$$B(d)=E(R(T_1,d))= \int_{T_1} R(t,d)g(t)dt$$

Najlepszą decyzją jest ta,dla której to ryzyko jest najmniejsze.

3. Wymiana uprzedzająca awarię oraz decyzja w przypadku wystąpienia awarii

1) Założenia

a) Mamy n ścian pracujących i k ścian zapasowych. Sciany pracujące ulegają awarii i należy wówczas uruchomić ścianę zapasową. Może wystąpić też wymiana uprzedzająca awarię.

b) Każdej ścianie pracującej Z_j jest przyporządkowany podzbiór ścian E_i, którymi Z_j może służyć do wymiany. Podzbiory $\{E_i\}$ przyporządkowane różnym ścianom Z_j nie muszą być rozłączne.

c) W momencie wymiany wiadomo, czy odpowiednia ściana zapasowa jest wolna (zdolna do pracy).

d) Zbiór ścian zapasowych nie jest ustalony raz na zawsze. Po usunięciu awarii lub przeglądzie ściana staje się zapasową.

e) Dla każdej ściany Z_j w stanie pracy znany jest okres T_j, w którym musi nastąpić wymiana uprzedzająca, jeżeli wcześniej nie nastąpi awaria losowa. Znamy początek tego okresu.

2) Budowa funkcji wypłaty i funkcji strat.

Rozpatrzmy pracę jednej ściany Z w czasie T. Chcemy wyznaczyć moment x wymiany uprzedzającej. To zadanie potraktujemy jako grę z wyborem momentu czasu na odcinku unormowanym $T_i = \langle 0,1 \rangle$.

Niech y oznacza moment awarii losowej. W rzeczywistości mogą zajść trzy przypadki:

$$x < y \quad , \quad x = y \quad , \quad x > y \quad .$$

Funkcję $K(x,y)$ proponujemy przyjąć następującą:

$$K(x\ y) = \begin{cases} \beta P_{ox} - \alpha P_{xy} & x < y \\ \beta P_{ox} - \alpha P_{oy} . & x = y \\ \gamma P_{yx} - l P_{oy} & x > y \end{cases}$$

gdzie:

α - oznacza wypłatę kar przez załogę

β - oznacza wypłatę premii dla załogi

γ - oznacza wypłatę premii w przypadku, gdy

l - strata poniesiona w przypadku, gdy awaria losowa wyprzedzi moment wymiany uprzedzającej

oraz

P_{ox} - prawdopodobieństwo, że wymiana nastąpi w czasie $\langle 0,x \rangle$

P_{xy} - prawdopodobieństwo, że awaria wystąpi w czasie $\langle x,y \rangle$

P_{yx} - prawdopodobieństwo, że wymiana nastąpi w czasie $\langle y,x \rangle$ po awarii

P_{oy} - prawdopodobieństwo, że awaria nastąpi w czasie $\langle 0,y \rangle$

Współczynniki α, β, γ, l można uzależnić od rodzaju awarii, czasu trwania remontu itp.. Rozwiązaniem tak sformułowanego zadania jest optymalna strategia $(F(x))$ załogi. Jest to rozkład prawdopodobieństwa dla momentów x wymiany uprzedzającej, gwarantujący minimalne straty.

Jeśli dla ustalenia uwagi przyjmiemy, że wraz ze wzrostem czasu pracy rośnie zagrożenie pojawienia się awarii, to wówczas możemy przyjąć że:

$P_{cx} = x$, $P_{oy} = y$, $P_{xy} = y - x$, $P_{yx} = x - y$

oraz biorąc $y = \beta$ i $1 = \alpha$ otrzymamy funkcję wypłaty:

$$K(x, y) = \begin{cases} \beta x - \alpha(y-x) & x<y \\ \beta x - \alpha y & x=y \\ \beta(x-y) - \alpha y & x>y \end{cases}$$

a dla niej optymalną strategię postaci:

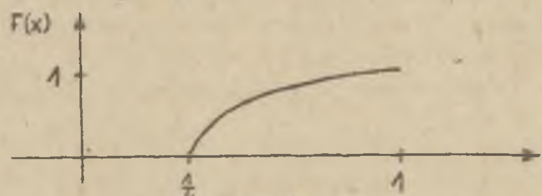
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}} = \delta \\ \int_{\delta}^{x} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot t^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}-1} dt & \delta \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Aby uprościć przykład przyjmijmy, że zarówno kara jak i premia wynoszą 1, wówczas otrzymamy:

$$K(xy) = \begin{cases} 2x-y & x<y \\ x-y & x=y \\ x-2y & x>y \end{cases}$$

i

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{4} \\ 2 - \frac{1}{\sqrt{x}} & \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$



rys 1

Załóżmy dalej, że mamy 5 ścian pracujących i 1 ścianę zapasową, dla każdej z nich zgodnie z rozkładem F(x) generujemy momenty x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, następnie wybieramy:

$$x = \min_i x_i$$

W ten sposób można wyznaczyć moment oraz ścianę wymiany.

Jeżeli którąś ze ścian pracujących z_i ulega awarii przed czasem x, to w momencie awarii należy podjąć decyzję, czy uruchomić ścianę zapasową czy nie, zakładając, że ściana zapasowa jest w stanie podjąć pracę. Konieczna jest analiza strat.

Niech stan przyrody T_1 oznacza długość awarii. Jest to zmienna losowa. Niech dalej zbiór D dostępnych działań zawiera 3 elementy:

d_1 - nie uruchamiać ściany zapasowej

d_2 - uruchamiać ścianę zapasową

d_3 - odczekać czas T i jeżeli awaria nie zostanie usunięta, to przeprowadzić analizę na nowo.

Każdej z tych akcji towarzyszy strata ekonomiczna. Proponujemy następującą konstrukcję funkcji straty jako funkcję czasu t.

$l(t,d_i)$ oznacza stratę w przypadku podjęcia decyzji d_i, pod warunkiem, że czas trwania awarii jest t.

$l(t,d_1)=K_i \cdot Q_i \cdot t$ gdzie i-nr ściany w awarii

Q_i - średnia wydajność produkcji tego elementu

K_i - strata wynikła z przerwanej produkcji

Jeżeli nie uruchamiamy ściany zapasowej, to straty są proporcjonalne do czasu trwania awarii.

$$l(t,d_1)=\begin{cases} K_i \cdot Q_i \cdot t & \text{dla} \quad 0<t<T_{min} \\ K_i \cdot Q_i \cdot t+K_1-K_2(t-T_{min}) \cdot Q_2(t-T_{min}) & \text{dla} \quad t>T_{min} \end{cases}$$

T_{min} - minimalny czas na uruchomienie ściany zapasowej E_j (czas przejścia załogi) T_{min} zależy od pary (i,j).

K_1 - stały koszt uruchomienia ściany zapasowej (koszt transportu załogi, koszt energii itp.).

K_2 - zysk

$$Q_2(t)=\begin{cases} \alpha q_2 \cdot t & 0 \leqslant t \leqslant T_0-T_{min} \\ \alpha q_2 \cdot (T-T_{min})=Q_2 & t>T_0-T_{min} \end{cases}$$

$Q_2(t)$ oznacza wydajność produkcji na ścianie zapasowej, zależną od czasu. W początkowym okresie rozruchu wydajność jest proporcjonalna do czasu t, a potem ustalona na poziomie Q_2.

Zatem:

$$l(t,d_2)=\begin{cases} K_i \cdot Q_i \cdot t & 0 \leqslant t<T_{min} \\ K_i \cdot Q_i \cdot t+K_1-K_2 \alpha q_2(t-T_{min})^2 & T_{min}<t<T_0 \\ K_i \cdot Q_i \cdot t+K_1-K_2 Q_2 (t-T_{min}) & t>T_0 \end{cases}$$

i

$$l(t,d_3)=K_i \cdot Q_i \cdot T_0'+l(t-T_0',d_i) \qquad i=1,2$$

Dla wyboru najlepszej decyzji posłużymy się zasadą II (Bayesa). Założymy rozkład prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej T_1 - czasu trwania awarii. Niech funkcja gęstości będzie $f(t)$. Obliczamy wartość oczekiwaną funkcji straty

$$B(d_i)=E(l(t,d_i))=\int_0^{\infty} l(t,d_i)f(t)dt \qquad i=1,2$$

Dla $B(d_3)$ możemy posłużyć się rozkładem warunkowym

$$f(t/T_2=T_1)$$

i

$$B(d_3)=\int_0^{\infty} l(t,d_3)f(t/T_2)dt$$

Rozpatrzmy pochodną

$$d_t'(t,d_2)=\begin{cases} K_i \cdot Q_i-2K_2 \alpha q_2 (t-T_{min}) \\ K_i \cdot Q_i-K_2 Q_2 \end{cases}$$

wierzchołek paraboli $t-T_{min}=\frac{K_i Q_i}{2K_2 \alpha q_2}$ i jeśli

a) $K_2 Q_2<K_i Q_i<2K_2 Q_2$

produkcja na ścianie jest mniejsza niż stracona,ale dwukrotnie mniejsza

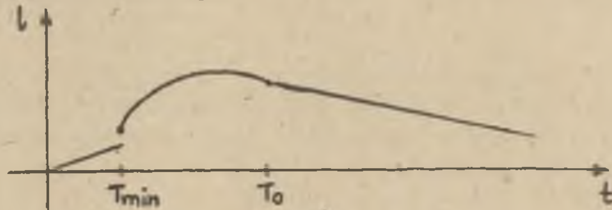
Wtedy $\dfrac{K_i Q_i}{2K_2 \alpha q_2} > \dfrac{T_0 - T_{min}}{2}$ wierzchołek na prawo od środka odcinka $\langle T_{min}, T \rangle$

Nachylenie prostej dla $t > T_0$ większe niż styczna do paraboli.

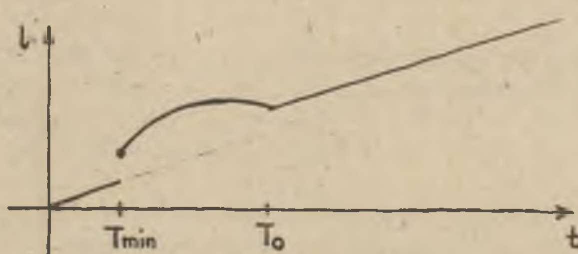
b) $K_i Q_i > 2K_2 Q_2$ – wierzchołek na prawo od T_0

c) $K_i Q_i < K_2 Q_2$

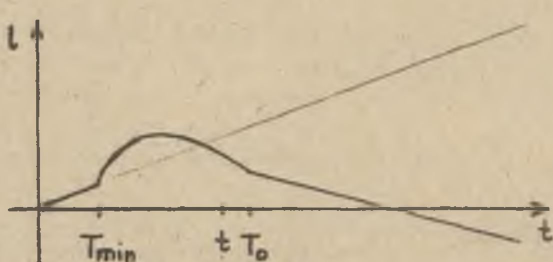
$\dfrac{K_i Q_i}{2K_2 \alpha q_2} < \dfrac{T_0 - T_{min}}{2}$ wierzchołek na lewo od środka odcinka $\langle T_{min}, T \rangle$.Nachylenie prostej ujemne.Prosta powyżej stycznej.Powyższą dyskusję ilustrują rysunki 1,2,3,4.



rys 2



rys 3



rys 4

Należy zauważyć,że tak rozumiana ściana zapasowa jest właściwie ścianą zawsze pracującą.Mamy tutaj do czynienia z pewną kontrolą procesu awarii. Sciana nie pracująca to ściana zagrożona awarią i podlegająca w czasie postoju remontowi lub ściana,która uległa awarii i podlega naprawie. Zmienność ściany zapasowej w całym procesie jej stosowania powoduje,że "ściana zapasowa" staje się terminem symbolicznym,a koszt ściany zapasowej ze względu na jej pracę maleje.

LITERATURA

[1] J.R.Benjamin,C.A.Cornell: Rachunek prawdopodobieństwa,statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne — Warszawa 1977.

[2] S.Karlin: Mathematical Methods and Theory in Games,Programing and Economics - Pergamon Press - London Paris - 1959 .

ПРОБЛЕМА ПОВЫШЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ РАБОТЫ ВЫЕМОЧНОГО УЧАСТКА

Р е з ю м е

В статье рассматривается резервную лаву с целью уменьшения эксплуатационных потерь, которые возникают из-за ремонта или аварии. Решение проблемы возможно, если применить теорию решения и теорию игр, учитывая соответствующий момент времени.

A PROBLEM ON IMPROVEMENT OF A FLAT OPERATION RELIABILITY

S u m m a r y

In this paper a spare longwall face is taken under consideration with view to reduce mining losses resulting from its repairs and breakdowns. A solution is given due to the application of decision theory and game theory with time selection.