

Piotr DUDZIK

Politechnika Śląska

Ośrodek Geometrii i Grafiki Inżynierskiej

Edwin KOŹNIEWSKI

Politechnika Białostocka

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska

O GEOMETRYCZNEJ ZWARTOŚCI BUDYNKÓW W ASPEKCIE CZYNNIKÓW EKOLOGICZNO-EKONOMICZNYCH

Streszczenie. Niniejsza praca zawiera sformułowanie różnych wskaźników zwartości geometrycznej bryły i analizę 30 przykładowych projektów domów jednorodzinnych. Proponowana analiza, na kanwie sformułowanych wskaźników, może ułatwić projektantowi przyjęcie kompromisu pomiędzy czynnikami architektonicznymi (funkcjonalność, estetyka), budowlanymi (konstrukcja), ekonomicznymi (koszt wzniesienia i eksploatacji obiektu), ekologicznymi (komfort zamieszkania, oszczędność energii).

Słowa kluczowe: zwartość budynku, ekonomia, ekologia, geometria.

THE GEOMETRIC COMPACTNESS OF BUILDINGS IN THE CONTEXT OF ECOLOGICAL-ECONOMIC FACTORS

Summary. This paper presents the formulation of various type of indicators of geometric compactness of solids and analysis of the 30 sample projects houses. The proposed analysis (based on indicators drawn up) can help the designer to adopt a compromise between architectural factors (functionality, aesthetics), building (construction), economic (cost of elevation and use facility), environmental (home comfort, energy savings).

Keywords: compactness of building, economic, ecology, geometry.

1. Geometryczne wskaźniki zwartości budynku

Na etapie projektowania obok oczywistych czynników architektoniczno-budowlanych warto analizować geometrię bryły budynku, z uwagi na koszty wznoszenia obiektu, a także na oszczędność energii w czasie użytkowania budynku (czynnik ekonomiczno-ekologiczny). Jako wskaźnik geometryczny minimalizujący nakłady finansowe przyjmowany jest często „iloraz powierzchni przegród zewnętrznych i objętości budynku” [4]. Iloraz ten lub jego odwrotność nazywa się zwartością (geometryczną) budynku. Jednakże tak określony

wskaźnik ma co najmniej dwie wady: zależy od przyjętych jednostek miary i jego bezwzględny charakter nie pokazuje jasno ww. oszczędności. Dlatego Mahdavi i Guterkin w 2002 roku wprowadzili do analizy kształtu bryły geometrycznej pojęcie tzw. względnej zwartości, odniesione do sześcianu lub kuli [3]. Zdaniem autorów niniejszego referatu wskaźniki takie również nie dają oczekiwanych wyobrażeń o pożądanym kształcie budynku. Proponuje się więc nowe różne „urealnienia” względnej zwartości bryły, na przykład poprzez odniesienie do graniastostupa prostego o podstawie kwadratowej, o wysokości równej lub zbliżonej do wysokości kondygnacji budynku [1].

W domyśle bierzemy pod uwagę budynek (jako bryłę graniastą) o podstawie np. wielokąta prostokątnego i mierzymy jego pole podstawy A (rzut, powierzchnia zabudowy), obwód p i wyznaczamy objętość (kubaturę) $V = A \cdot h$, pole powierzchni ścian (zewnątrznych) $VE = p \cdot h$ oraz pole powierzchni całkowitej $CA = p \cdot h + 2A$. Stosunek $GCS = CA/V$ (ang. *Geometric Compactness of Solid*) to potocznie zwartość, ale wyrażająca się w jednostkach [1/m]. Załóżmy teraz, że bryła budynku o kubaturze $V = A \cdot h$ jest sześcienna i wyznaczając długość krawędzi sześcianu $a = \sqrt[3]{A \cdot h} = (A \cdot h)^{\frac{1}{3}}$, znajdujemy stosunek pól powierzchni (całkowitej) bryły sześcianu do bryły rozważanego budynku [3]:

$$RC = \frac{6(A \cdot h)^{\frac{2}{3}}}{p \cdot h + 2A} \quad (1)$$

Nazywamy go zwartością względną bryły (RC – ang. *Relative Compactness*) odniesioną do sześcianu. Taki wskaźnik może dawać zniekształcony obraz zwartości budynku, który jest na przykład prostopadłością o wysokości znacznie większej od wymiarów podstawy. Przy wzroście wysokości oraz stałym polu podstawy i obwodzie wartość RC maleje.

Bryła budynku, niezależnie od stopnia wyidealizowania wymiarów, powinna mieć określoną wysokość (dla budynku mieszkalnego jednokondygnacyjnego możemy przyjąć $h = 2,70$ m). Stąd optymalizacja powierzchni powinna odnosić się do wzorcowej bryły o wysokości h . Taką bryłą jest prostopadłością o podstawie kwadratu o krawędzi długości a . Wówczas stosunek pól powierzchni (całkowitej) bryły prostopadłością do bryły graniastostupa o dowolnej podstawie (rozważanego budynku) jest równy (RCC – ang. *Relative Compactness of Solid with relation to Cuboid*):

$$RCC = \frac{4A^{\frac{1}{2}}h + 2A}{p \cdot h + 2A} \quad (2)$$

Funkcja (2) przy ustalonym polu i obwodzie jest funkcją homograficzną i w szczególności, przy dużej różnicy między wysokością i polem podstawy (np. w budynku wysokim) wskaźnik ma wartość: $RCC = 4\sqrt{A}/p$.

Można wreszcie zrezygnować z uwzględniania wysokości budynku oraz powierzchni podstaw bryły: dolnej i górnej. Stąd optymalizacja powierzchni obejmować będzie jedynie

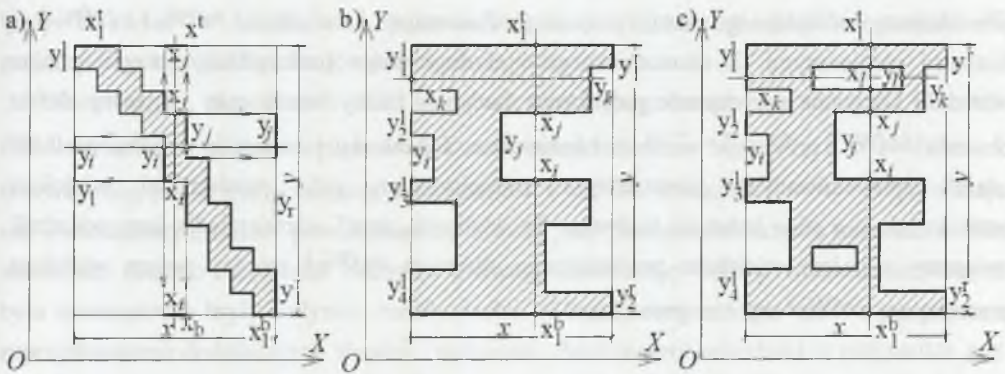
kształt podstawy (planu budynku). Wtedy zwartość geometryczna względem podstawy (RCB – ang. *Relative Compactness of solid with Relation to Base*) wyraża się wzorem:

$$RCB = \frac{4\sqrt{A}}{p} \quad (3)$$

Dla porządku podajmy też wzór na zwartość względną bryły w odniesieniu do kuli (RCS – ang. *Geometric Compactness of Solid with relation to Sphere*) [3]:

$$RCS = \frac{(36\pi)^{\frac{1}{3}}(A \cdot h)^{\frac{2}{3}}}{p \cdot h + 2A} \quad (4)$$

Współczynnik we wzorze (4) – równy w przybliżeniu 4,84 – wyraża stosunek pola powierzchni kuli do jej objętości, przy założeniu, że objętość ta jest równa 1. Podobnie wartość 6 we wzorze (1) wyraża stosunek pola powierzchni sześcianu do jego objętości, przy założeniu, że objętość tego sześcianu jest równa 1. Zwartość kuli jest więc większa (wartość stosunku 4,84 – mniejsza) niż sześcianu (wartość stosunku 6 – większa).



Rys. 1. Wielokąty prostokątne wpisane w prostokąt P (o bokach x^b, y^r, x^l, y^l) o wymiarach $x \times y, x=9u, y=12u$ jako podstawy bryły graniastosłupa o wysokości $h=2,7u$ (u – liniowa jednostka miary): a) normalny (monotoniczny względem obu osi OX i OY układu współrzędnych [5]), z zerowym defektem obwodu ($\Delta p=0, \delta p=0$), z dużym defektem pola ($\Delta a=88u^2, \delta a=0,81$), o geometrycznej zwartości $RC=0,56$ (przy $h=2,7u$), $RCC=0,58$ (przy $h=2,7u$), $RCB=0,43$; b) wielokąt jednoczołny, monotoniczny względem osi OY , z defektem obwodu ($\Delta p=24u, \delta p=0,57$), z defektem pola ($\Delta a=38u^2, \delta a=0,35$), o geometrycznej zwartości $RC=0,62$ (przy $h=2,7u$), $RCC=0,72$ (przy $h=2,7u$), $RCB=0,51$; c) wielokąt trójzoczołny z defektem obwodu ($\Delta p=40u, \delta p=0,95$), z defektem pola ($\Delta a=44u^2, \delta a=0,41$), o geometrycznej zwartości $RC=0,53$ (przy $h=2,7u$), $RCC=0,61$ (przy $h=2,7u$), $RCB=0,39$

Fig. 1. Rectangular polygons inscribed in a rectangle P (with sides x^b, y^r, x^l, y^l) with dimensions $x \times y, x=9u, y=12u$ as the basis of a solid prism with a height $h=2,7u$ (u – linear unit of measure): a) normal (monotone relative to both axes OX and OY of coordinate system [5]), with zero perimeter defect ($\Delta p=0, \delta p=0$), with a large area defect ($\Delta a=88u^2, \delta a=0,81$) of geometric compactness $RC=0,56$ (with $h=2,7u$), $RCC=0,58$ (with $h=2,7u$), $RCB=0,43$; b) simply connected polygon, monotone relative to the axis OY , with perimeter defect ($\Delta p=24u, \delta p=0,57$), with area defect ($\Delta a=38u^2, \delta a=0,35$) of geometric compactness $RC=0,62$ (with $h=2,7u$), $RCC=0,72$ (with $h=2,7u$), $RCB=0,51$; c) three times connected polygon with perimeter defect ($\Delta p=40u, \delta p=0,95$), with area defect ($\Delta a=44u^2, \delta a=0,41$) of geometric compactness $RC=0,53$ (with $h=2,7u$), $RCC=0,61$ (with $h=2,7u$), $RCB=0,39$

Dla obiektów zbudowanych na planie tzw. wielokąta prostokątnego (wielokąta, który ma kąty proste: wypukłe o mierze 90° lub wklęsłe o mierze 270°) warto określić jeszcze inne pojęcia charakteryzujące zwartość geometryczną budynku [2]. Okazuje się bowiem, że wprowadzenie kątów wklęsłych w obrysie budynku automatycznie powoduje zmniejszenie powierzchni użytkowej przy danej powierzchni ścian zewnętrznych (stałym obwodzie wielokąta). Dla uzasadnienia tego faktu wygodnie jest odnieść dany wielokąt prostokątny W_P do prostokąta P na nim opisanego (rys. 1). Jeżeli oznaczymy przez $p(F)$ obwód obszaru F , to w odniesieniu do wielokąta W_P wpisanego w prostokąt P możemy określić tzw. *defekt obwodu* wielokąta W_P jako różnicę:

$$\Delta p(W_P) = p(P) - p(W_P) \quad (5)$$

i następnie *względny defekt obwodu* wielokąta W_P jako iloraz [1]:

$$\delta a(W_P) = \frac{\Delta p(W_P)}{p(P)}. \quad (6)$$

Jest to niemianowany wskaźnik miary odchylenia długości obwodu wielokąta prostokątnego od opisanego na nim prostokąta. Zauważmy, że wielkości $\Delta p(W_P)$ i $\delta a(W_P)$ są liczbami nieujemnymi. Z ekonomicznego i ekologicznego (oszczędność energii) punktu widzenia korzystne rozwiązanie projektowe budynku mamy wtedy, gdy względny defekt obwodu $\delta a(W_P)$ przyjmuje wartości bliskie zeru. Jednak dalej pozostaje otwarta wielkość „strat” spowodowanych ewentualnym zmniejszeniem pola powierzchni wielokąta prostokątnego, a więc kubatury budynku. Tę wielkość „strat” odzwierciedla inny wskaźnik związany z polem wielokąta prostokątnego. Różnicę $\Delta a(W_P)$ między polem wielokąta prostokątnego $a(W_P)$ a polem prostokąta:

$$\Delta a(W_P) = a(P) - a(W_P) \quad (7)$$

będziemy nazywać *defektem pola* wielokąta prostokątnego, a iloraz:

$$\delta a(W_P) = \frac{\Delta a(W_P)}{a(P)} \quad (8)$$

względnym defektem pola wielokąta prostokątnego W_P w odniesieniu do opisanego na nim prostokąta P [1]. Wskaźnik ten wyraża procentowy udział „strat” powierzchni zabudowy (kubatury budynku) w stosunku do pola powierzchni prostokąta, a przy zachowaniu wielkości obwodu wielokąta prostokątnego (np. w przypadku normalnego wielokąta prostokątnego) wyraża udział „strat” powierzchni zabudowy przy danych zasobach zużycia materiałów budowlanych przy wznoszeniu obiektu i zapotrzebowania na energię w czasie użytkowania budynku. Analiza przykładowych, z przesadnie dużą liczbą kątów wklęsłych, wielokątów prostokątnych na rys. 1 pokazuje, jak znaczne możemy ponieść straty pola powierzchni użytkowej w stosunku do obwodu obrysu budynku, czyli powierzchni ścian zewnętrznych.

W aspekcie oszczędności materiałowej i złożoności technologii wykonania obiektu przyjęcie kątów wklęsłych w obrysie budynku generuje rozmaite problemy: niekorzystne zwiększenie geometrycznej zwartości budynku, a tym samym kosztów materiałowych, robocizny, energochłonności w czasie użytkowania; zwiększenie liczby naroży (potencjalnych mostków cieplnych); prawdopodobne utrudnienie przyszłej eksploatacji budynku, ale równocześnie powoduje ułatwienie (w pewnym sensie) rozwiązań konstrukcyjnych poprzez możliwość zmniejszenia rozpiętości, zwiększenie możliwości optymalnego wykorzystania działki itd. Ponadto istnienie kątów prostych wklęsłych w obrysie budynku otwiera przed projektantem większe możliwości „wyrzeźbienia” bryły budynku i dachu.

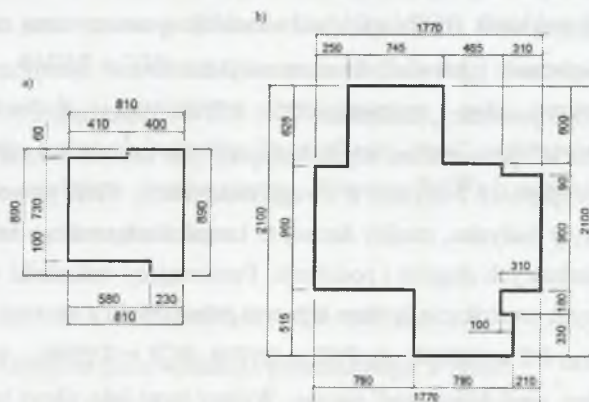
2. Analiza ekologiczno-ekonomiczna projektów budynków mieszkalnych

W celu zilustrowania funkcjonowania, różnych wskaźników zwartości geometrycznej bryły obecnych w literaturze i wprowadzonych przez autorów, poddano analizie 30 przykładowych projektów domów jednorodzinnych.

Obserwujemy, że wskaźnik RCC lepiej odzwierciedla geometryczną zwartość. Budynek C214 (rys. 2a) o podstawie „prawie” kwadratowej ma $RCC = 0,9749$, a więc blisko 1 (i wydaje się, że tak być powinno), natomiast $RC = 0,8521$. Wskaźnik $\delta = 0,1146$ informuje nas o ewidentnej „stracie” powierzchni użytkowej przy tym samym zużyciu materiałów. Nie zmieniono istotnie rozpiętości budynku z uwagi konstrukcję. Jeśli powodem estetycznym było urozmaicenie bryły budynku, rzeźby dachu, to kształt dachu można zmienić np. poprzez zaprojektowanie dodatkowych słupów i podcienia. Porównajmy wskaźniki w przypadku, gdy zostaniemy przy pełnym prostokącie, a więc lepszym rozwiązaniu z naszego punktu widzenia. Otrzymujemy wówczas $RC = 0,8539$, ale $RCC = 0,9996$, $RCB = 0,9988$ – bliskie 1,00; $\delta = 0$ – strat „na powierzchni, czyli kubaturze” nie ma. Weźmy teraz jako obrys budynku – kwadrat (z punktu widzenia genezy sformułowania wskaźników RCC i RCB rozwiązanie idealne). Otrzymujemy wartości $RC = 0,8540$, ale $RCC = 1,0$, $RCB = 1,0$, oczywiście $\delta = 0$. Wskaźniki dalej wskazują na bardzo dobrą zwartość geometryczną budynku.

Kolejno rozpatrzmy budynek M112 (rys. 2b), o podstawie szesnastokąta prostokątnego. Wartość wskaźnika $RCC = 0,9416$, jest mniejsza od wartości tego samego wskaźnika z projektu C214 i dużo mniejsza od 1, co świadczy o stosunkowo małej zwartości budynku. Podobnie $RC = 0,6503$ wskazuje na niższą zwartość, jednakże tu trudniejsze jest odniesienie do sytuacji idealnej (optymalnej), która w przypadku wskaźnika RCC jest jednoznaczna i jasna, jest bowiem równa jeden. Łatwo to wyjaśnić, wszak optymalna bryła sześcienna, w odniesieniu do dużej powierzchni budynku, ma względnie dużą wysokość (w tym przypadku równą 8,82 m, dom miałby optymalną zwartość, gdyby miał wysokość równą

właśnie 8,82 m; odpowiednia wysokość dla projektu C214 jest zdecydowanie mniejsza, gdyż wynosi 5,56 m) w porównaniu do przyjętej do analizy wysokości budynku równej $h = 2,70$ m. To powoduje, że różnica między wartościami wskaźnika RC dla C214 i M112 jest większa niż różnica między odpowiednimi wartościami wskaźnika RCC . Zwiększenie wymiarów obrysu budynku, a więc pola powierzchni (np. użytkowej) spowoduje dalsze zwiększenie ww. różnicy. Wartość wskaźnika $RCB = 0,8031$ w porównaniu do wartości z projektu C214 ($RCB = 0,9399$), z uwagi na pominięcie wysokości, w łatwiejszy w odbiorze sposób przedstawia różnicę w zwartości bryły budynku. Jest to konsekwencja zbyt dużego obwodu w porównaniu z polem, ale to wyraża wskaźnik δa . Jak już zwróciliśmy uwagę, analizując projekt C214, wskaźnik $\delta a = 0,3164$ informuje nas o „stracie” powierzchni użytkowej (stosunkowo duża utrata powierzchni), a wskaźnik $\delta p = 0,0258$ o większym zużyciu materiału potrzebnego na wzniesienie ścian. Rozpatrując wskaźniki RCC oraz defekty pola i obwodu, można jednoznacznie ocenić wpływ przyjętego kształtu budynku na koszty jego wzniesienia (ekonomia), a w późniejszym czasie również na koszty eksploatacji (zużycie energii, ekologia). Reasumując, budynek M112 ma dużo gorsze parametry zwartości geometrycznej niż M112.



Rys. 2. Rzuty analizowanych projektów: a) projekt C214; b) projekt M112

Źródło: Opracowanie własne na podstawie <http://projekty.murator-dom.pl/>.

Fig. 2. Projection of the analyzed projects: a) C214 project; b) M112 project

Source: own elaboration based on <http://projekty.murator-dom.pl/>.

Przedstawione w tabeli 1 zestawienie 30 analizowanych projektów zawiera podział budynków ze względu na liczbę ścian (od 8 do 16). W każdej z grup projekty uszeregowano od tego o najmniejszej powierzchni do tego o największej. Ponadto zaznaczono kolorami (od zielonego – najmniejsza wartość wskaźnik, do czerwonego – największa) wartości poszczególnych parametrów projektów.

Tabela 1

Zestawienie analizowanych projektów

Lp.	Nazwa modelu	Liczba ścian	Pole prostokąta opisanego na wielokącie [m ²]	Pole powierzchni wielokąta [m ²]	Obwód prostokąta [m ²]	Obwód wielokąta [m]	RC	RCC	RCB	RCS	Defekt pola	Defekt obwodu
1	C214	8	72,09	63,83	34	34	0,8521	0,9749	0,9399	0,6857	0,1146	0
2	C150	8	84,49	81,52	38	38	0,8287	0,9808	0,9504	0,6669	0,0352	0
3	WM02	8	110	92,60	42	42	0,8026	0,9683	0,9165	0,6459	0,1581	0
4	C116	8	120,19	105,61	44	44	0,7928	0,9763	0,9342	0,6380	0,1213	0
5	WM24	8	127,92	119,52	48,4	48,4	0,7685	0,9659	0,9035	0,6184	0,0657	0
6	C119	8	140	127,05	48	48	0,7713	0,9795	0,9393	0,6207	0,0925	0
7	WM06	8	178,1	140,22	53,4	53,4	0,7444	0,9616	0,8870	0,5990	0,2127	0
8	WM21	8	200,64	140,98	58	58	0,7233	0,9353	0,8189	0,5821	0,2973	0
9	C86	10	174,8	127,71	53,4	53,4	0,7432	0,9446	0,8465	0,5981	0,2694	0
10	C34	10	339,48	273,93	74,2	74,2	0,6603	0,9711	0,8922	0,5314	0,1931	0
11	C110	12	132,99	121,87	47,2	47,2	0,7755	0,9779	0,9355	0,6241	0,0836	0
12	C80	12	160,32	134,92	52,6	52,6	0,7480	0,9598	0,8833	0,6019	0,1584	0
13	M133	12	170,28	136,47	52,2	54,2	0,7403	0,9519	0,8621	0,5958	0,1986	0,0383
14	WM05	12	217,1	140,75	59,4	61,9	0,7063	0,9131	0,7666	0,5684	0,3517	0,0421
15	WM23	12	218,68	157,01	59,2	59,2	0,7193	0,9483	0,8466	0,5788	0,2820	0
16	C204	12	198,72	159,96	56,4	56,4	0,7308	0,9668	0,8970	0,5881	0,1950	0
17	M89	12	232,56	177,09	63,6	63,6	0,7023	0,9468	0,8370	0,5651	0,2385	0
18	M130	12	279,48	228,42	68,2	70,7	0,6757	0,9573	0,8551	0,5438	0,1827	0,0367

cd. tabeli 1

Lp.	Nazwa modelu	Liczba ścian	Pole prostokąta opisanego na wielokącie [m ²]	Pole powierzchni wielokąta [m ²]	Obwód prostokąta [m ²]	Obwód wielokąta [m]	RC	RCC	RCB	RCS	Defekt pola	Defekt obwodu
19	C30	14	171,76	141,55	53	53	0,7463	0,9657	0,8979	0,6006	0,1759	0
20	C163	14	219,8	167,12	59,4	69,3	0,6807	0,9007	0,7306	0,5478	0,2711	0,1667
21	C126	14	255,64	194,85	64	65,2	0,6958	0,9553	0,8564	0,5599	0,2378	0,0188
22	M142	14	261	211,83	65	65	0,6946	0,9694	0,8956	0,5590	0,1884	0
23	M119	14	282,8	225,11	68,4	75,6	0,6674	0,9357	0,7938	0,5330	0,2040	0,1053
24	C146	16	179,28	135,29	54,8	54,8	0,7374	0,9466	0,8490	0,5934	0,2454	0
25	WM10	16	243,36	138,66	62,4	64,8	0,6937	0,8943	0,7269	0,5582	0,4302	0,0385
26	C59	16	184,71	139,13	54,4	55,6	0,7340	0,9469	0,8486	0,5907	0,2468	0,0221
27	C184	16	218,23	164,73	59,2	59,2	0,7193	0,9566	0,8672	0,5788	0,2452	0
28	C198	16	251,37	174,10	63,6	63,6	0,7023	0,9438	0,8298	0,5652	0,3074	0
29	C179	16	288,91	177,48	68	68	0,6868	0,9262	0,7836	0,5527	0,3857	0
30	M112	16	371,7	254,11	77,4	79,4	0,6503	0,9416	0,8031	0,5233	0,3164	0,0258

RC (ang. *Relative Compactness*) – względna zwartość bryły; RCC (ang. *Relative Compactness of solid with relation to Cuboid*) – względna zwartość bryły względem prostopadłościanu o podstawie kwadratu i wysokości równej wysokości bryły; RCB (ang. *Relative Compactness of solid with relation to Base*) – względna zwartość bryły mierzona zwartością podstawy; RCS (ang. *Relative Compactness of solid with relation to Sphere*) – względna wskaźnik zwartości bryły geometrycznej względem kuli

Proponowana, na kanwie sformułowanych wskaźników, analiza może ułatwić projektantowi przyjęcie kompromisu pomiędzy czynnikami architektonicznymi (funkcjonalność, estetyka), budowlanymi (konstrukcja), ekonomicznymi (koszt wzniesienia i eksploatacji obiektu), ekologicznymi (komfort zamieszkania, oszczędność energii).

Bibliografia

1. Dudzik P., Koźniewski E.: O geometrycznej zwartości budynków na planie wielokąta prostokątnego. Manuscript, Białystok 2011.
2. Koźniewski E.: Geometria dachów. Teoria i zastosowanie. Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Białystok 2007.
3. Mahdavi A., Guterkin B.: Shapes, Numbers, and Perception: Aspects and Dimensions of the Design Performance Space. Proceedings of the 6th International Conference: „Design and Decision Support Systems in Architecture”, Ellecom 7–10 July 2002.
4. Menkhoff H., Blum A., Trykowski M., Wentz E., Zapke W.: Energetisches Bauen. Eergiewirtschaftliche Aspectezur Planung und Gestaltung von Wohngebäuden, 04.086/1983, Schriftenreihe „Bau- und Wohnforschung“ des Bundesministers für Raumordnung, Bauwesen und Städtebau, Bonn 1983.
5. Preparata F.P., Shamos M.I.: Geometria obliczeniowa. Wydawnictwo Helion, Gliwice 2005.