ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978
Seria: ELEKTRYKA z. 61 Nr kol. 553

Władysław PASZEK

Zakład Maszyn Elektrycznych
Politechniki Śląskiej

WPŁYW STAŁYCH ROZŁOŻONYCH W KLATKACH WIRNIKÓW GŁĘBOKOŻŁOBKOWYCH NA NIEUSTALONE PRZEBIEGI ELEKTRODYNAMICZNE SILNIKÓW INDUKCYJNYCH

Streszczenie. Przedstawiono metodę analizy stanów elektrodynamicznych maszyn asynchronicznych, na podstawie równań różniczkowych stanu elektromagnetycznego i elektromechanicznego, obowiązujących dla wektorów (macierzy kolumnowych) wielkości elektromagnetycznych, stransformowanych ze współrzędnych fazowych do nowego układu współrzędnych diagonalizujących macierze indukcyjności stojana i wirnika. Wirniki głębokożłobkowe, o obwodach elektrycznych wykazujących stałe rozłożone, analizuje się w stanie elektrodynamicznym przez zastąpienie tych obwodów obwodami wirnika o stałych skupionych. Przedstawiono różne metody aproksymacji tych obwodów, wychodząc bądź ze ścisłego schematu zastępczego w relacjach operatorowych dla pręta głębokożłobkowego, bądź z umyślonego podziału globalnego przekroju pręta głębokożłobkowego na fragmenty przekroju włókien przewodzących elektromagnetycznie sprzężonych.

1. Stan nieustalony maszyny indukcyjnej o stałych skupionych

Analiza symetrycznej maszyny indukcyjnej, najprostszej i najpowszechniej stosowanej maszyny elektrycznej, stwarza poważne trudności teoretyczne, z uwagi na skomplikowane interakcje harmonicznych przestrzennych przepływu stojana i wirnika i wpływ nasycenia obwodu magnetycznego. Ścisła analiza stanów nieustalonych takiej maszyny pozostaje jeszcze ciągle w stadium studialnym [1], mimo daleko idących założeń upraszczających: nienasyconego obwodu magnetycznego i traktowania obwodów elektrycznych wirnika i stojana, jako obwodów o stałych skupionych. Równania stanu wywodzą się z praw Kirchhoffa, przy uwzględnieniu zależności indukcyjności wzajemnej obwodów stojana i wrinika od kąta położenia wirnika.

Uproszczenie relacji otrzymuje się przy poczynieniu następujących założeń:

a) ograniczenie rozważań do podstawowej harmonicznej przepływu uzwojeń - co sprowadza się do wprowadzenia modelu matematycznego maszyny zastępczej i uzwojenia stojana (i często również wirnika) o rozłożeniu sinusoidalnym po umownym włączeniu strumienia w szczelinie wyższych harmonicznych przestrzennych do strumienia rozproszenia odpowiednio stłumionego (co uwzględnia się przez wprowadzenie tzw. rozproszenia od wyższych harmonicznych),

b) przyjęcie nienasyconego obwodu magnetycznego (założenie to może być niepotrzebne dla wyidealizowanej maszyny z uzwojeniami o rozłożeniu sinusoidalnym),

c) pominięcie wszelkich innych obwodów elektrycznych poza obwodem uwzojeń (obwodów prądów wirowych, wynikających ze stratności przemagnesowania blach) i pominięcie histerezy magnetycznej,

d) przyjęcie stałych skupionych w pierścieniu zwierającym wirnik klatkowy.

Konsekwencją tych założeń jest cykliczność macierzy indukcyjności własnych uzwojeń stojana i wirnika oraz cykliczność macierzy rezystancji i indukcyjności połączeń czołowych (sektorów pierścienia zwierającego) "obwodów" fazowych wirnika oraz sinusoidalna zależność od położenia wirnika indukcyjności wzajemnych między obwodami stojana i wirnika. "Obwody" fazowe klatkowego wirnika (wielofazowego) najwygodniej jest traktować, jako "obwody" o zwojności 1/2. Cykliczność macierzy umożliwia dokonanie liniowej transformacji układu współrzędnych fazowych stojana i wirnika do nowego układu współrzędnych, w którym zachodzi diagonalizacja macierzy indukcyjności własnych oraz rezystancji i indukcyjności połączeń czołowych wirnika.

Otrzymuje się nowy układ współrzędnych, wynikający z wektorów własnych macierzy fazowych indukcyjności uzwojeń stojana, określających macierz transformacji (unitarną, a po odpowiednim przekształceniu ortogonalną) z układu m_1 współrzędnych fazowych do nowego układu m_1 współrzędnych α_1, β_1, $O_1^{(1)}$, $O_{1r,i}^{(2)}, \dots O_{1r,i}^{(P_1)}$. Wartości własne macierzy fazowych indukcyjności własnych są indukcyjnościami przekątnej macierzy dla relacji liniozwoje-prądy stojana w nowym układzie współrzędnych. W przypadku maszyny o 3-fazowym stojanie, nowy układ współrzędnych jest ${}_1$, ${}_1$, O_1.

Unitarna bądź ortogonalna macierz transformacji wynika z dodatkowego założenia nakładanego na transformację: zachowania formalnej niezmienniczości postaci mocy chwilowej, wyrażonej przez współrzędne fazowe i współrzędne stransformowane (założenie to nie jest jednak konieczne). Współrzędne α_1, β_1 nazywamy współrzędnymi składowej osiowej wektora wielkości elektromagnetycznych stojana W_1 (liniozwojów Ψ_1, prądów I_1, napięć U_1). Są to współrzędne aktywne elektromechanicznie, ponieważ wpływają poprzez moment elektromagnetyczny na przemiany energii elektrycznej na mechaniczną. Składowa zerowa o współrzędnych zerowych wektora wielkości elektromagnetycznych nie partycypuje w wytwarzaniu momentu elektromagnetycznego a współrzędne składowej zerowej są autonomiczne w odniesieniu do relacji napięciowo-liniozwojowej. Przy przyłączeniu 3 przewodowym maszyny 3-fazowej, składowe zerowe są równe zero. (Dodatek 1).

We wirniku wielofazowym analogiczna diagonalizacja macierzy indukcyjności fazowych wirnika (oraz rezystancji i indukcyjności połączeń czołowych) prowadzi również do wyodrębnienia holonomicznej składowej osiowej o współrzędnych α_2, β_2 oraz składowej zerowej o wspłrzędnych kolejnych rzędów

$O_2^{(1)}, O_{2r,i}^{(2)}, \ldots O_{2r,i}^{(P_2)}$. Niewystępowanie przewodu zerowego powoduje strukturalne zerowanie się tylko składowej zerowej $O_2^{(1)}$. Składowe zerowe nie partycypują w wytwarzaniu momentu elektromagnetycznego. Symetryczna budowa uzwojeń wirnika zwartych symetrycznie przez pierścienie zwierające powoduje niewystępowanie składowych zerowych wszystkich rzędów (pojawiają się one dopiero przy uszkodzeniach klatek bądź połączeń czołowych i trzeba je uwzględnić w analizie, niestety w maszynach wielobiegunowych jest to utrudnione, z powodu nie powtarzających się uszkodzeń symetrycznie w każdym cyklu biegunowym, co szczególnie utrudnia analizę). Przy pełnej symetrii wirnika można zatem ograniczyć się do analizy związków między składowymi osiowymi o współrzędnych α_1, β_1 stojana i α_2, β_2 wirnika. Osie α i β stojana oraz wirnika są elektrycznie wzajemnie prostopadłe, wynika to formalnie z ortonormalności wektorów własnych macierzy indukcyjności stojana bądź wirnika. Wygoda analizy implikuje przyjęcie tych samych osi α, β dla stojana i wirnika, czyli przejście z układu współrzędnych holonomicznych wirnika i stojana do wspólnego układu współrzędnych wirujących z dowolną prędkością ω_x. Stąd wektor elektromagnetyczny wielkości fazowych stojana

$$\left[W_{1k}\right] = \begin{bmatrix} W_{1a} \\ W_{1b} \\ W_{1c} \end{bmatrix},$$

w nowym układzie współrzędnych

$$\left[W_{1n}\right] = \begin{bmatrix} W_{1} \\ W_{1} \\ W_{1o} \end{bmatrix},$$

a związek między nimi określa transformacja za pomocą ortogonalnej[1] macierzy $\left[C_1\right]$.

$$\left[W_{1n}\right] = \left[C_1\right] \left[W_{1k}\right] \tag{1a}$$

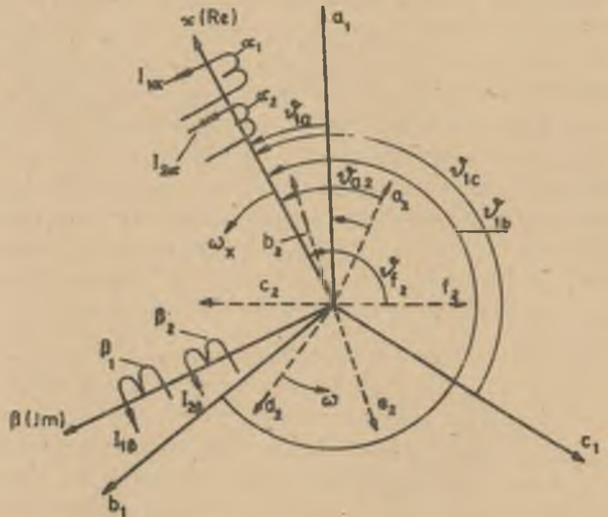
[1] Transformacje za pomocą macierzy ortogonalnych powstały przez ortogonalizację macierzy transformacyjnych, wprowadzonych w początkowym okresie rozwoju teorii przekształceń liniowych w maszynach trójfazowych i stosowanych w dalszym ciągu w wielu pracach naukowych.

Przekształcenia ortogonalne wykazują zalety własności inwariantności postaci mocy i energii w nowym układzie współrzędnych wektorów wielkości elektromagnetycznych (dodatek 1), dzięki którym można łatwiej przypisać sens fizykalny związkom formalnym w nowym układzie współrzędnych.

$$\left[C_1\right] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\vartheta_{1a}, & \cos\vartheta_{1b}, & \cos\vartheta_{1c} \\ -\sin\vartheta_{1a}, & -\sin\vartheta_{1b}, & -\sin\vartheta_{1c} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

gdzie:

ϑ_{1k} - kąt zawarty między osią uzwojenia (osią przepływu uzwojenia) fazy k = a, b, c a osią wirującą z prędkością ω_x (rys. 1).



Rys. 1. Nieruchome osie uzwojeń stojana, osie uzwojeń wirnika wirujące z prędkością elektryczną ω, osie współrzędnych α, β i płaszczyzna Gaussa wirująca z prędkością elektryczną ω_x

Analogicznie dla wirnika

$$\left[W_{2k}\right] = m_2^{1/2} \begin{bmatrix} W_{2a} \\ W_{2b} \\ W_{2c} \\ W_{2d} \\ \cdots \\ \cdots \\ W_{2m} \\ \ \end{bmatrix} \qquad \left[W_{2n}\right] = m_2^{1/2} \begin{bmatrix} W_{2\alpha} \\ W_{2\beta} \\ W_{20}^{(1)} \\ W_{20r}^{(2)} \\ W_{20i}^{(2)} \\ W_{20r}^{(3)} \\ W_{20i}^{(3)} \\ \cdots \\ W_{20}^{(P_2)} \end{bmatrix}$$

$$\left[W_{2n}\right] = \left[C_2\right]\left[W_{2k}\right] \tag{1b}$$

$$\left[C_2\right] = \sqrt{\frac{2}{m_2}} \begin{bmatrix} \cos\vartheta_{2a}, & \cos\vartheta_{2b}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \cos\vartheta_{2m} \\ -\sin\vartheta_{2a}, & -\sin\vartheta_{2b} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & -\sin\vartheta_{2m} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1, & \cos 2\alpha, \cos 4\alpha, \ldots\ldots\ldots & \cos(m_2-1)\,2\alpha \\ 0, & \sin 2\alpha, \sin 4\alpha, \ldots\ldots\ldots & \sin(m_2-1)\,2\alpha \\ 1, & \cos 3\alpha, \cos 6\alpha, \ldots\ldots\ldots & \cos(m_2-1)\,3\alpha \\ 0, & \sin 3\alpha, \sin 6\alpha, \ldots\ldots\ldots & \sin(m_2-1)\,3\alpha \end{bmatrix}$$

$m_2 = \frac{N}{p_b}$ – liczba żłobków przypadająca na jeden cykl biegunowy (dla całkowitej liczby m_2, dla liczby ułamkowej m_2 można uogólnić relacje, przyjmując $m_2 = N$ – liczba żłobków wirnika)

$$\alpha = \frac{2\pi}{m_2}.$$

Płaszczyźnie o współrzędnych α, β można przyporządkować płaszczyznę Gaussa (α – oś liczb rzeczywistych, β – oś liczb urojonych) i wprowadzić kompleksory (zespolone wektory przestrzenne) wielkości osiowych

$$\underline{W}_{1,2} = W_{1,2} = j\,W_{1,2\beta}$$

(przecinkami oddzielono relacje obowiązujące zarówno dla stojana 1, jak i wirnika 2).

Uwzględniając, że składowe zerowe stojana i wirnika są równe zero otrzymuje się zapis relacji napięciowo-prądowych w postaci kompleksorowej

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \left(\frac{d}{dt} + j\omega_x\right)\underline{\Psi}_1 + \underline{I}_1 R_1 \\ 0 &= \left[\frac{d}{dt} + j(\omega_x - \omega)\right]\underline{\Psi}_2 = \underline{I}_2 R_2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\underline{W}_{1,2} = \sqrt{\frac{2}{m_{1,2}}} \begin{bmatrix} e^{-j\vartheta_{1,2a}} \\ e^{-j\vartheta_{1,2b}} \\ \vdots \\ e^{-j\vartheta_{1,2}} \end{bmatrix}^T \left[W_{1,2k}\right] \tag{4a}$$

$$\underline{W}_{1,2\,k} = \sqrt{\frac{2}{m_{1,2}}}\, \mathrm{Re}\left[\underline{W}_{1,2}\, e^{j\vartheta_{1,2\,k}}\right] \tag{4b}$$

$$m_1 = 3, \qquad m_2 = \frac{M}{p_b}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{\Psi}_1 &= \underline{I}_1 L_1 + \underline{I}_2 M \\ \underline{\Psi}_2 &= \underline{I}_1 M + \underline{I}_2 L_2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Parametry elektromagnetyczne L_1, L_2, M, R_1, R_2 wynikają z parametrów uzwojeń fazowych. Indukcyjności L_1 i L_2 zawierają uzupełniania wprowadzone przez stłumione indukcyjności rozproszenia różnicowego L_{1h}, L_{2h}.

$$L_1 = \frac{m_1}{2} L_{1f\delta} + L_{1h} + L_{1\dot{z}} + M_{1\dot{z}}\, 2\cos\alpha_1 + L_{1c}$$

$$L_2 = \left(\frac{m_2}{2} L_{2f\delta} + L_{2h} + L_{2\dot{z}} + \frac{L_c}{2\sin^2\frac{\alpha_2}{2}}\right) p_b$$

$$R_1 = R_{1f} \tag{6}$$

$$R_2 = \left(R_{2p} + \frac{R_{2c}}{2\sin^2\frac{\alpha_2}{2}}\right) p_b$$

$$M = \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{2} M_{12m}(\varkappa=0) \cdot \frac{\sin\varkappa}{\varkappa},$$

gdzie:

$L_{1,2\delta}$ – indukcyjność własna jednej fazy stojana, bądź wirnika, związana ze strumieniem w szczelinie,

$L_{1,2\,\dot{z}}$ – indukcyjność rozproszenia żłobkowego stojana bądź wirnika,

$M_{1\dot{z}}(\varkappa=0)$ – indukcyjność wzajemna sąsiednich faz stojana związana ze żłobkowym strumieniem rozproszenia (występuje tylko przy uzwojeniach 2 warstwowych skróconych),

$M_{1,2m}$ – indukcyjność wzajemna maksymalna między uzwojeniem fazowym stojana i wirnika, przy skosie żłobków równym zero,

L_{1c} – indukcyjność rozproszenia połączeń czołowych jednej fazy uzwojenia stojana.

L_c, R_c - indukcyjność i rezystancja sektora pierścienia zwierającego wirnika,

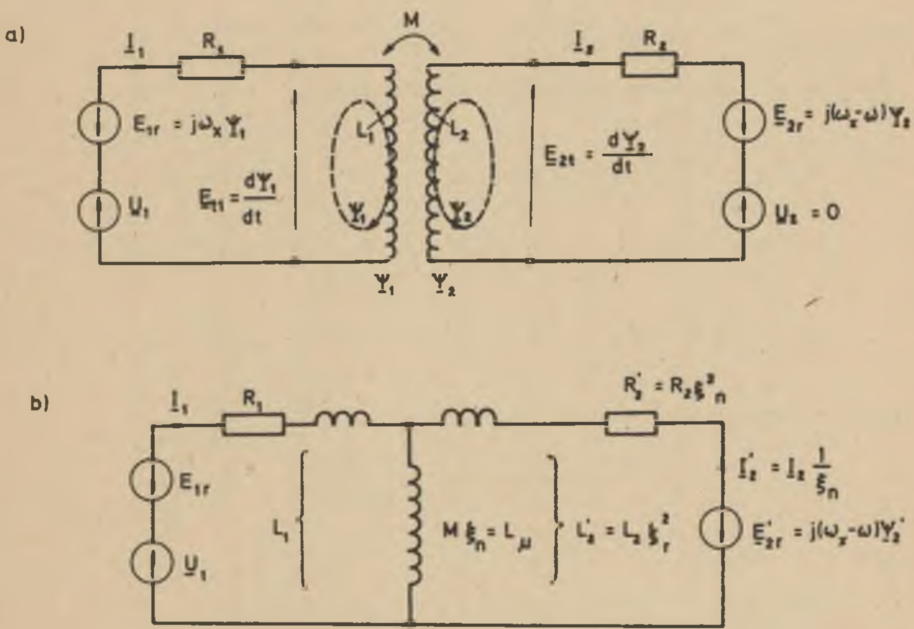
R_p - rezystancja pręta klatki,

$\frac{\sin x}{x}$ - współczynnik skosu między stojanem a wirnikiem,

p_b - liczba par biegunów,

R_{1f} - rezystancja uzwojenia jednej fazy stojana.

Równania (3) i (5) umożliwiają sporządzenie schematu zastępczego dla składowych osiowych (rys. 2). Rozdział napięcia indukowanego, na napięcie



Rys. 2. Schemat zastępczy dla składowych osiowych niesprowadzony - a, i sprowadzony na stronę stojana - b

rotacji $j\omega_x$ oraz $j(\omega_x - \omega)\underline{\Psi}_2$ i napięcie transformacji $\frac{d\Psi_1}{dt}$ i $\frac{d\Psi_2}{dt}$, należy traktować jako wyodrębnienie formalne, z uwagi na arbitralne przyjęcie prędkości wirowania ω_x układu współrzędnych α, β. Równania transformacji powrotnej z układu współrzędnych osiowych α, β do układu współrzędnych fazowych sprowadzają się na mocy równania (4b) do rzutowania kompleksorów zmniejszonych $\sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}225$-krotnie na osie odpowiednich faz a,b, c... Równanie momentu elektromagnetycznego można znaleźć z bilansu mocy pobieranej stojana (dodatek 2).

$$P_1 = U_{1\alpha} I_{1\alpha} + U_{1\beta} I_{1\beta} = \mathrm{Re}(\underline{U}_1 \underline{I}_1^*) =$$

$$= \mathrm{Re}(\frac{d\underline{\Psi}_1}{dt} \underline{I}_1^*) + \omega_x \mathrm{Re}(j\underline{\Psi}_1 \underline{I}_1^*) + I_1^2 R_1.$$

Wygodnie się bilansuje, jeśli $\omega_x = \omega = p_b \omega_m$ - elektryczna prędkość wirowania wirnika. Bilans jest następujący:

$\mathrm{Re}(\frac{d\underline{\Psi}_1}{dt} \underline{I}_1^*)$ - moc przenoszona w części do wirnika oraz w części idąca na zwiększenie energii pola magnetycznego w indukcyjnościach,

$\mathrm{Re}(j\underline{\Psi}_1 \underline{I}_1)$ - wewnętrzna moc mechaniczna,

$I_1^2 R_1$ - moc strat w uzwojeniach stojana.

Stąd moment elektromagnetyczny

$$M_e = p_b \mathrm{Re}(j\underline{\Psi}_1 \underline{I}_1^*) = p_b \frac{M}{L_1 L_{2\sigma}} \mathrm{Re}(j\underline{\Psi}_2 \underline{\Psi}_1^*) = p_b M \mathrm{Re}(j \underline{I}_2 \underline{I}_1^*) =$$

$$= \frac{M p_b}{L_1 L_{2\sigma}} (\Psi_{2\alpha} \Psi_{1\beta} - \Psi_{2\beta} \Psi_{1\alpha}) = p_b M(I_{2\alpha} I_{1\beta} - I_{2\beta} I_{1\alpha}) \tag{7}$$

i równanie momentów obrotowych

$$J \frac{d\omega_m}{dt} - M_m = M_e, \tag{8}$$

gdzie:

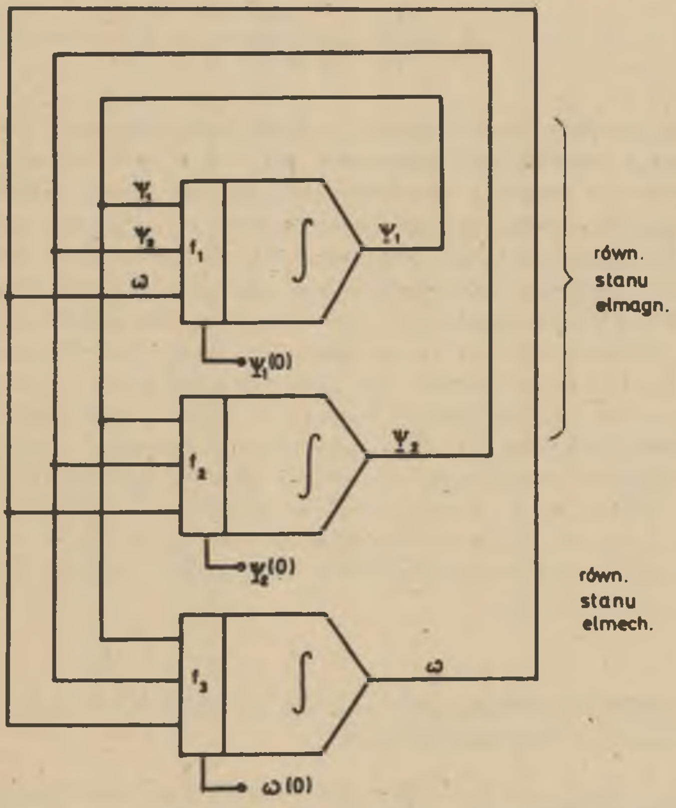
M_m - mechaniczny moment obciążenia (przyjęto jednakową kierunkowość wielkości mechanicznych) $\omega_m = \frac{\omega}{p_b}$, M_m, M_e.

Przy zadanym momencie mechanicznym, np. $M_m(\omega_m)$, układ równań (3) i (8) przy znanych parametrach elektromagnetycznych R_1, R_2, L_1, L_2, M i przy danym parametrze mechanicznym J (momencie bezwładności mas wirujących) przy danym napięciu zasilania (np. przy napięciu sinusoidalnym symetrycznym o częstotliwości kątowej ω_o)

$$\underline{U}_1(t) = U_{fm} \sqrt{\frac{3}{2}} e^{j\left[(\omega_o - \omega_x)t + \alpha_o\right]}$$

rozwiązuje nieustalony stan elektrodynamiczny. Układ równań jest ponadto przedstawiony w kanonicznej postaci zmiennych stanu, jeśli uwzględnić, że z równania (3) można wyrazić prądy $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_2$ za pomocą liniozwojów $\underline{\Psi}_1$ i $\underline{\Psi}_2$ z równania (5)

$$\underline{I}_1 = \underline{\Psi}_1 \frac{1}{L_1 \gamma} - \underline{\Psi}_2 \frac{M}{L_1 L_2 \gamma}$$
$$\underline{I}_2 = \underline{\Psi}_2 \frac{1}{L_2 \gamma} - \underline{\Psi}_1 \frac{M}{L_1 L_2 \gamma} \tag{9}$$



Rys. 3. Schemat całkowania równań stanu elektrodynamicznego

Rys. 3 przedstawia ideowy program całkowania, w języku Fortran (najwygodniej metodą Rungego-Kutty) w dziedzinie zmiennej zespolonej, przystosowany do maszyny cyfrowej. Dla rozwiązania za pomocą maszyn analogowych układ dwóch równań (3) po rozpisaniu na równania części urojonych i rzeczywistych przechodzi w 4 równania i łącznie z równaniem (8) rozwiązuje problem elektrodynamiczny. Bardziej złożony układ transmisji momentu komplikuje oczywiście odpowiednio relacje (luzy przekładni, sprężystość wałów, zmienność momentu inercji J itp.) lecz bez utraty kanonicznej postaci równania zmiennych stanu.

Można korzystać ze schematu zastępczego (z rys. 2a) po sprowadzeniu wirnika na stronę stojana (rys. 2b) i posługiwać się we wszystkich relacjach zamiast wielkościami $\underline{W}_2$, wielkościami sprowadzonymi $\underline{W}_2^*$ i parametrami L_2^*, R_2^* sprowadzonymi na stronę stojana.

Współczynnik sprowadzenia ξ jest arbitralny, jeśli obowiązuje założenie nienasyconego obwodu magnetycznego[1]. Dla wyodrębnienia strumienia głównego i strumienia rozproszenia stojana i wirnika współczynnik sprowadzenia jest ściśle określony przez dane konstrukcyjne maszyny i wynosi

$$\xi_n = \frac{z_1}{z_2} \frac{k_{u1}}{k_{u2}} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}.$$

Tylko w tym przypadku indukcyjności wzdłużne reprezentują indukcyjności rozproszenia a indukcyjność poprzeczna $M\xi_n = L\mu$ reprezentuje indukcyjność magnesowania związaną ze strumieniem głównym. Mimo, że podstawą do transformacji dwuosiowej był nienasycony obwód magnetyczny, można wykorzystać schemat zastępczy (przy posłużeniu się współczynnikiem sprowadzenia ξ_n) do analizy stanów nieustalonych, a w szczególności stanów ustalonych przy uwzględnieniu nasycenia. Do tego celu jest szczególnie przydatne posłużenie się modelem matematycznym maszyny o uzwojeniach fazowych, wykazujących rozłożenie sinusoidalne. Dla stanów ustalonych przy wymuszaniu sinusoidalnym symetrycznym schemat sprowadzony jest uzupełniany "a posteriori" elementami reprezentującymi straty przemagnesowania. Ponadto koryguje się "a posteriori" wyniki analizy momentu elektromagnetycznego deformowanego przez efekty pasożytnicze od pól magnetycznych wyższych harmonicznych przestrzennych, które w rzeczywistości nie są polami rozproszenie i są wytłumiane przy towarzyszących temu wytłumianiu zniekształceniach momentu.

2. Stan nieustalony maszyny indukcyjnej o rozłożonych stałych klatkowych uzwojeń wirnika głębokożłobkowego

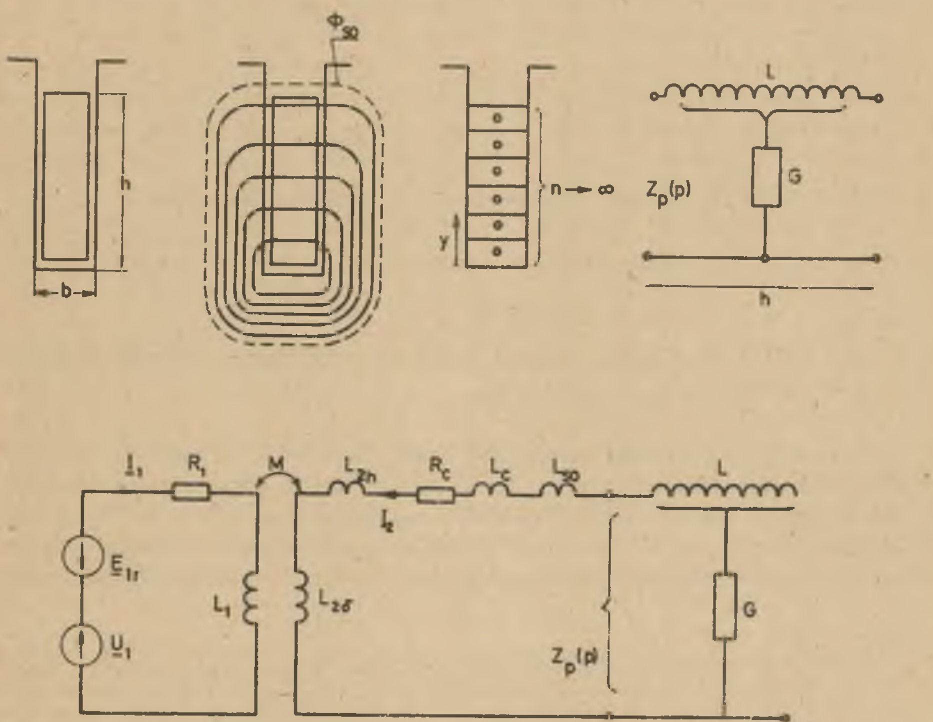
Stan nieustalony maszyny indukcyjnej z wirnikiem głębokożłobkowym jest opisany układem równań różniczkowych o pochodnych zwyczajnych (dla problemu jednowymiarowego o zmiennej czasu), w odniesieniu do obwodów elektrycznych stojana, traktowanych jako obwody o stałych skupionych, a równaniami o pochodnych cząstkowych (dla problemu dwumiarowego o zmiennej cza-

[1] W maszynie o jednym układzie uzwojeń wirnika, przez odpowiednie przyjęcie ξ można uwolnić się od indukcyjności wzdłużnej schematu zastępczego bądź w zastępczym obwodzie wirnika, bądź stojana, co niejednokrotnie upraszcza układ równań stanu elektromagnetycznego w "sprowadzonych" relacjach.

su i o zmiennej promieniowej w pręcie wirnika) dla obwodów elektrycznych wirnika o stałych rozłożonych. Stwarza to utrudnienie wyprowadzenia równań stanu elektromagnetycznego.

Równania różniczkowe cząstkowe opisują repartycje prądów w przekroju pręta zanurzonego w polu magnetycznym rozproszenia żłobkowego (prąd jest np. wypierany ku szczelinie dla prądów sinusoidalnych a w stronę podstawy żłobka dla prądów zanikających wykładniczo). Dla uwolnienia się od napięcia rotacji we wirniku przyjmuje się jako płaszczyznę odniesienia - płaszczyznę Gaussa, wirującą z prędkością $\omega_x = \omega$ (płaszczyznę Parka i odpowiadającą jej transformację dwuosiową). W tym układzie współrzędnych jest łatwo wyodrębnić obszar żłobkowy, w którym procesy nieustalone są opisane cząstkowymi równaniami różniczkowymi.

Można obejść problem rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, sprowadzając je do równań różniczkowych o pochodnych zwyczajnych.Strumień rozproszenia żłobkowego (rys. 4) splatający się ze zmienną, wraz ze współrzędną wysokości pręta, ilością umyślonych włókien prądowych przekroju pręta (przy założeniu przebiegu linii indukcji magnetycznej równolegle do podstawy żłobka), zastępujemy liniami splatającymi się z umyślonymi cząst-



Rys. 4. Pręt głębokożłobkowy wirnika i schemat zastępczy maszyny

kami przekroju pręta, traktowanymi jako nitki prądowe o stałych skupionych[1]. Wyodrębnione w ten sposób zastępcze nitki prądowe są zwarte na zewnątrz pakietu blach rdzenia wirnika całkowitym przekrojem pręta, który z kolei jest przyłączony do pierścienia zwierającego. Powstały w ten sposób układ zastępczy nitek prądowych odpowiada wieloklatkowemu wirnikowi o stałych skupionych. Uzyskana w ten sposób aproksymacja pręta głębokożłobkowego uściśla się w miarę powiększania ilości umyślonych fragmentów przekroju pręta, w wyniku czego rośnie ilość drabinek RL w schemacie zastępczym wirnika. W granicy otrzymuje się ścisłe odwzorowanie pręta głębokożłobkowego przez linię długą o stałych rozłożonych, o długości skończonej na końcu otwartą (rys. 4).

W przypadku żłobka o przekroju prostokątnym jest to linia o stałych rozłożonych równomiernie. W przypadku żłobka o przekroju trapezowym lub o innej dowolnej formie, stałe linii długiej odwzorującej pręt głębokożłobkowy są rozłożone nierównomiernie. Przy posłużeniu się rachunkiem operatorowym można obliczyć zastępczą impedancję części żłobkowej pręta o przekroju prostokątnym, równą impednacji wejściowej linii długiej.

$$Z_p(p) = C_1\sqrt{p}\,\coth(C_2\sqrt{p}) \tag{9}$$

przy czym

$$C_1 = \sqrt{\frac{L_\partial}{G_\partial}}, \qquad C_2 = h\sqrt{L_\partial G_\partial},$$

$L_\partial = \dfrac{l_1\,\mu_0}{b}$ – gęstość liniowa rozkładu indukcyjności linii,

$G_\partial = \dfrac{b}{\varrho l_1}$ – gęstość liniowa rozkładu konduktancji linii,

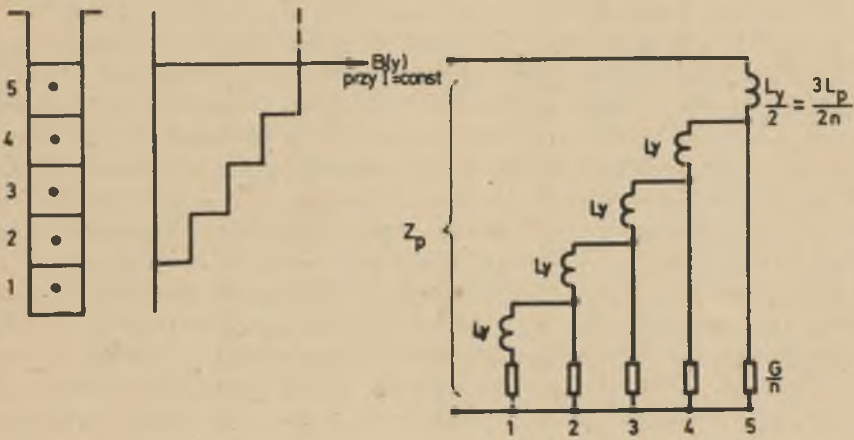
l_1 – długość pakietu wirnika,

b – szerokość żłobka równa w przybliżeniu szerokości pręta,

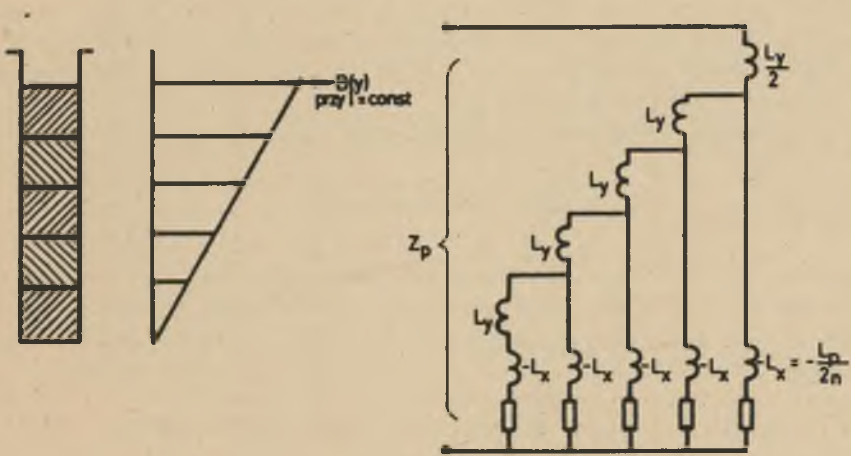
ϱ – rezystywność pręta.

Niestety operatorowa impednacja pręta jest mniej przydatna przy analizie stanów nieustalonych, z uwagi na trudności poszukiwania odwrotnej transformaty operatorowej z wyrażeń zawierających $Z_p(p)$ i ponadto ograniczona do liniowych równań różniczkowych stanu nieustalonego. Nieliniowość dynamiczna równań zmiennych stanu elektrodynamicznego uniemożliwia ko-

[1] Konsekwencją założenia równoległego przebiegu linii sił pola magnetycznego jest jednowymiarowe wypieranie prądu (wzdłuż wysokości żłobka).
W przypadku żłobków półzamkniętych występuje ściśle dwuwymiarowe wypieranie prądu (wzdłuż wysokości i ponadto wzdłuż szerokości pręta) [8]. Efekty związane z dwuwymiarowym wypieraniem prądu są na ogół niewielkie i zostały pominięte w niniejszej pracy.



Rys. 5a1. Podział pręta głębokożłobkowego na nitki prądowe, rozkład indukcji wzdłuż wysokości pręta przy frekwencji $f_2 \to 0$ i schemat zastępczy pręta



Rys. 5a2. Podział pręta głębokożłobkowego na fragmenty o idealnym przeplaceniu, rozkład indukcji wzdłuż wysokości pręta przy frekwencji $f_2 \to 0$ i schemat zastępczy pręta rzystanie z rachunku operatorowego. Jest natomiast w pełni przydatna w analizie stanów ustalonych, przy przemiennym prądzie wirnika o częstotliwości poślizgu, dla określenia współczynników k_r i k_x zwiększenia rezystancji bądź zmniejszenia indukcyjności pręta, na skutek wypierania prądu. Dla przybliżonych, lecz wystarczająco dokładnych, obliczeń przebiegów elektrodynamicznych wystarczy zastąpić linię długą linią łańcuchową LR o skończonej liczbie członów (o 3 lub 4 członach drabinkowych) - rys. 5a1, bądź zastąpić pręt głębokożłobkowy trzema lub czterema klatkami, w obrębie których nie zachodzi wypieranie prądu - rys. 5a2. W przypadku przedstawionym na rys. 5a1 fragmenty przekroju są zastąpione nitkami prądowymi o równoważnej rezystancji, w przypadku przedstawionym na rys. 5a2 należy przyjąć, że w obrębie fragmentu przekroju pręta mamy idealne przeplecenie włókien prądowych połączonych równolegle. Układ ten jest wszelako bardziej skomplikowany, bo uwzględnia się w nim wpływ rozłożenia umownie przeplecionych włókien prądowych na indukcyjności własne i wzajemne wyodrębnionych fragmentów przekroju pręta. Odpowiada mu schemat zastępczy przedstawiony na rys. 5a2. Prąd stały (bądź przemienny o frekwencji malejącej do zera) daje w tym układzie obraz pola rozproszenia taki jak w rzeczywistym pręcie głębokożłobkowym, natomiast w układzie podanym na rys. 5a1 obrazy pola są tylko zbliżone, co zaznaczono każdorazowo na rys. 5a1 i 2.

Schemat zastępczy z rys. 5a1 i 5a2 przechodzi w granicy dla rosnącej liczby podziału w schemat linii drugiej jak na rys. 4, jednakże przy ograniczeniu liczby podziałów przekroju pręta dokładność reprezentacji jest znacznie większa według schematu jak na rys. 5a2, który z tego powodu warto preferować przy aproksymacji.

Układ równań stanu elektromagnetycznego jest następujący:

$$
\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= \left(\frac{d}{dt} + j\omega\right)\underline{\Psi}_1 + \underline{I}_1 R_1 \\
0 &= \frac{d}{dt}\underline{\Psi}_{2(1)} + \underline{I}_{2(1)} R_{2(1)} + \underline{I}_2 R_{2w} \\
0 &= \frac{d}{dt}\underline{\Psi}_{2(2)} + \underline{I}_{2(2)} R_{2(2)} + \underline{I}_2 R_{2w} \\
0 &= \frac{d\underline{\Psi}_{2(n)}}{dt} + \underline{I}_{2(n)} R_{2(n)} + \underline{I}_2 R_{2w} \\
\underline{I}_2 &= \underline{I}_{2(1)} + \underline{I}_{2(2)} + \underline{I}_{2(n)}
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

$$
R_{2w} = R_c \qquad (11)
$$

$$
\left[\underline{\Psi}\right] = \left[L\right]\left[\underline{I}\right],
$$

gdzie:

$$[\underline{\Psi}] = [\underline{\Psi}_{2(1)}, \underline{\Psi}_{2(2)} \ldots\ldots \underline{\Psi}_{2n}, \underline{\Psi}_1]_T$$

$$[\underline{I}] = [\underline{I}_{2(1)}, \underline{I}_{2(2)} \ldots\ldots \underline{I}_{2(n)}, \underline{I}_1]_T.$$

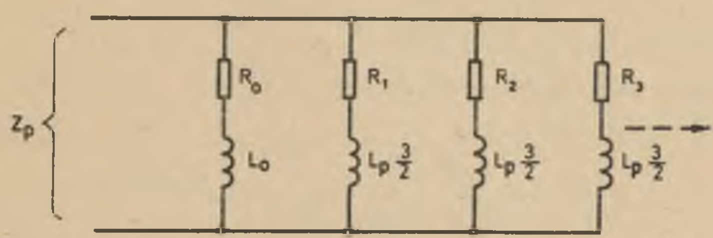
Macierz symetryczna $[L]$ przy równomiernym podziale przekroju pręta (rys. 5a2).

$$[L] = \begin{bmatrix} (n-\frac{1}{2})L_y + L_{2w} - L_x, & (n-1-\frac{1}{2})L_y + L_{2w}; & \ldots\ldots, & \frac{1}{2}L_y + L_{2w}, & M \\ & (n-1-\frac{1}{2})L_y + L_{2w} - L_x, & & & \\ & & & & \\ M & ; & M & ; \ldots\ldots & L \end{bmatrix}$$

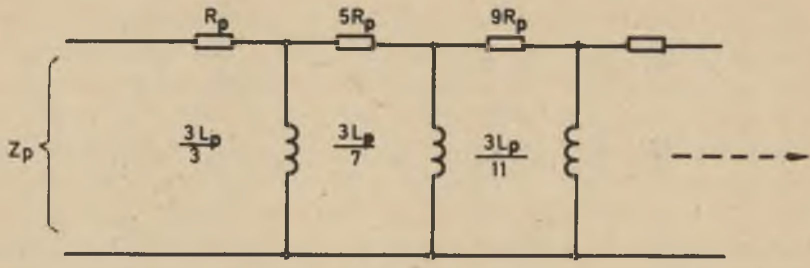
$$L_y = \mu_0 \frac{l_i\, h}{bn}, \qquad L_x = \mu_0 \frac{l_i\, h}{6\, bn}, \qquad L_{2w} = L_{2h} + L_c + L_{so} + L_{2\delta}$$

Równanie $[\underline{I}] = [L]^{-1}[\underline{\Psi}]$ i układ równań (10) dają postać kanoniczną zmiennych stanu elektromagnetycznego, który łącznie z równaniem (7) na moment elektromagnetyczny w równ. (8) rozwiązują stan elektrodynamiczny, przy założonym napięciu zasilania i momencie obciążenia. Przy podziale pręta na n części pozostaje jeszcze otwarty problem optymalnego (z punktu widzenia dokładności aproksymacji) podziału na nierównomierne fragmenty przekroju (gęsty podział przy szczelinie).

Odmienna metoda obejścia równania różniczkowego, o pochodnych cząstkowych rozpływu prądu w obrębie przekroju pręta głębokożłobkowego, polega na zastąpieniu pręta wiązką n równolegle połączonych dwójników RL - rys.5b. Sposób zastąpienia pręta głębokożłobkowego takim układem wynika z rozkła-



Rys. 5b. Schemat zastępczy pręta złożony z wiązki dwójników RL



Rys. 5c. Drabinkowy schemat zastępczy pręta

du na ułamki proste wyrażenia $\frac{1}{Z_p(p)}$, co sprowadza się fizykalnie do obliczenia przebiegu narastania prądu pręta po załączeniu jednostkowego napięcia stałego o postaci skokowej między dwa końce pręta o znanej impedancji operatorowej $Z_p(p)$

$$I_p(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{Z_p(p)}. \tag{12a}$$

Odpowiednio do wzoru Heaviside'a można służyć się relacją

$$I_p(t) = \mathcal{L}^{-1} I_p(p) = \frac{1}{Z(p=0)} + \sum_k \frac{1}{\left[\frac{d\,M(p)}{dp}\right]_{p_k}} e^{p_k t}, \tag{12b}$$

przy czym

$$p_k \text{ - zera funkcji } Z_p(p) = C_1 \sqrt{p}\,\coth(C_2\sqrt{p})$$

$$M(p) = p\, Z_p(p)$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{L_э}{G_э}} \qquad C_2 = h\sqrt{L_э G_э}$$

Po wprowadzeniu zmiennej pomocniczej $q^2 = -p$

$$I_p(t) = \frac{1}{C_1} \sum_k \frac{1}{\left[\frac{dM(q)}{dq} \cdot \frac{dq}{dp}\right]_{q_k}} e^{-q_k^2 t} \tag{12c}$$

$$Z_p(q) = C_1\ q\ \coth(-\ j\ q\ C_2) = C_1\ q\ \mathrm{ctg}(q\ C_2)$$

$$Z(p=0) = \frac{C_1}{C_2} = \frac{h}{G_\partial} = \frac{1}{R_p}$$

$$M(q) = -\ C_1\ q^3\ \mathrm{ctg}(q\ C_2)$$

$$\frac{dM(q)}{dq} \cdot \frac{dq}{dp} = C_1\left[3q^2\mathrm{ctg}(qC_2) - \frac{C_2\ q^3}{\sin^2 qC_2}\right]\frac{1}{2q}.$$

Zera funkcji $Z_p(p)$ wynikają z zer q_k funkcji $Z_p(q)$

$$C_2 q_k = \frac{\pi}{2}(2n - 1)$$

gdzie n - liczby naturalne

$$\left[\frac{dM(q)}{dq} \cdot \frac{dq}{dp}\right]_{q_k} = -\frac{q_k^2}{2C_2}$$

$$I_p(t) = \frac{1}{R_p}\sum_{n=1}^{\infty} i_{ko}(1 - e^{-\frac{t}{T_k}}), \tag{12d}$$

przy czym

$$i_{ko} = \frac{i_{10}}{(2n-1)^2}, \quad i_{10} = \frac{8}{\pi^2}, \quad T_k = \frac{T_1}{(2n-1)^2}$$

$$T_1 = \frac{4\ h^2\ L_\partial G_\partial}{\pi^2} = \frac{4\mu_o\ h^2}{\varrho\,\pi^2} = \frac{L_p}{R_p}\cdot\frac{1\ 2}{\pi^2}.$$

L_p - indukcyjność żłobkowa pręta przy równomiernej gęstości prądu w przekroju.

Amplitudy i_{ko} i stałe czasowe T_k szybko maleją dla zwiększających się liczb naturalnych n.

Z operatorowego przekształcenia równania (12d) wynika

$$\frac{1}{Z_p(p)} = \frac{1}{R_p} \sum_{n=1}^{\infty} i_{ko} \frac{1}{1 + pT_k}. \tag{13a}$$

Urywając szereg (3a) po n-tym składniku otrzymuje się wartości rezystancji i indukcyjności dwójników równoległych, aproksymujących pręt głębokożłobkowy

$$R_n = R_p \frac{\pi^2}{8} (2n - 1)^2,$$

$$L_n = L_p \frac{3}{2}. \tag{13b}$$

Rezystancję resztkową R_o, wynikającą z ograniczonej liczby dwójników RL, można obliczyć z warunku tożsamości układu zastępczego i pręta w statycznym stanie ustalonym

$$\frac{1}{R_o} = \frac{1}{R_p} - \sum_{1}^{n} \frac{1}{R_n}. \tag{13c}$$

Indukcyjność resztkową $L_o = T_o R_o$ dwójnika R_o, L_o można obliczyć z warunku jednakowej zastępczej stałej czasowej narastanie prądu $i(t)$ w pręcie i w układzie dwójników rwónoległych o skończonej liczbie n

$$T_z = \int_{\delta}^{\infty} \frac{i(t=\infty) - i(t)}{i(t=\infty)} dt = - \frac{\left[\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{Z_p(p)}\right)\right]_{p=0}}{\frac{1}{Z_p}(p=0)} = \frac{1}{3} C_2^2. \tag{13d}$$

Stąd ostatecznie

$$\frac{R_p}{R_o} \cdot \frac{T_o}{C_2^2} = \frac{1}{3} - \frac{32}{\pi^4} \sum_{1}^{n} \frac{1}{(2n-1)^4} = f(n), \tag{13e}$$

gdzie:

$f(n=1) = 4{,}821902 \cdot 10^{-3}$,

$f(n=2) = 7{,}66206 \cdot 10^{-4}$,

$f(n=3) = 2{,}405 \cdot 10^{-4}$,

$f(n=4) = 1{,}03764 \cdot 10^{-4}$,

$f(n=5) = 5{,}3695 \cdot 10^{-}$

Prądy w poszczególnych dwójnikach R, L wiązki równoległej odwzorowują tylko globalny prąd pręta, a nie repartycję prądu w przekroju pręta.

Alternatywne przybliżenie pręta głębokożłobkowego otrzymuje się za pomocą niejednorodnego układu drabinkowego (rys. 5o), który wynika z rozwiązania za pomocą szeregów potęgowych (dla małych p) równania różniczkowego Riccatiego, określającego malejącą impedancję operatorową pręta Z(p,y) w miarę zwiększania wysokości y od podstawy żłobka jako impedancję linii długiej jednorodnej (bądź niejednorodnej przy przekroju trapezowym) [2].

$$Z_p(p,\ y+\Delta y) = Z(p,y) + p\frac{\mu_0 \Delta y}{b} - \frac{[Z(p,y)]^2}{Z(p,y) + \frac{l_1 \varrho}{b\Delta y}}$$

w granicy, gdy $\Delta y \longrightarrow dy$ otrzymuje się równanie Riccatiego

$$\frac{\partial\left[\frac{Z_p(p,y)}{l_1}\right]}{\partial y} = p\frac{\mu_0}{\varrho b} - \left[\frac{Z_p(p,y)}{l_1 \varrho}\right]^2 b \qquad (14)$$

Linia drabinkowa RL reprezentująca $Z_p(p)$, obcięta po kilku członach, może być wykorzystana do sformułowania równań stanu elektromagnetycznego.

O stopniu dokładności odwzorowania pręta głębokożłobkowego przez jedną z wyżej przedstawionych aproksymacji orientuje porównanie charakterystyki modułowo-fazowej admitancji pręta $\frac{1}{Z_p(p=j\omega)}$, przy zmienności $\omega \in (0, \infty)$

Rys. 6a,b,c,d przedstawiają charakterystyki modułowo-fazowe na tle charakterystyki dokładnej, przy czym każdorazowo uwzględnia się ten sam stopień od p wypadkowego wielomianu charakterystycznego funkcji aproksymującej. Dokładna charakterystyka $\frac{1}{Z_p(p=j\omega)}$ zbiega do początku układu współrzędnych pod kątem 45^o dla $\omega \longrightarrow \infty$. Przy skończonej liczbie elementów o stałych skupionych aproksymujących pręt głębokożłobkowy charakterystyki modułowo-fazowe układów aproksymujących zbiegają do początku układu współrzędnych pod kątem 90^o.

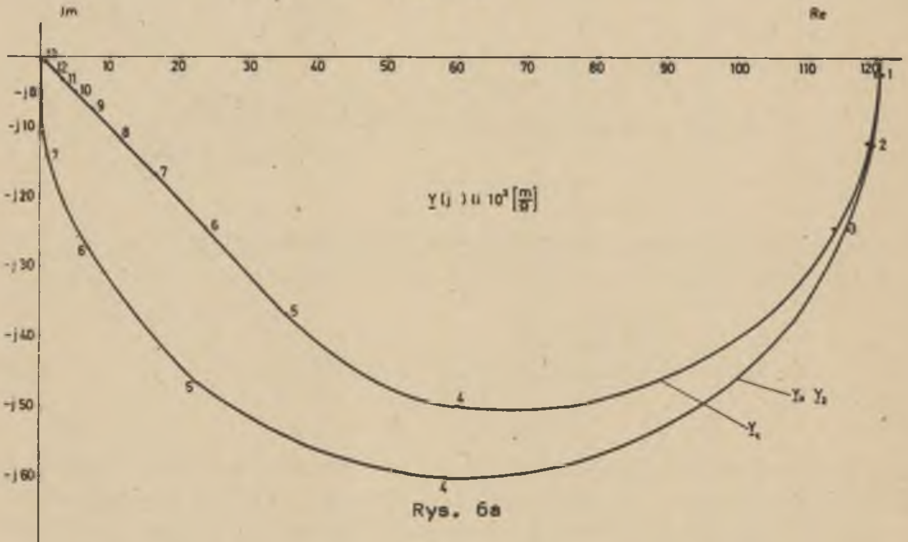
Uwzględniając odpowiedniości:

$$p \text{ oraz } \omega \longrightarrow \infty \triangleq t \longrightarrow 0$$

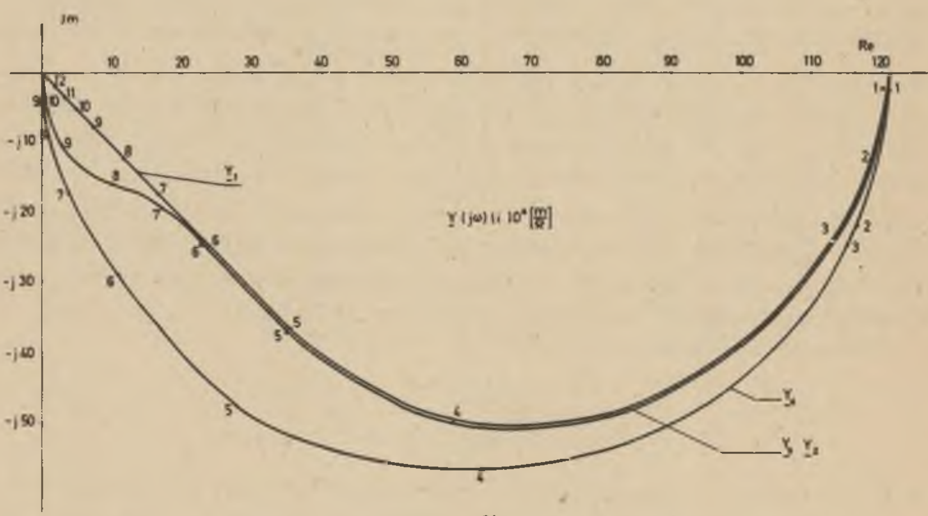
$$p \text{ oraz } \omega \longrightarrow \infty \triangleq t \longrightarrow \infty$$

można ocenić, czy rozbieżności przebiegów nieustalonych otrzymanych z aproksymacji pręta głębokożłobkowego są w zakresie przebiegów ustalonych czy początkowych. Trzeba przy tym uwzględnić, że rozbieżności charakterystyk modułowo-fazowych $Z_p(p=j\omega)$ dla dużych częstotliwości odbijają się w znacznie osłabionym stopniu na nieustalonych początkowych przebiegach czasowych całej maszyny, ponieważ indukcyjności w schematach zastępczych maszyny (poza prętem głębokożłobkowym) zmniejszają w dużym stopniu początkowe stromości zmian prądu w pręcie.

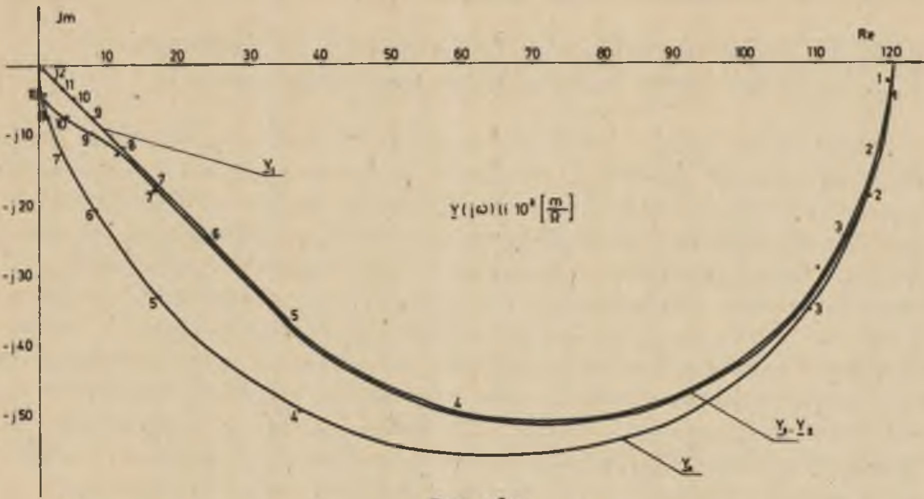
Na rys. 6a,b,c,d przedstawiono obliczone charakterystyki częstotliwości $l_i\ \underline{Y}(j\omega) = \frac{l_i}{Z_p(p=j\omega)}$ dla żłobka prostokątnego o wymiarach 4x53 mm dla rezystywności miedzi ϱ = 1,75 $10^{-8}\Omega$ m.



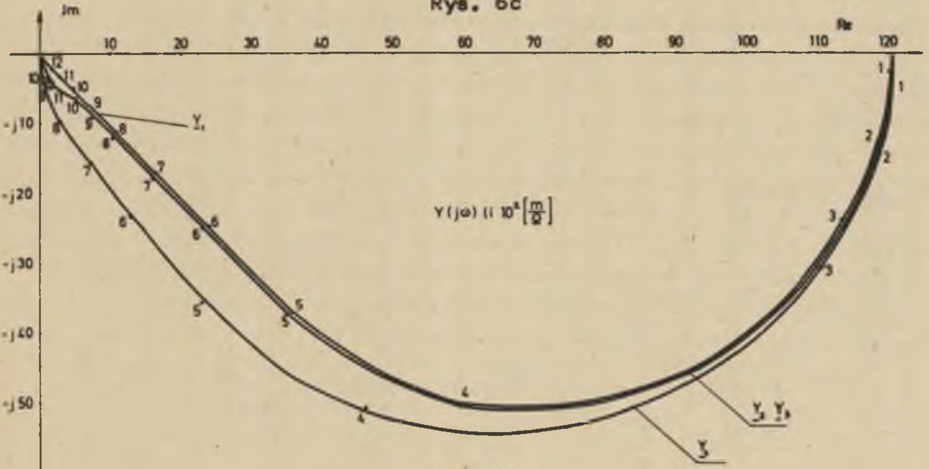
Rys. 6a



Rys. 6b



Rys. 6c



Rys. 6d

Rys. 6. Charakterystyka modułowo-fazowa admitancji pręta głębokożłobkowego ($\underline{Y}_1 = \frac{1}{Z_p(j\omega)}$ charakterystyka dokładna). $\underline{Y}_2$ - wiązka dwójników równoległych według rys. 5b. $\underline{Y}_3$ - układ drabinkowy według rys. 5b. $\underline{Y}_4$ - układ według rys. 5.1a dla wymiarów żłobka 4 x 53 mm $\varrho = 1,75 \quad 10^{-8}\Omega$m. Punkty na skali częstotliwości

Nr	$\frac{\omega}{314}$	Nr	$\frac{\omega}{314}$
1	0,001	7	0,800
2	0,005	8	2,000
3	0,010	9	4,000
4	0,100	10	10,000
5	0,200	11	20,000
6	0,400	12	100,000

ilość obwodów zastępczych pręta rys. a-1, rys. b-2, rys. c-3, rys. d-4

3. Obliczenie stanu elektrodynamicznego silnika głębokożłobkowego w oparciu o pomierzone parametry elektromagnetyczne maszyny

W przedstawionej wyżej metodzie analizy stanu elektrodynamicznego zakładano aprioryczne znajomość parametrów elektromagnetycznych maszyny. Powstaje problem pomiaru tych parametrów, jeśli nie są znane dane konstrukcyjne, a w szczególności dane konstrukcyjne wirnika. Najbardziej przydatną do pomiarowego wyznaczenia parametrów elektromagnetycznych okazała się metoda rejestracji zanikającego prądu stojana, przy nieruchomej maszynie [4]. Metoda ta nie daje wszelako możliwości wyznaczenia wszystkich parametrów nawet w maszynie z wirnikiem klatkowym zwykłym, a tym bardziej z wirnikiem głębokożłobkowym. Można jednak wykazać, że znajomość indukcyjności operatorowej stojana, którą metoda ta umożliwia wyznaczyć, wystarcza do rozwiązania stanu elektrodynamicznego przy nienasyconym obwodzie magnetycznym maszyny. Odnosi się to również do silnika głębokożłobkowego.

Separacja przebiegów wykładniczych zanikającego prądu stałego jest osiągalna z wystarczającą dokładnością do 3-4 składowych przebiegów wykładniczych. W rzeczywistości jest tych przebiegów w maszynie z wirnikiem głębokożłobkowym nieskończenie wiele, jak to pośrednio wynika z obliczonego uprzednio przebiegu narastania prądu w samym pręcie głębokożłobkowym pod wpływem jednostkowego skokowego napięcia przyłożonego do pręta. Można przyjąć konwencję, że w silnikach o mocy do 1 MW wystarczą 3 składowe, powyżej 4 składowe. Ograniczenie się do separacji czterech przebiegów wykładniczych sprowadza się do zastąpienia wirnika głębokożłobkowego układem trzech klatek równoważnych. Można wyznaczyć tą metodą indukcyjność operatorową stojana w postaci czynników pierwiastkowych [4].

$$L_1(p) = L_1 \frac{(1+pT_2')(1+pT_2'')(1+pT_2''')}{(1+pT_{20}')(1+pT_{20}'')(1+pT_{20}''')}, \tag{15a}$$

to znaczy wyznaczyć indukcyjność stojana L_1 oraz sześć stałych czasowych wirnika $T_{2,\,20}'$ $T_{2,\,20}''$ $T_{2,\,20}'''$. Przemienność występowania zer i biegunów $L_1(p)$ w układach, które można sprowadzić do syntezy elementów R, L zapewnia obowiązywanie nierówności:

$$T_{20}' > T_2' > T_{20}'' > T_2'' > T_{20}''' > T_2'''.$$

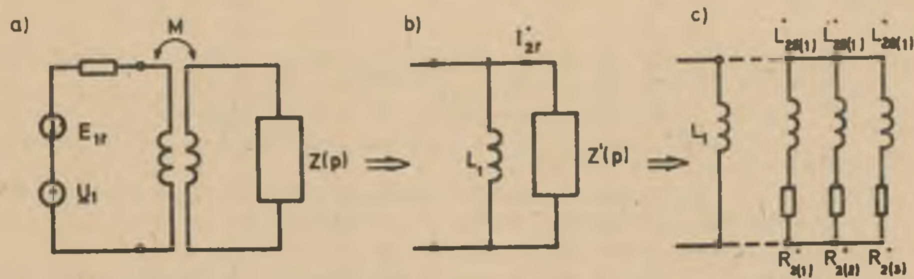
Zakładając znajomość tych parametrów można skonstruować schemat zastępczy maszyny podany na rys. 7c, w którym obwody wirnika sprowadzają się do 3 gałęzi dwójników RL bocznikujących ~~indukcyjności~~ L_1 o parametrach $R_{2(1),(2),(3)}$ oraz $L_{2s(1),(2),(3)}$. Dowód na ścisłość takiej reprezentacji wirnika trójklatkowego jest następujący:

Przyjmując w miejsce toeretycznie arbitralnego współczynnika sprowadzenia $\xi = \frac{L_1}{M}$ otrzymuje się ze schematu na rys. 7a sprowadzony schemat zastępczy podany na rys. 7b. Stąd

$$\frac{1}{pL_1(p)} = \frac{1}{p\,L_1} + \frac{1}{Z(p)}$$

$$\frac{1}{Z(p)} = \frac{W_2(p)}{L_1(1+pT_2')(1+pT_2'')(1+pT_2''')} \qquad (15b)$$

$$p\,W_2(p) = (1+pT_{20}')(1+pT_{20}'')1+pT_{20}''') - (1+pT_2')(1+pT_2'')(1+pT_2''').$$



Rys. 7. Transfiguracja schematu zastępczego wirnika o trzech klatkach zastępczych o stałych skupionych, jako przybliżonego odwzorowania klatki wirnika głębokożłobkowego

Można dokonać transfiguracji elementów składowych Z(p) przez rozbicie $\frac{1}{Z(p)}$ na ułamki proste. Sprowadza się to do obliczenia prądu w impednacji Z(p) pod wpływem skokowego napięcia jednostkowego i wyodrębnienie amplitud trzech przebiegów wykładniczych i_{10}, i_{20}, i_{30}.

$$\frac{1}{Z(p)} = \frac{i_{10}}{1+pT_2'} + \frac{i_{20}}{1+pT_2''} + \frac{i_{30}}{1+pT_2'''}$$

Stąd

$$R_{2(1)} = L_1 \frac{(T_2'-T_2'')\,(T_2'-T_2''')}{(T_{20}'-T_2')(T_{20}''-T_2')(T_{20}'''-T_2')}; \qquad L_{2s(1)} = T_2'\,R_{2(1)}$$

$$\dot{R}_{2(2)} = L_1 \frac{(T_2''-T_2')(T_2''-T_2''')}{(T_{20}'-T_2'')(T_{20}''-T_2'')(T_{20}'''-T_2'')}; \quad \dot{L}_{2s(2)} = T_2'' R_{2(2)}$$

$$\dot{R}_{2(3)} = L_1 \frac{(T_2'''-T_2')(T_2'''-T_2'')}{(T_{20}'-T_2''')(T_{20}''-T_2''')(T_{20}'''-T_2''')}; \quad \dot{L}_{2s(3)} = T_2''' R_{2(3)}$$

Schemat zastępczy z rys. 7c umożliwia przedstawienie równań stanu elektrodynamicznego w postaci kanonicznej. Prąd I_{2r} w schemacie zastępczym jest prądem proporcjonalnym do rzeczywistego prądu I_2, przy czym współczynnik sprowadzenia jako współczynnik proporcjonalności jest nie znany.

LITERATURA

[1] Puchała A.: Formy liniowe i kwadratowe niesymetrycznych maszyn elektrycznych. Zeszyty Naukowe AGH. Rozprawy Z. 27, 1964.

[2] Nürnberg W.: Die Asynchronmaschine. Springer Varlag, 1963.

[3] Paszek W.: Wzmacniacze elektromaszynowe i transduktorowe w przemyśle ciężkim. Wyd. Śląsk 1972.

[4] Paszek W.: Podstawowe parametry elektromagnetyczne maszyny synchronicznej i metody ich pomiaru. Arch. El. 3/1962.

[5] Zurmühl R.: Matrizen. Springer Verlag 1958.

[6] Grzybowski W., Paszek W.: Dynamika silników indukcyjnych zasilanych z tyrystorowych przemienników częstotliwości. Prace VI.Kr.Konf.Automatyki.Tom 3, s. 162-180, 1974.

[7] Grzybowski W., Paszek W.: Optymalne sterowanie dynamiki silników indukcyjnych. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., Elektryka z. 47, 1975.

[8] Sikora R., Lipiński W.: Dwuwymiarowe wypieranie prądu w żłobkach maszyn elektrycznych, Arch. Elektrotechn. 2/1971.

Dodatek 1

Liniowe przekształcenie wektorów kolumnowych wielkości fazowych jest dokonane za pomocą kwadratowej macierzy przekształcenia o wyrazach zespolonych $[\underline{C}]$, bądź o wyrazach rzeczywistych $[C]$. Jeśli dotyczy wielkości fazowych stojana, będzie to macierz $[C_1]$, jeśli wirnika $[C_2]$. Wielkości fazowe $[W_k]$ po stransformowaniu mają oznaczenie $[\underline{W}_n]$ bądź $[W_n]$, w zależności od tego czy są złożone z liczb zespolonych czy rzeczywistych

$$[\underline{W}_n] = [\underline{C}]\,[W_k] \quad \text{bądź} \quad [W_n] = [C]\,[W_k], \tag{1}$$

przy czym W oznacza wielkości elektromagnetyczne U, I, Ψ.

Moc chwilowa (pobierana) wyrażona w składowych fazowych prądów i napięć

$$P = [U_k]_T\,[I_k].$$

Jeśli jest pożądana niezmienniczość postaci mocy po stransformowaniu prądów i napięć fazowych obowiązuje dla macierzy przekształcenia o wyrazach zespolonych

$$[U_k]_T\,[I_k] = [\underline{u}_n]_T\,[\underline{i}_n^*] \tag{2}$$

stąd

$$([\underline{C}][U_k])_T\,([\underline{C}][I_k])^* = [U_k]_T\,[\underline{C}]_T\,[\underline{C}^*]\,[I_k] = [U_k]_T\,[I_k]$$

czyli

$$[\underline{C}]_T\,[\underline{C}^*] = [1] \quad \text{bądź} \quad [\underline{C}]^{-1} = [\underline{C}^*]_T. \tag{2a}$$

Jest to warunek unitarności macierzy przekształcenia $[\underline{C}]$. Dla macierzy przekształcenia o wyrazach rzeczywistych obowiązuje warunek

$$[U_k]_T\,[I_k] = [\bar{U}_n]_T\,[I_n].$$

Stąd

$$[U_k]_T\,[I_k] = ([C]^{-1}[U_n])_T\,[C]^{-1}[I_n] = [U_n]_T[C]^{-1}_T[C]^{-1}\,[I_n]$$

$$[C]^{-1}_T\,[C]^{-1} = [1] \quad \text{bądź} \quad [C]^{-1} = [C]_T \tag{2b}$$

Jest to warunek ortogonalności macierzy przekształcenia $[C]$. Warunek ten jest zresztą konsekwencją równania (2a) przy uwzględnieniu tylko rzeczywistych wyrazów macierzy przekształcenia.

Liniozwoje fazowe stojana $[\Psi_{1k}]$ i wirnika $[\Psi_{2k}]$ wynikają z zależności fazowych

$$[\Psi_{1k}] = [L_{1k}][I_{1k}] + [M_{12}][I_{2k}]$$

$$[\Psi_{2k}] = [L_{2k}][I_{2k}] + [M_{21}][I_{1k}]$$

Macierze $[L_{1k}]$ bądź $[L_{2k}]$ są kwadratowe $m_1 \times m_1$ bądź $m_2 \times m_2$, natomiast macierze indukcyjności wzajemnych są w ogólnym przypadku (niejednakowej liczby faz w stojanie i wirniku) prostokątne

$$^{m_1/m_2}[M_{12}] \quad \text{bądź} \quad ^{m_2/m_2}[M_{21}]$$

Macierze $[L_{1k}]$ i $[L_{2k}]$ są symetryczne ze względu na jednakowe indukcyjności wzajemne w obrębie stojana bądź wirnika i cykliczne (z uwagi na uwzględnienie tylko podstawowej harmonicznej przepływu uzwojeń fazowych), dla macierzy indukcyjności wzajemnych obowiązuje

$$[M_{21}] = [M_{12}]_T$$

Kwadratowe macierze indukcyjności uzwojeń stojana bądź wirnika można przedstawić w postaci

$$[L_{1,2k}] = \begin{bmatrix} L_{1,2f} & M_{1,2ż} + M_{fm}\cos\alpha_{1,2}, \; M_{fm}\cos 2\alpha_{1,2}, \dots & M_{1,2ż} + M_{fm}\cos\alpha_{1,2} \\ M_{1,2ż} + M_{fm}\cos\alpha_{1,2}, & L_{1,2f}, \; M_{1,2ż} + M_{fm}\cos\alpha_{1,2}, \dots & \\ \dots & \dots & \dots \\ M_{1,2ż} + M_{fm}\cos\alpha_{1,2}, \dots & & L_{1,2f} \end{bmatrix}$$

Prostokątna macierz indukcyjności wzajemnej między uzwojeniami fazowymi stojana i wirnika

$$[M_{12}] = M_{12m} \begin{bmatrix} \cos\delta, \cos(\delta+\alpha_2), \cos(\delta+2\alpha_2), \cos(\delta+3\alpha_2), \ldots \cos[\delta+(m_2-1)\alpha_2] \\ \cos(\delta+\alpha_1), \cos(\delta+\alpha_1+\alpha_2), \cos(\delta+\alpha_1+2\alpha_2), \ldots\ldots \cos[\delta+\alpha_1+(m_2-1)\alpha_2] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cos[\delta+m_1-1\alpha_1], \cos[\delta+(m-1)\alpha_1+\alpha_2], \ldots\ldots \cos[\delta+m_1-1\alpha_1+(m_2-1)\alpha_2] \end{bmatrix}$$

Indeksami 1,2 zaznaczono, że relacje dotyczą odpowiednio stojana lub wirnika

M_{fm} – umyślona maksymalna wartość indukcyjności wzajemnej związanej ze strumieniem w szczelinie w obrębie uzwojeń tylko stojana bądź tylko wirnika (przy pokrywaniu się osi dwóch umyślonych jednakowych uwzojeń),

$M_{1,2s}$ – indukcyjność wzajemna sąsiednich uzwojeń fazowych związana ze strumieniem rozproszenia,

M_{12m} – maksymalna wartość indukcyjności wzajemnej między uzwojeniami stojana i wirnika.

$$\alpha_{1,2} = \frac{2\pi}{m_{1,2}}$$

δ – kąt elektryczny zawarty między osiami uzwojeń fazowych a_1 i a_2 stojana i wirnika.

Dla cyklicznej kwadratowej macierzy indukcyjności wielofazowego układu symetrycznych uzwojeń fazowych wirnika (bądź stojana) – tak zwanych indukcyjności układu uzwojeń tylko wirnika bądź tylko stojana

$$[L_f] = \begin{bmatrix} n_1, & n_2, & n_3 \cdots\cdots & n_m \\ n_m, & n_1, & n_2 \cdots\cdots & n_{m-1} \\ & & & \\ n_2, & \cdots\cdots & \cdots\cdots & n_m \; n_1 \end{bmatrix}$$

poszukiwana liniowa macierz transformacji $[X]$ dająca diagonalizację macierzy indukcyjności ma spełniać następujące równanie macierzowe

$$[\underline{X}]^{-1}[L_f][\underline{X}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_m \end{bmatrix} = [\lambda]$$

gdzie

$$[\underline{X}] = \begin{bmatrix} \underline{x}_{11}, & \underline{x}_{12}, & \underline{x}_{1m} \\ \underline{x}_{21}, & \underline{x}_{22}, & \underline{x}_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{x}_{m1}, & \underline{x}_{m2}, & \underline{x}_{mm} \end{bmatrix} = \Big[[\underline{X}_1], [\underline{X}_2] \dots [\underline{X}_i] \dots [\underline{X}_m]\Big]$$

przedstawia macierz wektorów własnych macierzy $[L_f]$. Wektory własne $\underline{X}_1$, $\underline{X}_2 \dots \underline{X}_m$ oraz wartości własne są wyznaczone przez równanie macierzowe

$$[L_f][\underline{X}_i] = \lambda_i [\underline{X}_i] \quad \text{bądź} \quad \Big[[L_f] - \lambda_i [1]\Big][\underline{X}_i] = 0 \tag{3}$$

Wartości własne λ_i są równe m pierwiastkom wielomianu charakterystycznego wyznacznika m-tego stopnia macierzy charakterystycznej

$$\Big[[L_f] - \lambda[1]\Big] = \begin{bmatrix} n_1 - \lambda, & n_2, & n_m \\ n_m, & n_1 - \lambda, & n_{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots, & n_1 - \lambda \end{bmatrix}$$

Wektory własne są macierzami kolumnowymi $[\underline{X}_i]$, spełniającymi równanie (3) z dokładnością do współczynnika proporcjonalności. Każdy wektor $k[\underline{X}_i]$ spełnia również równanie (3). Przeprowadza się unormowanie wektorów własnych odpowiednio do równania

$$[\underline{X}_i^*]_T [\underline{X}_i] = 1 \tag{4}$$

Dla cyklicznej macierzy otrzymuje się następujące unormowane wektory własne

$$[\underline{X}_i] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_i^1 \\ \underline{\varepsilon}_i^2 \\ \underline{\varepsilon}_i^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{\varepsilon}_i^m \end{bmatrix},$$

gdzie $\underline{\varepsilon}_i = e^{-j\frac{2\pi}{m}(i-1)} = \underline{a}^{-(i-1)}$

$i = 1,2,3...m$

$\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{m}}$

Wartości własne:

$$\lambda_i = n_1 + n_2\,\underline{\varepsilon}_i^1 + n_3\,\underline{\varepsilon}_i^2 + \dots\dots\dots\, n_m\,\underline{\varepsilon}_i^{m-1}$$

Z uwagi na specyficzną budowę macierzy indukcyjności wartości własne tej macierzy (indukcyjności własne układu stransformowanego) są liczbami rzeczywistymi. Wartości własne występują parami jednakowe $\lambda_2 = \lambda_m$, $\lambda_3 = \lambda_{m-1}$ itd.) za wyjątkiem λ_1 oraz $\lambda_{(\frac{m}{2}+1)}$ dla parzystej liczby faz m.

Macierz unormowanych wektorów własnych jest macierzą symetryczną i unitarną

$$[\underline{X}] = \left[[\underline{X}_1]\cdot[\underline{X}_2][\underline{X}_m]\right] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1, & 1\,, & 1\,, & 1\,, & \dots\, 1 \\ 1, & \underline{a}^{-1}, & \underline{a}^{-2}, & \underline{a}^{-3}, & \dots\, \underline{a}^{-(m-1)} \\ 1, & \underline{a}^{-2}, & \underline{a}^{-4}, & \underline{a}^{-6}, & \dots\, \underline{a}^{-2(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & \underline{a}^{-(m-1)}, & \underline{a}^{-2(m-1)} & \dots & \underline{a}^{-(m-1)^2} \end{bmatrix} \quad (5$$

$$[\underline{X}]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots\, 1 \\ 1, & \underline{a} & \underline{a}^2 & \underline{a}^3, & \dots\, \underline{a}^{m-1} \\ 1, & \underline{a}^2 & \underline{a}^4 & \underline{a}^6 & \dots\, \underline{a}^{2(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & \underline{a}^{m-1}, & \underline{a}^{2(m-1)}, & \underline{a}^{3(m-1)}, & \dots\, \underline{a}^{(m-1)^2} \end{bmatrix}$$

Macierz $[\underline{X}]^{-1}$ jest podstawą do poszukiwania macierzy przekształcenia transformującej wielkości fazowe do nowego układu współrzędnych, ponieważ diagonalizuje macierz indukcyjności uzwojeń stojana bądź wirnika. Unitarność macierzy przekształcenia jest zachowana, jeśli macierz przekształcenia $[\underline{C}]$ jest iloczynem dowolnej macierzy unitarnej $[\underline{Y}]$ i macierzy wektorów własnych $[\underline{X}]^{-1}$ - a diagonalność macierzy odwzorowującej $[\underline{C}]^{-1}[L_f][\underline{C}]$ pozostaje, jeśli przyjmie się szczególny przypadek unitarnej macierzy (macierzy obrotu).

$$[\underline{Y}] = [\underline{Y}_{\vartheta}] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & (0) \\ & e^{-j\vartheta} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ (0) & & & & & e^{j\vartheta} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Stąd

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & , \ldots\ldots\ldots & 1 \\ e^{-j\vartheta a}, & e^{-j\vartheta b}, & e^{-j\vartheta c}, & \ldots\ldots\ldots & e^{-j\vartheta m} \\ 1 & , \underline{a}^{2} & , \underline{a}^{4} & , \ldots\ldots\ldots & \underline{a}^{2(m-1)} \\ 1 & , \underline{a}^{3} & , \underline{a}^{6} & , \ldots\ldots\ldots & a^{3(m-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{j\vartheta a} & e^{j\vartheta b} & e^{j\vartheta c} & \ldots\ldots\ldots & e^{j\vartheta m} \end{bmatrix} \qquad (7)$$

gdzie

$$e^{j\vartheta a} = e^{j\vartheta}; \quad e^{j\vartheta b} = \underline{a}^{-1} e^{j\vartheta}; \quad e^{j\vartheta c} = \underline{a}^{-2} e^{j\vartheta} \quad \text{itd.}$$

Transformacja wielkości fazowych W_k do nowego układu współrzędnych $\underline{w}_n$ dokonana jest relacją

$$[\underline{w}_n] = [\underline{C}][W_k]$$

Przy zasilaniu prądem tylko wielofazowych uzwojeń wirnika bądź tylko stojana

$$[\Psi_k] = [L_f][I_k].$$

Po transformacji obowiązuje

$$\left[\underline{\Psi}_n\right] = \left[\underline{C}\right]\left[L_k\right]\left[\underline{C}\right]^{-1}\left[\underline{i}_n\right]$$

i w konsekwencji

$$\left[\underline{\Psi}_n\right] = \left[L_n\right]\left[\underline{i}_n\right]$$

gdzie $\left[L_n\right] = \left[\Lambda\right]$

Przy ϑ = const (zwykle $\vartheta = 0$) unitarna macierz przekształcenia $\left[\underline{C}\right]$ jest stosowana w metodzie unormowanych składowych symetrycznych w układzie współrzędnych holonomicznych wirnika bądź stojana (układu sztywno związanego z wirnikiem bądź ze stojanem).

Macierz indukcyjności wzajemnych $\left[M_{12}\right]$ bądź $\left[M_{21}\right]$ między uzwojeniami fazowymi stojana i wirnika jest w ogólnym przypadku nierównej liczby faz stojana m_1 i wirnika m_2 macierzą prostokątną i niecykliczną (tylko przy $m_1 = m_2$ jest cykliczną i kwadratową). Mimo to jej konstrukcja jest tego rodzaju, że następuje jej diagonalizacja za pomocą macierzy $\left[\underline{C}_1\right]$ bądź $\left[\underline{C}_2\right]$

$$\left[\underline{C}_1\right]\left[M_{12}\right]\left[C_2\right]^{-1} \overset{m_1 \diagdown m_2}{=} \left[M\right] = M \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & e^{-j\beta} & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & e^{j\beta} \end{bmatrix}$$

$$\left[\underline{C}_2\right]\left[M_{21}\right]\left[\underline{C}_1\right]^{-1} = \left[M\right]_T$$

$$\beta = \vartheta_1 - \vartheta_2 + \delta$$

W rachunku składowych symetrycznych w układzie holonomicznym przyjmuje się z reguły $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$.

Spośród wszystkich m współrzędnych tylko dwie składowe (wiersza drugiego i ostatniego) kolumnowego wektora prądu powodują sprzężenie indukcyjne między wirnikiem a stojanem i w konsekwencji uczestniczą w wytwarzaniu momentu elektromagnetycznego. Są to przeto składowe elektromechanicznie aktywne w przeciwieństwie do składowej pasywnej wszystkich m-2 pozostałych współrzędnych nazywanych współrzędnymi zerowymi. Współrzędne zerowe są autonomiczne jako relacje między U, I, Ψ w obrębie stojana bądź wirnika. Holonomiczny układ współrzędnych jest niewygodny z uwagi na uzależnienie stransformowanej macierzy indukcyjności wzajemnych między fazowymi uzwojeniami stojana i wirnika od elektrycznego kąta δ położenia wirnika względem stojana. Przy odejściu od układu współrzędnych holonomi nych przyjmuje się $\vartheta_2 = \vartheta_1 + \delta$, przy czym $\vartheta_1 = \vartheta_{1x}(t)$ może być dowolnie zmienne w czasie.

Konsekwencją wirującego z prędkością $\frac{d\vartheta_{1x}}{dt} = \omega_x$ układu odniesienia dla składowych elektromechanicznie aktywnych jest $\beta = 0$ i w konsekwencji stałość wyrazów macierzy [M]. Łatwo zauważyć, że za wyjątkiem wiersza pierwszego i wiersza $(\frac{m}{2} + 1)$ przy parzystej liczbie faz m poszczególne współrzędne wektorów kolumnowych w nowym układzie współrzędnych występują parami jako liczby sprzężone. Współrzędne wektorów można uporządkować w kolejności związanej z elektromechaniczną aktywnością i w kolejności następstwa relacji wzajemnie sprzężonych.

$$
\overset{1}{\diagdown}_{m\,1,2}\left[\underline{w}_{1,2n}\right] = \begin{bmatrix} {}_{2}\overset{1}{\diagdown} & \\ & \left[\underline{w}_{1,2}\right] \\ \overset{1}{\diagdown} & \\ {}_{m-2} & \\ {}_{1,2} & [0] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & {}_{2}\overset{1}{\diagdown} \\ & [0] \\ \overset{1}{\diagdown} & \\ {}_{m-2} & \\ {}_{1,2} & \left[\underline{w}_{1,20}\right] \end{bmatrix} \tag{9}
$$

$$
\left[\underline{w}_{1,2}\right] = \begin{bmatrix} \underline{w}_{1,2} \\ \\ \underline{w}_{1,2} \end{bmatrix} \quad \text{– składowe elektromechanicznie aktywne}
$$

$$
\left[\underline{w}_{1,2\,0}\right] = \left[w_{1,20}^{(1)}, \underline{w}_{1,20}^{(2)}, \underline{w}_{1,20}^{(2)*}, \underline{w}_{1,20}^{(3)}, \underline{w}_{1,20}^{(3)*} \dots w_{1,20}^{(P)}\right]_T
$$

oznaczają składową zerową elektromechanicznie pasywną o współrzędnych rzędu (1), i kolejnych wyższych rzędów. Ostatni wiersz kolumny to $\underline{w}_{1,20}^{(\frac{m}{2})}$ dla parzystych m bądź $\underline{w}_{1,20}^{(\frac{m-1}{2})*}$ dla nieparzystych m ($p = \frac{m}{2}$ bądź odpowiednio $\frac{m-1}{2}$).

Macierz przekształcenia po takim przegrupowaniu wiersza

$$\left[\underline{C}'_{1,2}\right] = \frac{1}{\sqrt{m_{1,2}}}\begin{bmatrix} e^{-j\vartheta_{1,2a}}, & e^{-j\vartheta_{1,2b}}, & \dots & e^{-j\vartheta_{1,2m}} \\ e^{j\vartheta_{1,2a}}, & e^{j\vartheta_{1,2b}}, & \dots & e^{j\vartheta_{1,2m}} \\ 1, & 1, & \dots & 1 \\ 1, & \underline{a}^{2}, \ a^{2\cdot 2}, & \dots & \underline{a}^{(m-1)2} \\ 1, & \underline{a}^{m-2}, \ a^{2(m-2)} & & \underline{a}^{(m-1)(m-2)} \\ 1, & \underline{a}^{3}, \ \underline{a}^{2\cdot 3} & & \underline{a}^{(m-1)3} \\ 1, & \underline{a}^{m-3}, \ \underline{a}^{2(m-3)} & & \underline{a}^{(m-1)(m-3)} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Macierz przekształcenia odwrotnego otrzymuje się wprost z równania (2a).

Można uwolnić się od zespolonej postaci współrzędnych wektora $[\underline{w}_n]$ za pomocą kwadratowej macierzy unitarnej $[\underline{Y}_{Re}]$ premultiplikującej unitarną macierz przekształcenia $[\underline{C}']$ dla otrzymania ortogonalnej macierzy przekształcenia $[C]$ o wyrazach rzeczywistych.

$$[C] = [\underline{Y}_{Re}]\,[\underline{C}']$$

$$[\underline{Y}_{Re}] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1, & 1 & & & & & & (0) \\ -j, & j & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & -j & j & & & & \\ & & & & 1, & 1 & & \\ (0) & & & & -j, & j & & \\ & & & & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

$$\left[C_{1,s}\right] = \sqrt{\frac{2}{m_{1,2}}} \begin{bmatrix} \cos\vartheta_{1,2a}, & \cos\vartheta_{1,2b}, & \ldots\ldots & , \cos\vartheta_{1,2m} \\ -\sin\vartheta_{1,2}, & -\sin\vartheta_{1,2b}, & \ldots\ldots & , -\sin\vartheta_{1,2m} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}} & \ldots\ldots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & , \cos\alpha^{(2)}_{1,2b}, & \cos\alpha^{(2)}_{1,2c}, & \ldots \cos\alpha^{(2)}_{1,2m} \\ 0 & , \sin\alpha^{(2)}_{1,2b}, & \sin\alpha^{(2)}_{1,2c}, & \ldots \sin\alpha^{(2)}_{1,2m} \\ 1 & , \cos\alpha^{(3)}_{1,2b}, & \cos\alpha^{(3)}_{1,2c}, & \ldots \cos\alpha^{(3)}_{1,2m} \\ 0 & , \sin\alpha^{(3)}_{1,2b}, & \sin\alpha^{(3)}_{1,2b}, & \ldots \sin\alpha^{(3)}_{1,2m} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{11}$$

przy czym

$$\vartheta_{1,2a} = \vartheta_{1,2}; \quad \vartheta_{1,2b} = \vartheta_{1,2} + \frac{2\pi}{m_{1,2}}(m_{1,2}-1); \quad \vartheta_{1,2c} = \vartheta_{1,2} +$$

$$+ \frac{2\pi}{m_{1,2}}(m_{1,2}-2); \quad \text{itd.}$$

Ogólnie

$$\vartheta_{1,2k} = \vartheta_{1,2} + \frac{2\pi}{m_{1,2}}\left[N(k) - 1\right]$$

numer fazy $N(k)$ = 1 dla fazy a

= 2 dla fazy b

= 3 dla fazy c itd.

Dla współrzędnych zerowych (i) tego rzędu większego od 1 $\alpha_k^{(i)} = i\,\alpha_{1,2}\,N(k)$.

Macierz przekształcenia odwrotnego wynika wprost z równania (2b).

W nowym układzie współrzędnych

$$\left[W_{1,2n}\right] = \left[C_{1,2}\right]\left[W_{1,2k}\right] = \begin{bmatrix} W_{1,2} \\ W_{1,2} \\ W^{(1)}_{1,2o} \\ W^{(2)}_{1,2or} \\ W^{(2)}_{1,2oi} \\ W^{(3)}_{1,2or} \\ W^{(3)}_{1,2oi} \\ \cdots\cdots \\ W^{(P)}_{1,2o} \end{bmatrix}$$

Działając macierzą przekształcenia $\left[C_1\right]$ na obie strony równania napięć stojana

$$\left[U_{1k}\right] = \left[\frac{d\Psi_{1k}}{dt}\right] + R_1\left[I_{1k}\right]$$

otrzymuje się równanie napięć dla wektorów stransformowanych

$$\left[U_{1n}\right] = \frac{d}{dt}\left[\Psi_{1n}\right] + \omega_x\left[K_1\right]\left[\Psi_{1n}\right] + R_1\left[I_{1n}\right]$$

$$\left[K_1\right] = \left[C_1\right]\left\{\frac{d}{dt}\left[C_1\right]^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & (0) \\ -1 & 0 & \\ (0) & & (0) \end{bmatrix} \tag{12}$$

Równanie napięć wirnika wielofazowego o zwartych uzwojeniach fazowych (maszyny z wirnikiem klatkowym)

$$\left[0\right] = \frac{d}{dt}\left[\Psi_{2n}\right] + (\omega_x - \omega)\left[K_2\right]\left[\Psi_{2n}\right] + \left[R_2\right]\left[I_{2n}\right]$$

$$
\left[K_2\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & (0) \\ (0) & & (0) \end{bmatrix}, \quad
\left[R_2\right] = \begin{bmatrix} R_2 & & & & & & (0) \\ & R_2 & & & & & \\ & & R_{20}^{(1)} & & & & \\ & & & R_{20}^{(2)} & & & \\ & & & & R_{20}^{(2)} & & \\ & & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & & R_{20}^{(p_2)} \end{bmatrix} \qquad (13)
$$

$$
\begin{bmatrix} \left[\Psi_{2n}\right] \\ \\ \left[\Psi_{2n}\right] \end{bmatrix} =
\left[\begin{array}{cccccccc|ccc}
L_1 & & & & & & & & M,\ 0 & & \\
& L_1 & & & & & & & 0,\ M & & (0) \\
& & L_{10}^{(1)} & & & & & & & & \\
& & & L_{10}^{(2)} & & & & & & & \\
& & & & L_{10}^{(2)} & & & & & & \\
& & & & & L_{10}^{(3)} & & & (0) & & (0) \\
& & & & & & L_{10}^{\cancel{(3)}} & & & & \\
& & & & & & & \ddots\ L_{10}^{(p_1)} & & & \\
\hline
M,\ 0 & & & & & & & & L_2 & & \\
0,\ M & & & (0) & & & & & & L_2 & \\
& & & & & & & & & & L_{20}^{(1)}\ \ L_{20}^{(2)}\ \ L_{20}^{(2)}\ \ L_{20}^{(3)}\ \ L_{20}^{(3)} \\
(0) & & & (0) & & & & & & & \ddots\ L_{20}^{(p_2)}
\end{array}\right]
\cdot
\begin{bmatrix} \left[I_{1n}\right] \\ \\ \left[I_{2n}\right] \end{bmatrix}
$$

W przypadku wielofazowych wzwojeń wirników macierz rezystacji

$$\left[R_2\right] = R_2 \left[1\right]$$

W przypadku wirników klatkowych diagonalna postać macierzy rezystancji $\left[R_2\right]$ o niejednakowych wyrazach wynika z cykliczności macierzy rezystancji "uzwojeń fazowych" - prętów wirnika na skutek wpływu rezystancji połączeń czołowych (segmentów pierścienia zwierającego). Składowe

$$\underline{W}_{1,2} = W_{1,2\alpha} + jW_{1,2\beta}$$

nazywamy składowymi osiowymi, ponieważ wykazują wzajemnie prostopadłe składowe w osi α i β. W maszynie dwubiegunowej osie α i β można przyporządkować heurystycznie osiom zastępczych uzwojeń wzajemnie prostopadłych, wytwarzających przepływ wypadkowy stojana bądź wirnika równy przepływowi maszyny wielofazowej (w maszynie wielobiegunowej kąty geometryczne rozstępu osi uzwojeń rozpatruje się jako kąty elektryczne p_b krotnie większe od geometrycznych). W kolejnych cyklach biegunowych powtarzają się relacje elektromagnetyczne.

Podobnie można przedstawić w postaci zespolonej współrzędne składowej zerowej wyższych (i-tych) rzędów

$$\underline{W}^{(i)}_{1,2,o} = W^{(i)}_{1,2or} + jW^{(i)}_{1,2oi}$$

Z porównania transformacji $[\underline{C}]$ i $[C]$ wynika następująca odpowiedniość składowych

$$\underline{W}_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{W}_{1,2}$$

$$\underline{W}^{(i)}_{1,2o} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{W}_{1,2o}$$

$$W^{(i)}_{1,2o} = W^{(i)}_{1,2o}$$

Dodatek 2

Wychodząc z równania napięć fazowych stojana i wirnika

$$[U_i] = \frac{d}{dt}[\Psi_i] + [R_i][I_i], \tag{1}$$

gdzie:

$$[W_i] = \begin{bmatrix} [W_{1k}] \\ [W_{2k}] \end{bmatrix}, \quad W = U,\ I,\ \Psi$$

$$[\Psi_i] = [L_i][I_i]$$

$$[L_i] = \begin{bmatrix} [L_{1k}] & [M_{12}] \\ [M_{21}], & [L_{2k}] \end{bmatrix}$$ - macierz symetryczna.

Bilans mocy

$$P = [U_i]_T\,[I_i] = \frac{d}{dt}[\Psi_i]_T\,[I_i] + [R_i][I_i]_T\,[I_i]. \tag{2}$$

Kolejne składniki prawej strony równania (2) cznaczają moc pobieraną. moc strat i łącznie sumę mody mechanicznej P_m i przyrostu energii pola magnetycznego $\frac{dA_m}{dt}$

$$\frac{d}{dt}\left[\Psi_i\right]_T\left[I_i\right] = \frac{dA_m}{dt} + P_m \tag{3a}$$

$$A_m = \frac{1}{2}\left[I_i\right]_T\left[\Psi_i\right] = \frac{1}{2}\left[I_i\right]_T\left[L_i\right]\left[I_i\right]$$

$$\frac{dA_m}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{dI_i}{dt}\right]_T\left[\Psi_i\right] + \frac{1}{2}\left[I_i\right]_T\left[\frac{d\Psi_i}{dt}\right] \tag{3b}$$

Po podstawieniu (3b) do (3a)

$$P_m = \frac{1}{2}\left[I_i\right]_T\left[\frac{d\Psi_i}{dt}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{dI_i}{dt}\right]_T\left[\Psi_i\right] = \frac{1}{2}\left[I_i\right]_T\left[\frac{dL_i}{dt}\right] I_i +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[I_i\right]_T\left[L_i\right]\left[\frac{dI_i}{dt}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{dI_i}{dt}\right]_T\left[L_i\right]\left[I_i\right]$$

Z uwagi na symetrię macierzy $\left[L_i\right]$ dwa ostatnie składniki znoszę się wzajemnie i stąd

$$P_m = M_e\frac{d\delta}{dt}\cdot\frac{1}{p_b} = \frac{1}{2}\left[I_i\right]_T\left[\frac{dL_i}{d\delta}\right]\left[I_i\right]\frac{d\delta}{dt}$$

$$M_e = \frac{p_b}{2}\left[I_i\right]_T\left[\frac{dL_i}{d\delta}\right]\left[I_i\right]. \tag{4}$$

Wychodzęc z równania napięć w stransformowanym układzie współrzędnyoh

$$\left[U_j\right] = \left[\frac{d\Psi_j}{dt}\right] + \left[K_j\right]\left[\Psi_j\right] + \left[R_j\right]\left[I_j\right] \tag{5}$$

$$\left[W_j\right] = \begin{bmatrix}\left[W_{1n}\right]\\ \left[W_{2n}\right]\end{bmatrix};\quad \left[K_j\right] = \begin{bmatrix}\omega_x & \left[K_1\right] & \left[0\right]\\ \left[0\right], & (\omega_x-\omega) & \left[K_2\right]\end{bmatrix};\quad \left[R_j\right] = \begin{bmatrix}\left[R_1\right] & \left[0\right]\\ \left[0\right] & \left[R_2\right]\end{bmatrix}$$

$$[\Psi_j] = [L_j]\,[I_j]; \quad [L_j] = \begin{bmatrix} [L_{1n}], & [M] \\ [M] & , [L_{2n}] \end{bmatrix}$$ – macierz symetryczna

$$P = [U_j]_T\,[I_j] = \left([R_j]\,[I_j]\right)_T [I_j] + \left[\frac{d\Psi_j}{dt}\right]_T [I_j] + \left([K_j][\Psi_j]\right)_T [I_j]$$

$$A_m = \frac{1}{2}[\Psi_j]_T\,[I_j] = \frac{1}{2}\left([L_j]\,[I_j]\right)_T [I_j]$$

$$P_m = \left[\frac{d\Psi_j}{dt}\right]_T [I_j] + \left([K_j]\,[\Psi_j]\right)_T [I_j] - \frac{dA_m}{dt}$$

$$\frac{dA_m}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{d\Psi_j}{dt}\right]_T [I_j] + \frac{1}{2}[\Psi_j]_T \left[\frac{dI_j}{dt}\right] = \frac{1}{2}\left([L_j]\left[\frac{dI_j}{dt}\right]\right)_T [I_j] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left([L_j]\,[I_j]\right)_T \left[\frac{dI_j}{dt}\right] = \left([L_j]\left[\frac{dI_j}{dt}\right]\right)_T [I_j] = \left[\frac{d\Psi_j}{dt}\right]_T [I_j]$$

$$P_m = M_e\,\frac{d\delta}{dt}\cdot\frac{1}{p_b} = \left([K_j]\,[\Psi_j]\right)_T [I_j] = \omega_x(\Psi_{1\alpha} I_{1\beta} - \Psi_{1\beta} I_{1\alpha})$$

$$+ (\omega_x - \omega)(\Psi_{2\alpha} I_{2\beta} - \Psi_{2\beta} I_{2\alpha}) \qquad (6)$$

Uwzględniając w równaniu (6) relację liniozwojów

$$\underline{\Psi}_1 = \Psi_{1\alpha} + j\Psi_{1\beta} = \underline{I}_1 L_1 + \underline{I}_2 M$$

$$\underline{\Psi}_2 = \Psi_{2\alpha} + j\Psi_{2\beta} = \underline{I}_1 M + \underline{I}_2 L_2$$

oraz $\omega = \frac{d\delta}{dt}$

$$M_e = p_b\,M(I_{2\alpha} I_{1\beta} - I_{2\beta} I_{1\alpha}) = p_b(\Psi_{1\alpha} I_{1\beta} - \Psi_{1\beta} I_{2\alpha}). \qquad (7)$$

Przyjęto do druku w lipcu 1977 r.

ВЛИЯНИЕ ПОСТОЯННЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ В КЛЕТКАХ РОТОРОВ НА ПЕРЕХОДНЫЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ГЛУБОКОПАЗНЫХ АСИНХРОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Р е з ю м е

В статье предложено метод анализа электродинамических состояний асинхронных машин на основе дифференциальных уравнений электромагнетических и электромеханических состояний, которые обязывают для векторов (столбцовых матриц) электромагнетических величин странсформированных с фазовой координатной системой к новой координатной системе диагонализующей матрицы индуктивностей статора и ротора. Глубокопазные роторы с электрическими цепями характеризующимися распределёнными постоянными анализуют в электродинамическом состоянии заменяя эти цепи, цепями ротора со сосредоточными постоянными. Предложено разные методы аппроксимации этих цепей, исходя из точной эквивалентной схемы в операторных уравнениях глубокопазного стержния либо из умышленного разделения общего сечения глубокопазного стержния на отрезки сечения проводящих ниток электромагнетически сцепленных.

Influence of distributed constants in deep bar rotor of induction motors on electrodynamic transients

S u m m a r y

The paper presents the analysis of electromagnetic and electromechanical transients of induction motors derived of the differential equations after transforming the phase quantities into new coordinate system which diagonalizes the inductance matrix of stator and rotor. The deep bar rotor occurs as a system of distributed constants. The electrodynamic transients are analysed after approximation of the deep bar by equivalent circuits with lumped constants.

Different methods of substituting of the deep bar were presented, either starting from the operational equivalent circuit or by dividing of the total cross section into magnetically linked partial sections of the bar.